



حکومەتی هەرێمی کوردستان - عێراق
وەزارەتی پەرۆدەرە - پەرێوەبەرایەتی گشتی پروگرام و چاپەمەنیەکان

بیرکاری بو هەمووان

کتیبي خويندکار
پۆلی یازدەهەمی زانستی

چاپی هه‌شته‌م
٢٠١٦ ز / ٢٧١٦ کوردی / ١٤٣٧ ک

سہرپہرشتی ہونہری چاپ

عوسمان پیرداود کواز

ناری محسن احمد

3 ئايا تۇ ئامادەيت؟ **Are You Ready?**

4 **Study Guide: Preview** رېبەرى خويندن: تېروانين لەسەر بەشەكە

5 **Reading and Writing Math** بىركارى بە خويندەنەو و نووسين

6 3D Coordinate System بۆشايى پۇوتان **1-1**

تەكنۇلۇژى: دروستكردىنى چەندلا رېكەكان

لاپەرەى

12 **Constructing regular polygons**

14 Polygons چەندلايەكان **2-1**

21 Dilation ھاوپۇرۇزى ئەندازەيى **3-1**

27 Vectors ئاراستەبەرەكان **4-1**

36 **Quiz (4-1)** تاقىكرىدەنەوئى نىوئى بەش (وانەكانى)

5-1 رۇوبەرى بازىنە و چەندلا رېكەكان

37 Area of Circles and Regular Polygons

43 Formulas in Three Dimensions ھەندىك لە ياساكانى بۆشايى **6-1**

51 Sphere گۇ **7-1**

59 Sectors and Arcs كەرەتە بازىنەيەكان و كەوانەكان **8-1**

65 **Study Guide: Review** رېبەرى خويندن: پىداچوونەو

67 **Chapter Test** تاقىكرىدەنەوئى بەش

68 **Cumulative Assessment** تاقىكرىدەنەوئى كەلەكەبوو

سىستىمى ھاۋكىشەكان و لاسهنگە ھىلىيەكان

Systems of Linear Equations and Inequalities

71	ئايا تۆ ئامادەيت؟ Are You Ready?
72	رېبەرى خويىندىن: تېروانىن لەسەر بەشەكە Study Guide: Preview
73	بىركارى بە خويىندىنەۋە و نووسىن Reading and Writing Math
74	لاسهنگە ھىلىيە دوو نەزانراۋەكان Linear Inequalities in 2 Unknowns 1-2
83	مۆدىلە ھىلىيەكان Linear Models 2-2
92	سىستىمەكانى لاسەنگە ھىلىيەكان Systems of Linear Inequalities 3-2
98	پىرۇگرامى ھىلى Linear Programming 4-2
106	تاقىكىرنەۋەى نىۋەى بەش (ۋانەكانى 4-1) Quiz
		شىكاركىردنى سىستىمى ھىلى بەسى نەزانراۋ 5-2
107	Solving Linear Systems in 3 Unknowns
115	پىۋانە ئامارىيەكان Statistical Measurements 6-2
		تەكنۆلۇژىيا: كۆكىرنەۋەى پىدراۋەكان بەشپۋەى تاقىكىرنەۋەى لاپەردەى
124	Collecting Experimental Data
125	بەشىنەۋەكانى دوۋانى «كراۋەى دوۋرپادەدار» Binomial Distributions 7-2
135	رېبەرى خويىندىن: پىدچاۋونەۋە Study Guide: Review
137	تاقىكىرنەۋەى بەش Chapter Test
138	تاقىكىرنەۋەى كەلەكەبۋو Cumulative Assessment



141	ئايا تۆ ئامادەيت؟ Are You Ready?
142	پېئەرى خويىندىن: تېرۋانين لەسەر بەشەكە Study Guide: Preview
143	بىركارى بە خويىندىنەۋە و نووسىن Reading and Writing Math
144	رېزىكراوهكان Matrices 1-3
152	لىككىنى رېزىكراوهكان Multiplying Matrices 2-3
		رېزىكراوهكان و جىگۋېكى ئەندازىيەكان 3-3
161	Matrices and Geometrical Transformations
167	Determinants and Cramer's Rule سنورەركان و پېساي گرامر 4-3
176	تاقىكرىدەۋەى نىۋەى بەش (ۋانەكانى 4-1) Quiz
177	مەلگەپاۋەى رېزىكراوهكان Matrix Inverse 5-3
186	تەكنۆلۇژىيا: شىكارىكرىدى سىستىمى ھىلى بەبەكارھىتائى بەرنامەى Excel . لايەپەى
187	ژمارە ئاۋىتەكان Complex Numbers 6-3
193	كردارەكان لەسەر ژمارە ئاۋىتەكان Operations with Complex Numbers 7-3
201	پېئەرى خويىندىن: پىداچوۋنەۋە Study Guide: Review
203	تاقىكرىدەۋەى بەش Chapter Test
204	تاقىكرىدەۋەى كەلەكەبوو Cumulative Assessment

نەخشە توانىيەكان و لۇگارىتمىيەكان

Exponential and Logarithmic Functions

206	ئايا تۇ ئامادەيت؟ Are You Ready?	
208	رېبەرى خويىندىن: تېروانىن لەسەر بەشەكە Study Guide: Preview	
209	بىركارى بە خويىندىنەو و نووسىن Reading and Writing Math	
		نەخشە توانىيەكان وگەشە و پووكانەو «گەرانەو»	1-4
210	Exponential Functions, Growth and Decay	
		تەكنۇلۇژيا: دۆزىنەو مى پىچەوانەى نەخشەكان	لاپەردى
218	Explore Inverses of Functions	
219	Inverse Function نەخشە پىچەوانەى	2-4
226	Logarithmic Functions نەخشە لۇگارىتمىيەكان	3-4
233	تاقىكرىنەو مى نىو مى بەش (وانەكانى 3-1) Quiz	
234	سىفەتەكانى لۇگارىتم Properties of Logarithm	4-4
242	Natural Logarithm لۇگارىتمى سىروشتى	5-4
		هاوكىشە و لاسەنگە توانىيەكان و لۇگارىتمىيەكان	6-4
249	Exponential and Logarithmic Equations and Inequalities	
256	Exponential and Logarithmic Models نمونە توانىيەكان و لۇگارىتمىيەكان	7-4
263	رېبەرى خويىندىن: پىداچوونەو Study Guide: Review	
265	تاقىكرىنەو مى بەش Chapter Test	
266	Cumulative Assessment تاقىكرىنەو مى كەلەكەبوو	

سېفەتەكانى نەخشەكان

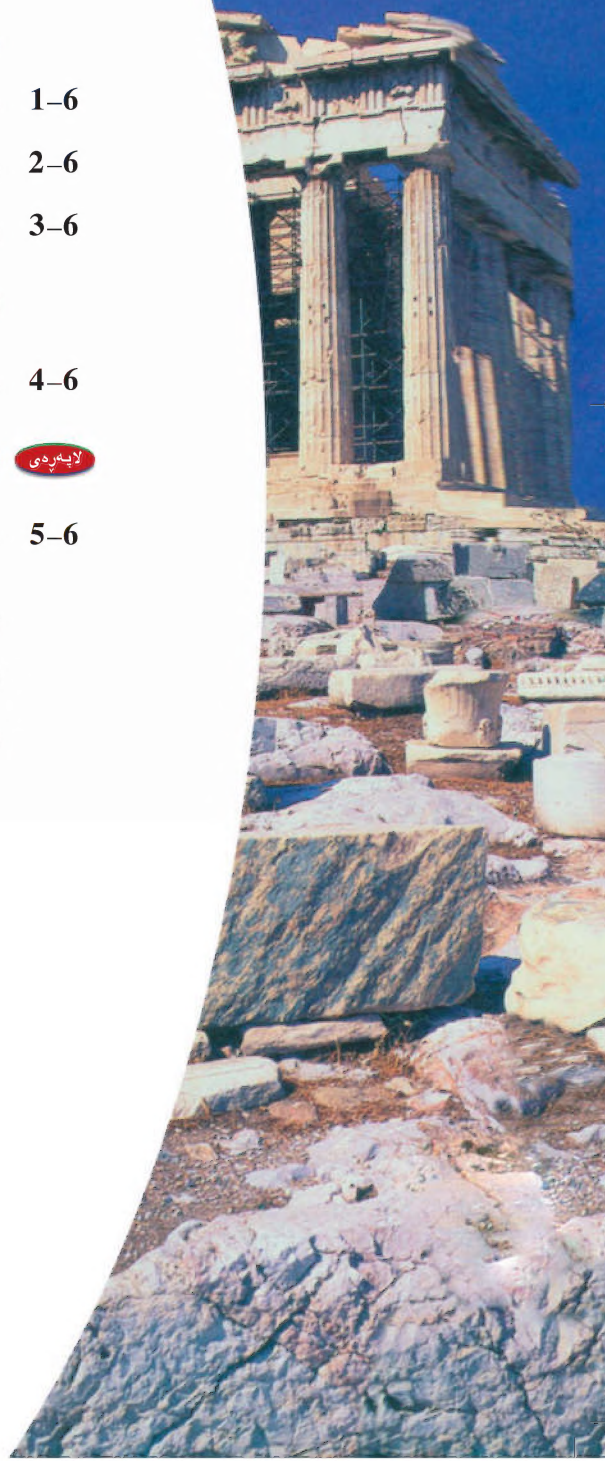
Properties of Functions

269	ئايا تۇ ئامادەيت؟ Are You Ready?	
270	رېبەرى خويىندى: تېروانىن لەسەر بەشەكە Study Guide: Preview	
271	بىركارى بە خويىندىنەو و نووسىن Reading and Writing Math	
272	نەخشە رېسا پەلدارەكان Piecwise Functions	1-5
282	تەكنۇلۇژىيا: دۆزىنەوئى جىاوازييەكان و رېژەكان	لايەرى
283	جىگۇرپكى نەخشەكان Transforming Functions	2-5
291	تاقىكرىنەوئى نىوئى بەش (وانەكانى 2-1) Quiz	
292	كردارەكان لەسەر نەخشەكان Operations with Functions	3-5
299	نمونه بىركارىيەكان Mathematical Models	4-5
308	رېبەرى خويىندى: پىداچوونەو Study Guide: Review	
310	تاقىكرىنەوئى بەش Chapter Test	
311	تاقىكرىنەوئى كەلەكەبوو Cumulative Assessment	

يەكبەدوای يەكەكان و زنجیرهكان

Sequences and Series

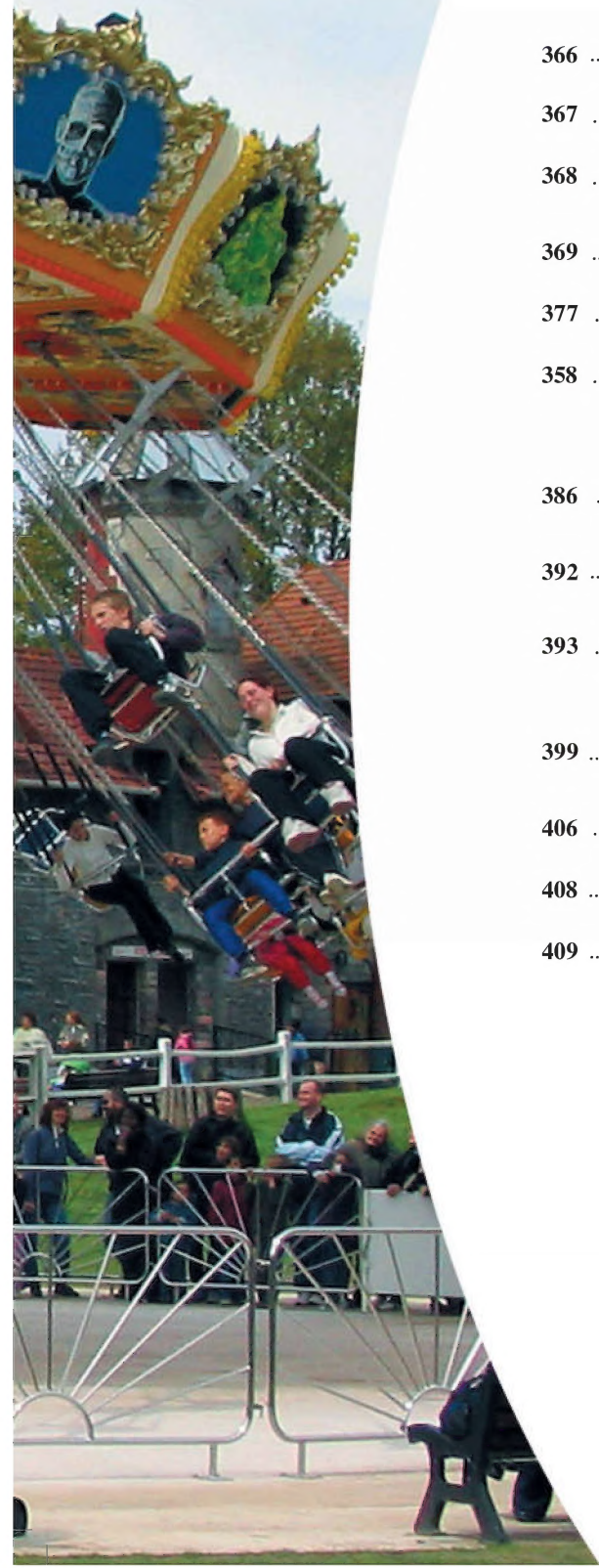
- 314 ئايا تۆ ئامادەيت؟ **Are You Ready?**
- 315 **Study Guide: Preview** رېبەرى خويىندىن: تېروانىن لەسەر بەشەكە
- 316 **Reading and Writing Math** بىركارى بە خويىندىنەو و نووسىن
- 317 Introduction to Sequences يەكەكان دەروازەك بۆ يەكبەدوای يەكەكان 1-6
- 324 Series زنجیرهكان 2-6
- 332 Arithmetic Sequences and Series يەكبەدوایيەك و زنجيره ژمارەيەكان 3-6
- 341 **Quiz (3-1)** (وانەكانى بەش) تاقىكرىنەوئە نيوئە بەش
- 342 Geometric Sequences and Series يەكبەدوایيەك و زنجيره ئەندازەيەكان 4-6
- 351 **تەكنۆلۇژيا: دۆزىنەوئە زنجيره ئەندازەيە دوا نەھاتوودەكان** **لاپەردە**
- 352 Mathematical Induction دەرنەجامى بىركارى 5-6
- 360 **Study Guide: Review** رېبەرى خويىندىن: پىداچوونەو
- 362 **Chapter Test** تاقىكرىنەوئە بەش
- 363 **Cumulative Assessment** تاقىكرىنەوئە كەلەكەبوو



سىگۇشەزانى

Trigonometry

- 366 ئايا تۆ ئامادەيت؟ **Are You Ready?**
- 367 **Study Guide: Preview** رېبەرى خويىندىن: تېروانىن لەسەر بەشەكە
- 368 **Reading and Writing Math** بىركارى بە خويىندىنەو و نووسىن
- 369 1-7 ياساى سايىن و ياساى كۆسايىن Law of Sine and Law of Cosine
- 377 2-7 نەخشە سىگۇشەيىەكان Trigonometric Functions
- 358 **تەكنۆلۇژيا: ھاۋئەنجامە سىگۇشەيىەكان بە پروونكرىدەۋىيى** لايىھە
- 3-7 ھاۋئەنجامە سىگۇشەيىە بنەرەتتەيەكان
- 386 Fundamental Trigonometric Identities
- 392 **تاقىكرىدەۋىيى نيوەى بەش (ۋانەكانى 3-1) Quiz**
- 393 4-7 ھاۋئەنجامەكانى سەرجهەم و جياۋازى Sum and Difference Identities
- 5-7 ھاۋئەنجامەكانى دوو ئەۋەندەى گۆشە و نيو ئەۋەندەى گۆشە
- 399 Double-Angle and Half-Angle Identities
- 406 **Study Guide: Review** رېبەرى خويىندىن: پىداچوونەو
- 408 **Chapter Test** تاقىكرىدەۋىيى بەش
- 409 **Cumulative Assessment** تاقىكرىدەۋىيى كەلەكەبوو



ئەندازە

Geometry

بەشى يەكەم

وانەكان

1-1 بۆشايى پۇتانهكان

لاپەرى تەكنۆلۇژيا

2-1 چەندلايەكان

3-1 گەورەكردن و بچووكردنەو

4-1 ئاراستەبېرەكان

تاقىكردنەو مى نوەى بەش

5-1 پووبەرى بازنەو چەندلاپېكەكان

6-1 ھەندىك لە ياسايەكانى بۆشايى

7-1 گۆ

8-1 كەرتە بازنەيىيەكان

تەنە زىرىنەكان

وېنەكە ژمارىيەك چوارلاى پوولەناو
يەكتر پوونەكەتەو دەتوانىت پووەكان
بەكاربېنىت بۆ دروستكردنى نموونە
چواريىەكان و تەنى ئەندازەيى تر.

ئايا تۆ ئامادەيت؟

✓ زاراۋەكان

ھەر زاراۋەيەك بەيپى پېئاسەكەي كەلەلاي چەيدا ھاتوۋە بېستەۋە.

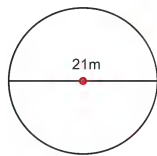
- | | |
|----------------|---|
| 1 لاتەرىب | ا دوورى دەۋرى بازىنەكە. |
| 2 نىۋەتيرە | ب رېژەي چىۋەي بازىنەكە بۇ تيرەكەي. |
| 3 پاي π | ج ھەموو لايەكانى جووتن. |
| 4 چىۋەي بازىنە | د دوورى نىۋان چەقى بازىنە ئەو خالەي دەكەۋىتە سەرى. |
| | ه چوارلايەكە ھەرلايەك لە لايەكانى بەلاي بەرامبەرى تەرىبە. |

✓ چىۋە و پوۋبەرى بازىنە

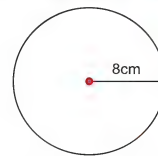
پوۋبەرو چىۋەي ھەرىكە لەم بازىنەكە بدۆزەۋە.



7



6



5

✓ ھەژماركىرنى دوورى و ديارىكىرنى ناۋەراستى پارچە راستەھىل

درېژى \overline{AB} و پوۋتانى ناۋەراستەكەي بدۆزەۋە.

- | | | |
|---------------------------|----------------------------|--------------------------|
| 10 $B(-3, 4)$ ، $A(0, 1)$ | 9 $B(2, -3)$ ، $A(-4, -4)$ | 8 $B(5, 6)$ ، $A(-3, 2)$ |
|---------------------------|----------------------------|--------------------------|

✓ بازىنە پوۋنكىرنەۋەيەكان

ئەم بازىنە پوۋنكىرنەۋەيەي بەرامبەر بەيپى تەمەنى

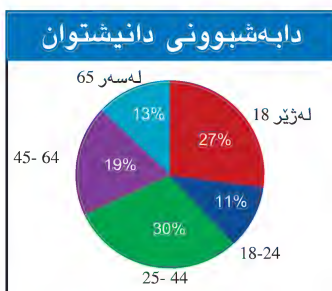
دانىشتوانى شارىك دەردەخات كە ژمارەيان ۴۰۰۰۰ كەسە.

11 ژمارەي ئەو دانىشتوانەي تەمەنىان لەنىۋان ۱۸ و ۲۴ سالدايە چەندە؟

12 ژمارەي ئەو دانىشتوانەي تەمەنىان لە ۱۸ سال كەمتەرە چەندە؟

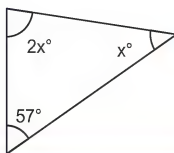
13 رېژەي سەدى ئەو دانىشتوانەي تەمەنىان ۴۴ سال زياترە چەندە؟

14 ژمارەي ئەو دانىشتوانەي تەمەنىان لە ۴۴ سال زياترە چەندە؟

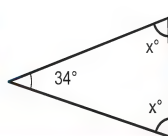


✓ كۆي پىۋانەي گۆشەكانى سىگۆشە

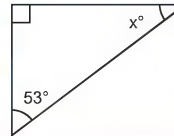
بەھاي x بدۆزەۋە.



18



17



16



15

رېبەرى خويندن: تېرپوانىن لەسەر بەشەكە

Vocabulary

زاراۋەكان

3D coordinate system	بۆشايى پۇتوان
convex	قۇقز
concave	قۇپاۋ
regular polygon	چەندلاي پىك
enlargement	گەۋرەكردن
compression	بىچۈكۈرۈش
vector	ئارپاستە بىر
apothem	ئەستۈندەك
center of the circle	چەقى بازى
center of a regular polygon	چەقى چەندلاي پىك
central angle	چەقەگۈشە
polyhedron	زۇر پۇر
arc length	درىژى كەۋانە
segment	پارچە بازىيى
sector	كەرتە بازىيى

پۇشنايىيەك لەسەر زاراۋەكان

بۇ ئەۋەى لەگەل ھەندىك لەم زاراۋانەدا راپىيى كە لەم بەشەدا ھاتوۋە ئەم ھەنگاۋانە پەيرەۋىكە:

1. پۇتەختى پۇتەكانت ناسى ئەم زانباريىە چۇن يارمەتت دىدات بۇ ناسىنەۋەى بۇشايى پۇتوان.
2. وشى رىك واتە پابەندىۋون بەسىستەمەۋە واتەى چەندلاي رىك لاى تۇ چى دىگەينىت؟
3. كاتىك پزىشك چاۋت دىكاتەۋە ئەۋا گلىنەكەى گەۋرەتر دىبىت شىۋەيەكى ئەندازەى گەۋرەكراۋى شىۋەيەكى ئەندازىيە، ماناى چىە؟
4. ھەندىك ئارپاستەبىر بە پارچە راسەھىلىكى نارسەكراۋ دىناسرىت، ئەم پىناسەيە بۇ تىگەيشتنى واتاى ئارپاستەبىر چۇن بەكاردەھىنىت؟
5. وشى ئەستۈندەنگ بوۋنى ئەستۈن دىبەخشىت نايالە پىناسەى ئەستۈندەگدا ئەۋە دىبىنىت؟
6. وشى پۇرەبىر چ دىگەينىت؟ بەراى تۇ پۇرەبىر گۇ چىيە؟
7. كەباسى شتىك دىكرىت چەقىيە واتە لە چەقەكەيدايە ئەۋە چۇن يارمەتت دىدات بۇ تىگەيشتن لە دىرپىنى چەقەگۈشە لەبازنەدا، لەچەندلايەكى پىكدا.

لە رابردوۋدا

ئەمانەت خويندوۋە

- پۇتەختى پۇتەكان.
- سىگۇشەكان و گۇشەكانيان.
- جىگۇرپكى ئەندازەيىەكان ۋەك راپىشان و خولانەۋە.
- پارچە راسەھىلەكان.
- ھەژماركردنى پۇرەبىر و چىۋەى بازى.
- ياساى دوۋرى و پۇتەكانى ناۋەراست لە پۇتەختى پۇتەكاندا.
- بەكارھىنانى بازى بۇ شىكاركردنى پىسارەكان.

لەم بەشەدا

ئەمانەت فېردەبىت

- بۇشايى پۇتەكان.
- چەندلايەكان و گۇشەكانيان.
- ئەۋ جىگۇرپكى ئەندازەيىەكى كە پۇۋانەكان دىگۇرپت.
- پارچە راسەھىلە ئارپاستەكراۋەكان يان ئارپاستەبىرەكان.
- چەندلايەكان و ھەژماركردنى پۇرەبىرەكانيان.
- ياساى دوۋرى و پۇتەكانى ناۋەراست لە بۇشايى پۇتەكاندا.
- پارچەكان و كەرتە بازىيەكان و ھەژماركردنى پۇرەبىرەكانيان و درىژى كەۋانە.

لە داھاتوۋدا

دەتوانىت كارامەيىيەكانى ئەم بەشە بەكاربىنىت بۇ:

- دامەزاندنى بىچىنەيەكى بەھىز بۇ خويندنى بال.
- تۇژىنەۋەى ئەۋ كارانەى پەيۋەندىيان بەۋ بابەتانەۋە ھەيە كە فېرىان دىبىت.
- شىكاركردنى ئەۋ پىسارەكانى پەيۋەندىيان بە ئەندازەى ناۋەخۇ و تەلارسازىيەۋە ھەيە.
- ھەژماركردنى دوۋرىيەكان و شۇقەكردنى ئەۋ زانباريىانەى لەرۇزنامە و گۇقارەكاندا دىت.
- لەژيانى پۇزەكاندا.

بىركارى

بە خويندەو

و نووسىن



ستراتېيەتى خويندەو: خويندەو بۇ شىكارکردنى پرسىار

كاتىك دەست بەخويندەو دەقى پرسىارىك دەكەيت بۇ شىكارکردنى، لەوانەيە ھەست بە نائومىدىيەك بکەيت بەرامبەر ئەو دەخويندەو کاتىك بەشە جىاجىاکانى پرسىارەكە لىك جىادەكەيتەو و دەيانخەيتە سەر زمانى بىرکارى بۇت دەردەكەوئىت پرسىارەكە ھاوشىوئى پرسىارەکانى پىشوتەرە کە شىکارت کردون.

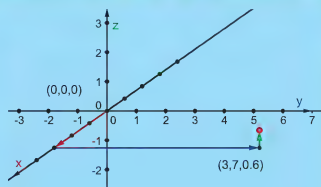
رېنمايەکانى خويندەو

- ✓ ھەر پستەيەك بەھىواشی بخويندەو، مەبەستى وشەکان
- ✓ وشەکان و پستەکان بۇ زمانى بىرکارى بگۆرە.
- ✓ تۆماربەگ و لە خويندەوئەكەت بەردەوامبە.
- ✓ ھىلکارىيەك بکىشە، ھىلکارىيەكە ناوینى بۇ ئەوئى پىت رابگەيەنئىت چى دەنوئىت.
- ✓ دووبارە پرسىارەكە بخويندەو پىش ئەوئى دەست بەشىکارەكەى بکەيت.

لەكۆتايى پۆژىكى سەيرانى سەر شاخىكدا تىمىكى سەيرانکەران چادرىکیان لەدوورى 3 km خۆرھەلاتى خالى دەرچون و 7 km باکور و لە بەرزايى 0.6 km ھەلدا دوورى نۆوان چادرگەکە و خالى دەرچون بدۆزەو.

ئەو رېنمايەکانى سەرەو بۇ تىگەيشتن لە پرسىارەکەى بەرامبەر بەکاربېنە.

ھىلکارى



ودرگىرانى دەق بۇ بىرکارى

دەكرىت خالى دەرچون بەخالى
بنەرەت $(0, 0, 0)$ دابنریت ھەرەك
دەكرىت چادرگەكە بەخالى $(3, 7, 0.6)$
بنوئىریت دەتوانىت دوورىيەكەى
بەبەكارھىنانى ياساى دوورى لە
بۆشايى پۆوتاندا ھەژماربەكەيت.

جىاكرنەوئى وشە كلىيەكان

لە كۆتايى پۆژىكى سەيرانى سەر
شاخىكدا تىمىكى سەيرانکەران
چادرىکیان لە دوورى 3 km خۆرھەلاتى
خالى دەرچون 7 km باکور لە بەرزايى
0.6 km ھەلدا، دوورى نۆوان چادرگەكە
و خالى دەرچون بدۆزەو.

ياساى دوورى لە بۆشايى پۆوتاندا بۇ ھەژمارکردنى دوورى $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$
نۆوان چادرگەكە و خالى دەرچون بەکاربېنە.
 $= \sqrt{(3-0)^2 + (7-0)^2 + (0.6-0)^2} \approx 7.6$
دوورى نۆوان چادرگەكە و خالى دەرچون برىتييە لە 7.6 km بەنزىكەيى.

ھەولبە

لەم پرسىارەى خوارەوئى رېنمايەکان بۇ خويندەوئى پرسىارەكە بەکاربېنە شىكارى مەكە.

- وشەکان دياربەكە - كلىيەكان.
- ھەر پستەيەك بۇ بىرکارى وەرگىرە.
- ھىلکارىيەك بکىشە پرسىارەكە بنوئىت.

1. بەرزى لولەكەك 4m و نيوەتيرەكەى 9m، دووھىندکردنى ھەريەك لەم پۆوانانە چ كارىگەرييەكى لەسەر قەبارەى لولەكەكە دەبىت؟

بۆشايى پۈتۈن

3D Coordinate system



بۆچى ئەمە فىردەبىن؟

لە پېشپىرېكىيەكدا دەتوانىت گەنجىيەكەت دەستكەوئىت، بەبەكارهئاننى سىستىمى پۈتۈنەكان لەسئ دوورىدا، يارمەتت دەتات تاشوئنى ئەو گەنجىيەكە لەسەر زەوى ديارىيەكەيت.

ئامانجەكان

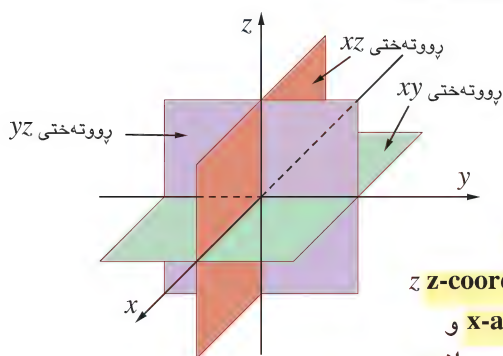
- خالەكان و ھاوكېشە
- ھېلىيەكان لە بۆشايى
- پۈتۈندا دەنۆئىت.

زاراۋەكان

Vocabulary

بۆشايى پۈتۈن
3D Coordinate system

تەۋەرى سىيەم
z-axis

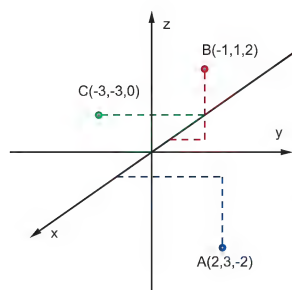


ھەرەك چۆن پۈتۈنەختى پۈتۈن پۈتۈنەختىكى ئاۋەلى سىستىمى پۈتۈنە، شوئىنى ھەر خالېك بەدوۋ ژمارە، كە پۈتۈننى يەكەمىيان x و دوۋەمىيان y ديارىدەكات كەۋابو بۆشايى پۈتۈن ئەو بۆشايىيەكە ئاۋەلى سىستىمى پۈتۈنەكانە و شوئىنى ھەر خالېك بەسئ ژمارە ديارىدەكرىت كە ئەمانەن تەۋەرى يەكەم x -coordinate

و تەۋەرى دوۋەم y -coordinate سىيەم z -coordinate دەبىت. بۆشايى پۈتۈن 3 تەۋەرى تېدايە تەۋەرى يەكەم x -axis و تەۋەرى دوۋەم y -axis و تەۋەرى سىيەم z -axis دەبىت ئەم تەۋەرانە بە پۈتۈنەختى پۈتۈن ديارىدەكرىت پۈتۈنەختى xy و پۈتۈنەختى yz و پۈتۈنەختى zx .

ديارىكرىنى خالەكان لە بۆشايى پۈتۈندا

ھەريەك لەم خالانە لەبۆشايى پۈتۈندا دابنى.



ا خالى $A(2, 3, -2)$

لەخالى بنەرەتەۋە دوۋەكە بەرەۋپېش لەسەر تەۋەرى يەكەم بچولئ پاشان 3 يەكە بۆلاى راست بەئاراستەى تەرىب بە تەۋەرى دوۋەم پاشان 2 يەكە بۆ خوارەۋە بەئاراستەى تەرىب بەتەۋەرى سىيەم.

ب خالى $B(-1, 1, 2)$

لەخالى بنەرەتەۋە يەك يەكە بۆ دواۋە لەسەر تەۋەرى يەكەم بچولئ، پاشان بۆلاى راست بەئاراستەى مۇجەب تەرىب بە تەۋەرى دوۋەم پاشان دوۋە يەكە بۆ سەرەۋە تەرىب بەتەۋەرى سىيەم.

ج خالى $C(-3, -3, 0)$

لەخالى بنەرەتەۋە 3 يەكە بۆ دواۋە لەسەر تەۋەرى يەكەم بچولئ پاشان 3 يەكە بۆلاى چەپ بەئاراستەى تەرىب بە تەۋەرى دوۋەم.

1. ئەم خالانە ديارىيەكە

خالى $F(0, 0, 3)$ ج

خالى $E(1, -3, 1)$ ب

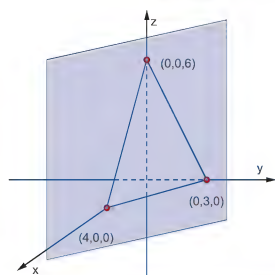
خالى $D(1, 3, -1)$ ا



بیرت بیتوه که هاوکیشی راسته هیل له پروتختی پوتاندا هاوکیشیه کی هیلییه وه
 $ax + by + c = 0$ به دوو گورای x و y هه موو خاله کانی (x, y) له پروتختی پوتاندا، پوتانه کانی
 پاسادانی ئەم هاوکیشیه هیلییه ده کهن. ههروهک چۆن هاوکیشیه پروتخت له بۆشایی پوتاندا
 هاوکیشیه کی هیلییه $ax + by + cz + d = 0$ به گوراهه کانی x و y و z هه موو خاله کانی (x, y, z) له
 بۆشایی پوتاندا پاسادانی ئەو هاوکیشیه هیلییه ده کات که پروتخته که پیکدینیت له بهرته وهی سی
 خال له پکی یه کترنه بن به سه بۆ پیکهینانی پروتخت له بۆشاییدا ئەو وینه یه کترپینه کانی
 پروتخته که خاوهنی هاوکیشیه $ax + by + cz + d = 0$ له گهل تهوهره کانی سی پوتانه کاند به سه بۆ
 نواندنی ئەو هاوکیشیه له بۆشایی پوتانه کاند.

نواندنی هاوکیشیه هیلی له بۆشایی پوتاندا

ئەم هاوکیشیه هیلییه له بۆشایی پوتاندا بنوینه $3x + 4y + 2z = 12$
 ههنگاوی 1 یه کترپینه کانی پروتخته که له گهل تهوهری پوتانه کاند بدۆزهوه.



له گهل تهوهری یه کهم: $x = 4 \quad 3x + 4 \times 0 + 2 \times 0 = 12$

له گهل تهوهری دووه: $y = 3 \quad 3 \times 0 + 4y + 2 \times 0 = 12$

له گهل تهوهری سییه: $z = 6 \quad 3 \times 0 + 4 \times 0 + 2z = 12$

ههنگاوی 2 وینه خاله کانی $(0, 0, 6)$ و $(0, 3, 0)$ و $(4, 0, 0)$
 دیارییهک پاشان ئەو پروتخته که بکیش بهو خالانه دا ده پوات.

نمونه 2

پارمهتی

بۆ ئەوهی یه کترپینی روتختیک
 له گهل یه کیک له تهوهره کاند
 بدۆزیتوه له جیاتی پوتانی دوو
 تهوهره کانی تر 5 دابنی و
 هاوکیشیه که شیکاریه.

2. هاوکیشیه هیلی $x - 4y + 2z = 4$ له بۆشایی پوتاندا بنوینه.



جیبه جیکردن له تهکنه لوجیا

له یارییه باوه کانی بژمیر یاری نواندنی دهوهره کانه (ادوار)، هه یاریکه ریک تیایدا شارستانییه تیک
 دروست ده کات، له سه رتادا هه یاریکه ریک 100 پارچه زیر بۆ کرینی پیدایستییه کان ده دات
 له دوایدا یاریکه ره کان پشپکری له سه ره هیشتنه وهی شارستانییه تییه کان به زیندوووی ده کهن له
 یاسا کانی یارییه که دا هاتوه، نرخ یه که یه کی خواردن دوو پارچه زیره و نرخ یه که یه کی
 تهخته 3 پارچه زیره و نرخ یه که یه کی بهرد 5 پارچه زیره.

ا. هاوکیشیه کی هیلی به سی گوراهه بنوینیت.

هیما f بۆ بری خواردن و w بۆ بری تهخته و s بۆ بری بهرد به کاربینه.

100 پارچه زیره	=	نرخ یه کی خواردن	+	نرخ یه کی تهخته	+	نرخ یه کی بهرد
100	=	$2f$	+	$3w$	+	$5s$

ب. خشته بهرام بهر به کاربینه بۆ دیاریکردنی بری ئەو بهردهی که هه یاریکه ریک دهیکریت

یاریکه	بری خواردن	بری تهخته	بری بهرد
دانا	20	10	
زانا	15	15	
خه سه ره	40	5	
پش سه ره	25	10	

دانا $s = 6 \quad 2(20) + 3(10) + 5s = 100$
 زانا $s = 5 \quad 2(15) + 3(15) + 5s = 100$
 خه سه ره $s = 1 \quad 2(40) + 3(5) + 5s = 100$
 پش سه ره $s = 4 \quad 2(25) + 3(10) + 5s = 100$
 دانا ده توانیت 6 یه که بهرد بکریت که چی زانا

ده توانیت 5 یه که و خه سه ره یه که و پش سه ره 4 یه که بکریت.

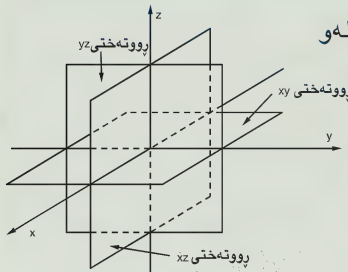


ئازاد برپاریدا لەکۆتایی پشوری هەفتەدا گەشتێک بەپێ ئەنجام بدات لە
خۆئامادەکردندا بۆ گەشتەکەى ئەم شتانەى کرى، چرایەك بە 3 500 دینار و چەند
کولێرەيەك نرخى ھەریەكەیان 1 500 دیناربوو، چەند شووشە ئاوێك نرخى
ھەریەكەیان 750 دینار بوو. ئازاد 60 500 دینارى بۆ کرىنى ئەو شتانەدا.

ا) ھاوکیشەيەکی ھێلى بەسى گۆراو بنوسە، بارەكە بنوینیت.

ب) ئازاد 4 چراو 24 شووشە ئاوی کرى، چەند کولێرەى کړیو؟

بیرکەو و توتویکە



1. وای دابنێ کە خالی بنەرەت لەبۆشایی پۆتاندا لەبەردەمتدایە لەو
شوێنەى تێیدا وەستاوی لەخوارووی گۆشەى لاى چەپى ژووری
پۆلەکەت. وای دابنێ درێژى یەكەى پۆوانە لەسەر تەوهرى
پۆوتانەکان یەك پێیە. پۆوتانى جیگای سەرت بخەملێنە.
2. باسى پووتەختێك بکە تەنھا دوویەکتربپینی لەگەڵ تەوهرى
پۆوتانەکاندا ھەبێت.
3. ریکخەریە ئەم ھێلکارییە بەرامبەر بنوسەو پاشان تەواوی
بکە ھەریەكە لە تەوهر و پووتەخت و خالەكەى ناوینى.



1-1 راهینانەکان

راھینانی ئاراستەکراو

1 زاراوەکان جیاوازی نیوان پووتەختی پۆتان و بۆشایی پۆتان پروونبکەو.

ھەریەكە لەم خالانە لە بۆشایی پۆتاندا بنوینە.

5 $(-1, 2, 4)$

4 $(1, 4, 5)$

3 $(0, 0, 2)$

2 $(-3, -2, 1)$

ھەر ھاوکیشەيەك لەبۆشایی پۆتاندا بنوینە.

8 $1.5x + 3y - 2z = -6$

7 $5x - 2y - 4z = 10$

6 $x + y + z = 3$

9 ھەنگاوی جۆراوجۆر گەورەترین بارى بارھەلگری کۆمپانیای

دابەشکردنى نیشتمانی یەك تەنە کیشی بەستینەرێك 75 kg
و کیشی قاپشۆرێك 50 kg و کیشی کوورەيەك 100 kg .

ا) ھاوکیشەيەك بەسى گۆراو بنوسە بارەكە بنوینیت.

ب) ئەو خشتەيە تەواویكە ژمارەى ھەرچۆرێك لەم سى

ئامپیرانەى بارھەلگرەك دەیانگۆیژیتەو پرووندەكاتەو.

ج) خەملاندن گەورەترین ژمارەى ئەو ئامپیرانەى بارھەلگرەك دەیانگۆیژیتەو بخەملێنە.



برپوانە نموونە 1

برپوانە نموونە 2

برپوانە نموونە 3

جىبەجىكرىدەنەكان

راھىيىتى ئازاد

شىكارى	تەماشى
راھىيىتى	نەمۇنە
1	17-10
2	23-18
3	24

شۈيىنى ھەرخالىك لى بۆشايى پۈتۈندە دىيارىبەكە.

- 10 (2, -4, 3) 11 (-1, 1, 4) 12 (3, 0, 0) 13 (1, -2, 0)
14 (-3, -3, -3) 15 (5, 0, 2) 16 (0, -3, 2) 17 (-4, -1, 1)

ھەر ھاۋكىشەيەك لى بۆشايى پۈتۈندە بنوئىتە.

- 18 $x + y - z = -1$ 19 $2x - y + 2z = 4$ 20 $x + \frac{1}{2}y + z = -2$
21 $5x + y - z = -5$ 22 $8x + 6y + 4z = 24$ 23 $3x - 3y + 2.5z = 7.5$

24 گۈلە ماسىيەكان ھەق 80 000 دىنارى ھەيە ماسى پىدەكرىت تا بىخاتە گۈلى

ماسىيەو. نرخی سوورە ماسى 10 000 دىنار و پەشەكەيان 15 000 دىنار و خۇلەمىشەكەي 2 500 دىنار.

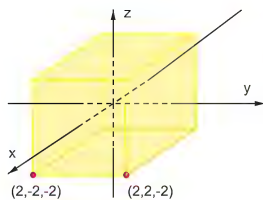
سۈر	رەش	خۇلەمىشى
2	2	
	1	10
3		2
5	1	

ا ھاۋكىشەيەك بەسى گۈراۋ بنوسە بارەكە بنوئىتە.

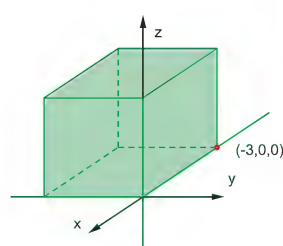
ب ئەو خىشەيە تەۋابىكە ژمارەي ئەو ماسىيەكان دىنۇئىتە كە ھەق ۋەتەنۇئىتە بىيانكرىت.

25 وەرەش بۇ يارىكەرى تۈپى سەبەتە بەپىي سى جۈر ھەلەدان بۇ گۈلكرىدەن خال تۈمەردەكرىت، ھەلەدان بەخالىك ھەلەدانى سەربەخۇ و ھەلەدان بە دوو خال و ھەلەدان بەسى خال، يەككە لى يارىكەرەكان 60 خالى تۈمەركىد 20 لەۋانەيە ھەلەدانى يەك خالىيە. ژمارەي ھەلەدانەكان كە لەدو جۈرەكەي تر دەگونجىت بدۇزەو.

ئەندازە خالى سەردەكانى ھەيەك لەم شەشپالۋانە دىيارىبەكە.



27



26

28 تەلارسازى ئەندازىياريك 8 مليۇن دىنارى بۇ

كاشىكرىدى ھۆلۈك تەرخانكرىد كە 2 000 كاشى دەگرىت برپارىدا 3 جۈر كاشى تەختەو سىرامىك و بەرد تاقىبكەتەو. 400 كاشى سىرامىكى كرى، ئايا ئەندازىارەكە دىنۇئىتە ئەو زەۋيەي لە ھۆلەكە ماۋەتەو بەيەكسانى لەنۇۋان تەختەو بەرددا پىي كاشى بىكات؟ ۋەلەمەكەت پوۋنېكەو.

نرخی كاشىيەكان (كرى دەست)

مۇزايىك: 1 500 دىنار
بەرد: 2 000 دىنار
سىرامىك: 4 000 دىنار
تەختە: 6 000 دىنار

29 بىركىرەنەۋەي پەخنەگرانە ئايا جۈلەي سەر پاستەھىلۈك پۇششتن و گەرانەۋە،

جۈلەي دوورى دوۋانەيى دىنۇئىتە ۋەلەمەكەت پوۋنېكەو.

30 بنووسە ھاۋرىيەكت بە تەلەفۇن پەيۋەندى پۈۋەكرىدى داۋاي لىكرىدى چۈن بۆشايى

پۈتۈنەكان دەكىشرىت؟ چۈن ئەۋەي بۇ باس دەكەيت؟

31 ئەندازىارەكان بۆشايى پۈتۈن بۇ نەخشەكىشەنى پۈرۈش ئۇ بىنايانى دروستىدەكەن بەكاردىن. ئەندازىارەكان گۈلچىكى لەخالى (7, 12, 10) دا دانا لەنەخشەكەدا زەوى تەلارەكە بە پۈتەختى xy دەنۇنرەت، ھەرچەندە يەكەنى پۈتۈنەنى دوو تەۋەرى يەكەم و دوۋەم بەپى دەنۇنرەت.

ا ئەندازىارەكە دوگۈلچى تى ھەلۋاسى ھەرىكەيان 4 پى لە گۈلچى يەكەم دوۋرەت يەكەمىان بەناراستەنى مۇجەبى تەۋەرى يەكەم و دوۋەمىان بەناراستەنى مۇجەبى تەۋەرى دوۋەم بىت. پۈتۈنەنى خالى ھەلۋاسىنى ھەرىكە لەو دوو گۈلچە چەندە؟

ب ئەگەر شوپىنى ھەرىكە لەو دوو گۈلچە پىيەك و نىو لەژىر خالى جىگىرىۋوندا بىت.

ج ئەندازىارەكە بىرپارىدا زەوى بىناكە 4 پى بەرىزىكەتەۋە. پۈتۈنەنى نوپى گۈلچى يەكەمىار كامەيە؟

32 **ھەلە لە شىكاردا** لەخوارەۋە دوو رىگا بۇ ھەرژماركردنى يەكتىرپىنى پۈتەختى $-5x + 3z = 15$ لەگەل تەۋەرى يەكەمدا ھەيە، پىگى ھەلە دىارىبەكە.

$-5x + 3z = 15$
$-5 \times 0 + 3z = 15$
$3z = 15$
$z = 5$

$-5x + 3z = 15$
$-5x + 3 \times 0 = 15$
$-5x = 15$
$x = -3$

نامادەكردن بۇ تاقىكرەنەۋە

33 كام خال بە 5 يەكە دەكەۋىتە دۋى خالى (1, 1, 4) ھۈە؟

- (ا) (-4, 1, 4) (ب) (1, -4, 9) (ج) (2, 3, 6) (د) (6, 6, 9)

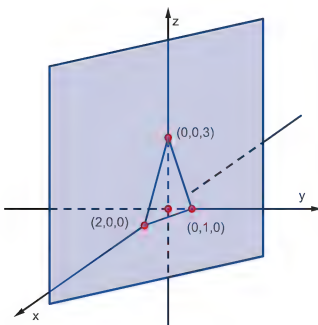
34 كام ھاۋكىشەيە ۋىنەنى بەرامبەر دەنۇنرەت؟

(ا) $x + 2y + 3z = 6$

(ب) $2x + y + 3z = 6$

(ج) $3x + 6y + 2z = 6$

(د) $6x + 3y + 2z = 6$



35 كام خال يەكتىرپىنى پۈتەختى $2x - 4y + 3z = -12$ لەگەل تەۋەرى دوۋەم پىكەدەھىنەت؟

(ا) (0, -3, 0)

(ب) (0, 0, -3)

(ج) (0, 3, 0)

(د) (0, 0, 3)

36 يەكتىرپىنى پۈتەختى $5x - 2y - 4z = -3$ لەگەل تەۋەرى سىيەم بدۈزەۋە.

بەرەنگارى و فراوانکردن

كانىك ھاوكىشەى ھىلى تەنھا دووگۇراوى تىدەدەيت لە تەودرى پۇوتانەكاندا ئەوا بە پروتەختىكى تەرىب بەيەكىك لە تەودرى پۇوتانەكان دەنويىرىت. ھەريەكە لەم ھاوكىشانە لە بۇشايدا بنويىنە.

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 1 \quad 40 \quad x + z = 3 \quad 39 \quad y - 2z = 4 \quad 38 \quad x + y = 2 \quad 37$$

ھاوكىشەيەك بۇ پروتەختىك بنووسە بەزانىنى يەكتىرپىنەكانى لەگەل تەودرىكانى پۇوتان.

لەگەل تەودرى يەكەم	لەگەل تەودرى دووهم	لەگەل تەودرى سىيەم
4	2	-1
25	50	10

41

42

پىداچوونەودى لولپىچى

ناوى ئەو تەنە ئەندازەيە ديارىكە كە ژمارەى لايەكان و سەرەكانى زانراو (پۇلەكانى پىشو).

$$5 \text{ سەرو } 8 \text{ لا} \quad 43 \quad 6 \text{ سەرو } 9 \text{ لا} \quad 44 \quad \text{بى سەرو بى لا} \quad 45$$

46 **كۆكردنەودى پىتاك** يانەى ھاوكارى گەشتىكى پاسكىل سوارى رىكخست بەدرىزايى 1920 km . بەشاربووان پۇژى 120 km يان برى، گەشتەكەيان چەند پۇژى خاياند؟ (پۇلەكانى پىشو)

ھەريەكە لەم سىستمە ھىلىيانە شىكارىكە (پۇلەكانى پىشو).

$$\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x - 3y = 9 \end{cases} \quad 49 \quad \begin{cases} 6x - y = 5 \\ 4y - 3x = 1 \end{cases} \quad 48 \quad \begin{cases} 5y = x \\ \frac{2}{5}x + 7y = 18 \end{cases} \quad 47$$

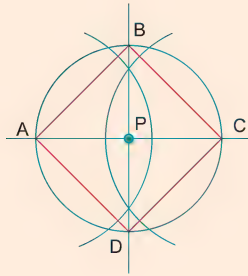
دروستکردنی چەندلا ریکەکان

Constructing regular polygons



لەم چالاکییدا فیۆری دروستکردنی چەندلا ریکەکان دەبێت بە بەکارهێنانی ئەو بازەنەیی دەوری داوێ.

چالاکى 1

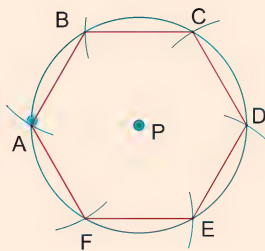


- 1 بازەنەیکە بکێشە چەقەکەى P بێت پاشان تیرەى \overline{AC} بکێشە.
- 2 تەوهرەى تیرەى بازەنەکە \overline{AC} دیاریبکە و خالەکانى یەکتەربرینی لەگەڵ بازەنەکەدا بە B و D ناوین.
- 3 هەریەکە لە \overline{AB} و \overline{BC} و \overline{CD} و \overline{DA} بکێشە بەمەش چوارلایەکی یەکسانت دەستدەکەوێت گۆشەکانیشی یەکسان دەبن ئەوێش چەندلایەکی ریکە لە 4 لاییکەتووه (چوارگۆشەیه).

هەولبەدە

- 1 رێگایەکی تر بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی چەندلایەکی ریکە لە 4 لاییکەتەبێت.
- 2 سەرەکانى چوارلای ریکە دەکەوێت سەر هەمان بازەنە، پەيوەندى نۆوان چوارلا و بازەنە چیه؟
- 3 هەشتلای ریکە ئەو هەشتلایە کە لایەکان و گۆشەکانى جووتن (یەکسانن) بەبەکارهێنانى لەتکەرى گۆشەکانى ئەو چوارلایەى لە چالاکى 1 دا دروست کرد هەشتلایەکی ریکە بکێشە.

چالاکى 2



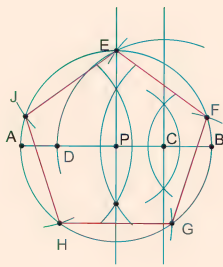
- 1 بازەنەیکە بکێشە چەقەکەى P بێت، خالێ A لەسەر چۆهەکەى دیاریبکە.
- 2 پەرگالەکە بەکراوێى بگرە، لەخالێ A یەوێ چەند خالێک کە لەدووریدا یەکسان بن لەسەر بازەنەکە دیاریبکە خالەکان بە B و C و D و E و F ناوین.
- 3 \overline{AB} و \overline{BC} و \overline{CD} و \overline{DE} و \overline{EF} و \overline{FA} بکێشە شەشلایهکی لایەکسانت دەستدەکەوێت کە گۆشەکانیشی یەکسانن. ئەوێ شەشلایهکی ریکە.

هەولبەدە

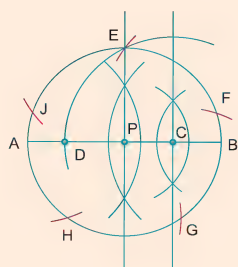
- 4 بەچیدا دەزانی $ABCDEF$ شەشلایهکی ریکە (رێنما: تیرەکانى \overline{AD} و \overline{BE} و \overline{CF} بکێشە ئەو سێگۆشەنەى بەدەستت هێناون چ جوړیکن؟
- 5 دوازدەلای ریکە: چەند لایەکە لە 12 و 12 گۆشەى یەکسان پیکدیت بۆ دروستکردنی دوازدەلای ریکە شەشلایهکی ریکە بەکاربێنە رێگاکی پرونکەوێ.

چالاکى 3

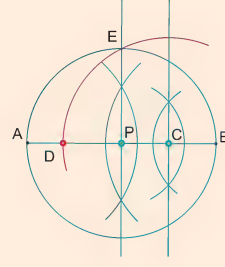
- 1 بازىنىڭ بېكىشە چەقەكە P بىت پاشان تىرە AB بېكىشە.
- 2 تەۋەرى AB دىارىپكە ويەككە لەدوۋ خالى يەكتىرپىنى تەۋەرەكە و بازىنىڭ ناۋىنى E .
- 3 ناۋەرەستى PB دىارىپكە و ناۋىنى C .
- 4 پرگالەكەت ئەۋەندە CE بىكەۋە. سەرى پرگالەكە لەسەر C دابىنى كەۋانەيەك بېكىشە AB لە خالىدا دەپرىت ناۋى بىنى D .
- 5 پرگالەكەت ئەۋەندە ED بىكەۋە لەخالى E يەۋە دەرچۆ و چەند خالىك دوۋرى نىۋانىان يەكسان بىت دىارىپكە خالەكان بە F و G و H و J ناۋىنى.
- 6 EF و FG و HJ و JE بېكىشە پىنجلا رېككىت دەستەكەۋىت كە گۆشەكانىشى يەكسان. ئەۋەش پىنجلا رېكە.



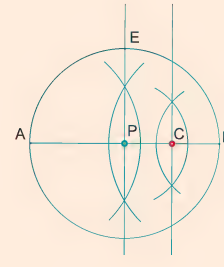
هەنگاۋى 6



هەنگاۋى 5



هەنگاۋى 4



هەنگاۋەكان 1 تا 3

هەۋلېدە

- 6 دەلای رېك: چەندلايەكە لە 10 لا و 10 گۆشە يەكسان پېككىت بەبەكارهينانى پىنجلاي رېك دەلايەكى رېك دروستبەكە رېگاكت پوونبەكەۋە.
- 7 پىۋانەي ھەموو گۆشەكانى ئەۋ چەندلا رېكانە ھەژماربەكە كە لە چالاکى 1 تا 3 دا دروست كر دوۋن پاشان ئەم خشتەيە تەۋابەكە.

چەندلا رېكەكان				
6	5	4	3	ژمارەى لايەكان
			60°	پىۋانەي ھەرگۆشەيەك
			180°	كۆي پىۋانەي گۆشەكان

- 8 دەستەۋازەيەك بنووسە رېسايەكى گشتى بۆ دۆزىنەۋەي كۆي گۆشەكانى ناۋەۋەي چەندلايەكى رېك ژمارەى لايەكانى n بىت.
- 9 دەستەۋازەيەك بنووسە رېسايەكى گشتى بۆ دۆزىنەۋەي پىۋانەي ھەريەكە لەگۆشەكانى ناۋەۋەي چەندلايەكى رېك ژمارەى لايەكانى n بىت.

چەندلايەكان

Polygons

2-1



بۆچی ئەمە فیردەبین؟

رونایک لەدەرچەى ئامیڤى وینەگرتنەووە که کۆمەڵە تیغیکی تێدایە لەهاوینەکەیهووە دەچیتە ژوورەووە، بەجۆرى کەشیوێى چەند لایەک وەرەگریت (بڕوانە نمونە 5)

ئامانجەكان

- پۆلینکردنى چەندلايەكان بەپێى ژمارەى لایەكان و پێوانەى گۆشەكانى
- دۆزینەوێى پێوانەى گۆشەكانى ناووەو دەرەوێى چەندلايەكان و بەکارهێنانیان

زاراوەكان

Vocabulary

لای چەندلا
Side of a polygon

سەرى چەندلا
Vertex of a polygon

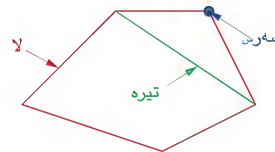
تیرە
Diagonal

چەندلاى رێك
Regular polygon

قۆپاو
Concave

قۆقز
Convex

لەبیرت بێت چەندلا شیوێهەکی ئەندازەیی داخراو لە پروتەختێکدا، لە 3 پارچە راستەهێل یان زیاتر پێکدێت کە دوو پارچەیان لەپێکی یەکتەری نەبن، بەجۆرى کە هەر پارچە راستەهێلێک لەگەڵ تەنها دوو پارچەى تردا یەکتەر دەبێن، یەك دانە لەهەریەك لە لایەكان هەر پارچە راستەهێلێک لەوانە لایەکی Side چەندلايەكە. هەرسەریکی هاوێش لەنیوان دوولادا سەریکی Vertex چەندلايەكە. ئەو پارچە راستەهێلەى دووسەرى ناهاوسى لەسەرەكانى چەندلايەك بەیەك دەگەینیت تیرە Diagonal



ژمارەى لا	ناو
3	سێگۆشە
4	چوارلا
5	پێنجلا
6	شەشلا
7	هەوتلا
8	هەشتلا
9	نۆلا
10	دەلا
11	یازدەلا
12	دوازدەلا

دەتوانین چەندلا بەپێى ژمارەى لایەكانى ناو بنێن. ئەو خشتەیه هەندێك لەو ناوانە پروندەكەتەووە بۆیه چەندلاى ABCDE سەرەو پێنجلايە.

نمونە 1 جیاکردنەوێى چەندلايەكان

دیاریبکە ئەم شیوانەى خوارەو چەندلان یان نا ئەگەر چەند لا بوو ناوینى.



چەندلايە، هەشتلايە

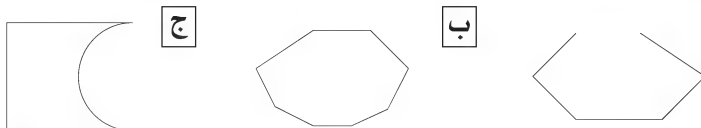
چەندلانییه

چەندلايە، پێنجلايە

لەبیرت بێت

چەندلا شیوێهەکی ئەندازەیی داخراو لە پروتەختدا لەسێ پارچە راستەهێل یان زیاتر پێکدێت کە تەنها لە سەرەكانیدا یەکتەرى دەبێن.

1. دیاریبکە ئەم شیوانە چەندلان یان نا، ئەگەر چەند لا بوو ناوینى.



چەندلاى رێك Regular polygon چەندلايەكە هەموو لایەكانى (لە درێژیدا یەكسانن) گۆشەكانیشى جوتەن (هەمان پێوانەیان هەیه).

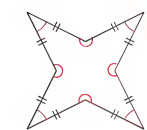


چەندلاى قۇپاو Concave چەندلايەكە بەلايەنى كەمەو تيرەيەكى
 ھەيەكە ھەندىك لەخالەكانى لەدەرەوھى چەندلايەكەدان.
چەندلاى قۇقز Convex چەندلايەكە ھەموو تيرەكانى
 لەناوچەندلايەكەدان چەندلاى رېك ھەميشە قۇقزە.

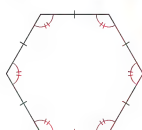
نمونه 2

پۆلىنكردى چەندلايەكان

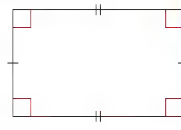
دياريبەكە ئەم چەندلايانە رېكن يان نا قۇقز يان قۇپاون.



نارېكە، قۇپاوه

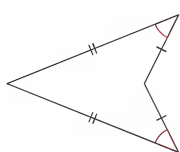


رېكە، قۇقزە

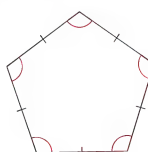


نارېكە، قۇقزە

2. دياريبەكە ئەم چەندلايانە رېكن يان نا، قۇقز يان قۇپاون.



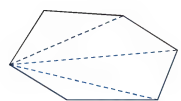
ب



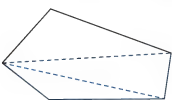
ا



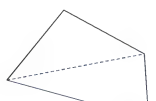
بۇ ئەوھى كۆى پېوانەى گۆشەكانى ناوھوى چەندلايەكى قۇقز بدۆزىتەو ھەموو تيرەكانى لەسەرېك
 لەسەرەكانىو ېكېشە بەمەش ژمارەيەك سېگۆشەت دەستدەكەوېت، كۆى پېوانەى گۆشەكانى ناوھوى
 چەندلايەكە برىتييە لە كۆى پېوانەى گۆشەكانى ناوھوى ھەموو سېگۆشەكان.



شەشلا



پېنجلا



چوارلا



سېگۆشە

لەبىرت بىت

بەپېى سەلمېنراوى كۆى
 پېوانەى گۆشەكانى
 ناوھوى سېگۆشە ئەو
 سەرجمە 180 پلەيە.

چەندلا	ژمارەى لايەكان	ژمارەى سېگۆشەكان	كۆى پېوانەى گۆشەكانى ناوھوى
سېگۆشە	3	1	$(1) \times 180^\circ = 180^\circ$
چوارلا	4	2	$(2) \times 180^\circ = 360^\circ$
پېنجلا	5	3	$(3) \times 180^\circ = 540^\circ$
شەشلا	6	4	$(4) \times 180^\circ = 720^\circ$
چەندلاى n لا	n	n-2	$(n-2) \times 180^\circ$

لەھەرەكە لەو چەندلايانە دەرەكەوېت ژمارەى ئەو سېگۆشەكانى لە كېشەنى تيرەكان لەسەرېكى
 چەندلايەكەو ەپەدادەبىت 2 ى كەمترە لە ژمارەى لايەكان n لەمەشەو دەرەكەوېت كە كۆى پېوانەى
 گۆشەكانى سېگۆشەكان برىتييە لە $(n-2) \times 180^\circ$

سەلمېنراوى 1-1 كۆى پېوانەى گۆشەكانى ناوھوى چەندلا

كۆى پېوانەكانى گۆشەكانى ناوھوى چەندلاى قۇقز كە n لاي ھەبىت برىتييە لە
 $(n-2) \times 180^\circ$



نمونە 3

دۆزىنەۋە پېۋانە گۆشەكانى ناۋەۋە چەندلاۋ دۆزىنەۋە سەرجمەكانيان

ا كۆى پېۋانە گۆشەكانى ناۋەۋە ھەشتلا بدۆزەۋە.

$$(n-2) \times 180^\circ \quad \text{سەلمېنراۋى كۆى پېۋانە گۆشەكانى ناۋەۋە چەندلا}$$

$$(8-2) \times 180^\circ \quad \text{لەجياتى } n \text{ بەھاكەى دادەنېين.}$$

$$1080^\circ$$

ب پېۋانە ھەرىكە لەگۆشەكانى ناۋەۋە نۆلەيەكى پېك بدۆزەۋە.

ھەنگاۋى 1 كۆى پېۋانە گۆشەكانى ناۋەۋە نۆلەپېكەكە بدۆزەۋە.

$$(n-2) \times 180^\circ \quad \text{سەلمېنراۋى كۆى پېۋانە گۆشەكانى ناۋەۋە چەندلا}$$

$$(9-2) \times 180^\circ = 1260^\circ \quad \text{لەجياتى } n \text{ بەھاكەى دەدەنېين.}$$

ھەنگاۋى 2 پېۋانە يەك گۆشەكانى ناۋەۋە بدۆزەۋە.

$$\frac{1260^\circ}{9} = 140^\circ \quad \text{كۆى پېۋانەكان دابەشى 9 بكة چۈنكە ھەمووگۆشەكان جوتن.}$$

ج پېۋانە ھەرىكە لەگۆشەكانى ناۋەۋە چارالاي بەرامبەر بدۆزەۋە.

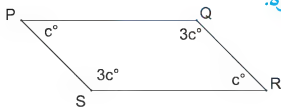
$$(4-2) \times 180^\circ = 360^\circ \quad \text{سەلمېنراۋى كۆى پېۋانە گۆشەكانى ناۋەۋە چەندلا}$$

$$m\hat{P} + m\hat{Q} + m\hat{R} + m\hat{S} = 360^\circ \quad \text{لەجياتى دابنى.}$$

$$c + 3c + c + 3c = 360 \quad \text{راپە لەيەكچۈۋەكان كۆيكەۋە.}$$

$$8c = 360 \quad \text{ھەردوۋلا دابەشى 8 بكة.}$$

$$c = 45$$



$$m\hat{P} = m\hat{R} = 45^\circ$$

$$m\hat{Q} = m\hat{S} = 3(45^\circ) = 135^\circ$$

* تېيىنى

مەبەست لە پىتى m لىردە
بەماناي پېۋانە دىت ۋەك
بلىين:

$$\text{measure of angle } P = m\hat{P}$$

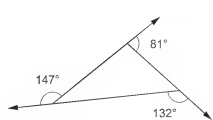
پ ج = پېۋانە گۆشە ج

3. ا كۆى پېۋانە گۆشەكانى ناۋەۋە 15 لايەك بدۆزەۋە.

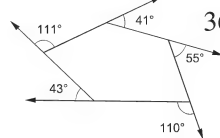
ب پېۋانە ھەرىكە لە گۆشەكانى ناۋەۋە دەلەيەكى پېك بدۆزەۋە.



ھەرىكە لە گۆشەكانى دەرەۋە ئەم دوو چەندلايە خوارۋە پېۋراۋە. سەرنج بدە كۆى پېۋانە



$$147^\circ + 81^\circ + 132^\circ = 360^\circ$$



$$43^\circ + 111^\circ + 41^\circ + 55^\circ + 110^\circ = 360^\circ$$

لەبېرت بېت

دەرەگۆشە سېگۆشە ئەو
گۆشەيە دەكەۋىتە نېۋان
يەككە لە لايەكان و
درېژكراۋە لا ھاۋسىيەكەى

سەلمېنراۋى 2-1 كۆى پېۋانە گۆشەكانى دەرەۋە چەندلا

كۆى پېۋانە گۆشەكانى دەرەۋە چەندلاى قۇقز 360° يە.

قىريە



دۆزىنەۋە كۆى پېۋانە گۆشەكانى دەرەۋە چەندلا و دۆزىنەۋە سەرجمەكانيان

نمونە 4

ا پېۋانە ھەرىكە لە گۆشەكانى دەرەۋە شەشلايەكى پېك بدۆزەۋە.

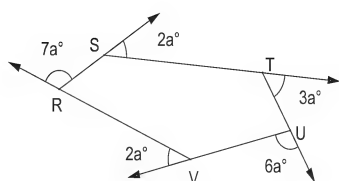
شەشلا 6 لاۋ 6 سەرى ھەيە.

كۆى پېۋانە گۆشەكانى دەرەۋە 360° سەلمېنراۋى كۆى پېۋانە گۆشەكانى

دەرەۋە چەندلا

پېۋانە ھەر گۆشەيەكى دەرەۋە $\frac{360^\circ}{6}$ يان 60° دابەشى 6 كراۋە چۈنكە 6 گۆشەكى دەرەۋە يەكسانى ھەيە.

پېۋانە ھەر گۆشەيەكى دەرەۋە شەشلا پېكەكە 60°



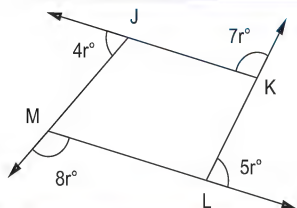
ب بهای a له پینج لای بهرامبهردا بدۆزهوه.

$$7a^\circ + 2a^\circ + 3a^\circ + 6a^\circ + 2a^\circ = 360^\circ$$

$$20a = 360$$

$$a = 18$$

سهلمینراوی کۆی پیوانه‌ی گۆشه‌کانی ناوه‌وی چه‌ندلا
پاده‌له‌یه‌کچوو‌ه‌کان کۆکراوه‌ته‌وه
هه‌ردوولا دابه‌شی 20 بکه.



ا 4. پیوانه‌ی هه‌ریه‌که له گۆشه‌کانی ده‌ره‌وی

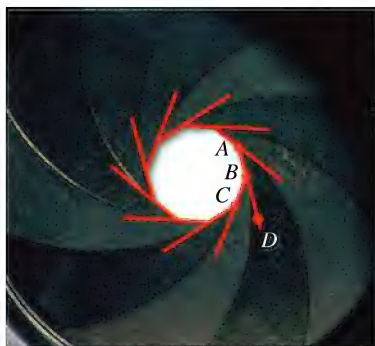
دوازه‌لایه‌کی رێک چه‌نده؟

ب بهای r له‌چه‌ندلا ی بهرامبهردا بدۆزهوه.



5 نمونه

جیبه‌جیکردن له وینه‌گرتندا



کراوه‌ی نامی‌ری وینه‌گرتن (کامی‌را) له 10 تیغ
پیکهاتوو. تیغه‌کان به‌شیوه‌یه‌که له‌سه‌ریه‌که دادنه‌ریت
که ده‌لایه‌کی رێک پیکه‌بینیت پیوانه‌ی \widehat{CBD} چه‌نده؟

\widehat{CBD} گۆشه‌یه‌کی ده‌ره‌وی ده‌لایه‌کی رێکه، کۆی
پیوانه‌ی گۆشه‌کانی ده‌ره‌وی چه‌ندلا ی رێک 360° به‌پیی
سهلمینراوی کۆی پیوانه‌ی گۆشه‌کانی ده‌ره‌وی چه‌ندلا
که‌واته

$$m \widehat{CBD} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

ده‌لای رێک 10 گۆشه‌ی ده‌ره‌وی یه‌کسانی هه‌یه
بۆیه 360 دابه‌شی 10 بکه

5. چی ده‌بی‌ت نه‌گه‌ر وای دابنی ژماره‌ی تیغه‌کان 8 بی‌ت له‌جیات 10

پیوانه‌ی هه‌ریه‌که له‌گۆشه‌کانی ده‌ره‌وی چه‌ند ده‌بی‌ت؟



بیربکه‌وه و تاوتویبکه

1. وینه‌ی پینج‌لایه‌کی قۆقز و پینج‌لایه‌کی قۆپاوبکه، جیاوازی نیوان هه‌ردوو چه‌ندلاکه روونبکه‌وه.
2. چ هۆیه‌که رێگه‌ له‌ به‌کاره‌ینانی $\frac{360^\circ}{n}$ بۆ دۆزینه‌وه‌ی پیوانه‌ی گۆشه‌ی ده‌ره‌وی چه‌ندلایه‌کی نارێک.
3. خشته‌که‌ی خواره‌وه دروستبکه‌وه و ته‌واوی بکه، له‌هه‌ر خانه‌یه‌که برێک بنووسه بۆ دۆزینه‌وه‌ی به‌های دیاریکراوی چه‌ندلایه‌که n لای هه‌بی‌ت.



گۆشه‌کانی ناوه‌وه	گۆشه‌کانی ده‌ره‌وه
کۆی پیوانه‌ی گۆشه‌کان	
پیوانه‌ی هه‌ر گۆشه‌یه‌که	

2-1 رايىنانەكان

رايىنانى ئاراستەكراو

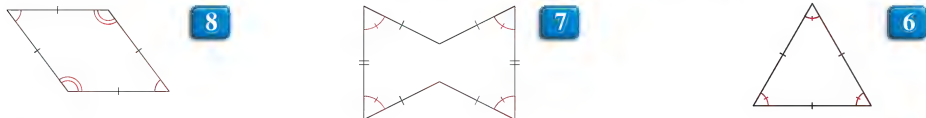
1 زاراۋەكان ئايا يەكسانبۇونى لايەكان بەسە بۇئەۋى چەندلايەك رىك بىت؟ ۋەلامەكەت پروونىكەۋە. بەنمۇنەيەك پالېشتى ۋەلامەكەت بىكە.

دىارىبىكە ھەر يەك لەم شىۋانە چەندلان يان نا، شىۋەكە ناۋىنى ئەگەر چەندلابوو.

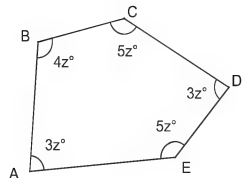


1 برۋانە نمۇنە

دىارىبىكە ئەم چەندلايەك رىك يان نا، قۇپاون يان قۇقۇن.



2 برۋانە نمۇنە

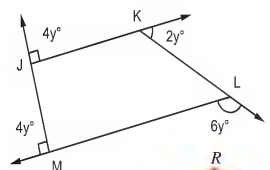


9 پىۋانەى ھەريەكە لەگۇشەكانى ناۋەۋى پىنجلاى بەرامبەر بدۇزەۋە.

10 پىۋانەى ھەريەكە لەگۇشەكانى ناۋەۋى دوازەلايەكى رىك بدۇزەۋە.

11 كۆى پىۋانەى گۇشەكانى ناۋەۋى 20 لايەكى قۇقۇز بدۇزەۋە.

3 برۋانە نمۇنە



12 بەھاي ۋ لەچەندلاى بەرامبەردا بدۇزەۋە.

13 پىۋانەى ھەريەكە لەگۇشەكانى دەرەۋى پىنجلايەكى رىك بدۇزەۋە.

4 برۋانە نمۇنە

بىۋەيى بۇ ھەموۋان تابلۇى پىنمايى ھاتۇچۇى بەرامبەر بەكارىنە بۇ شىكارى پرسىيارى 14 و 15.



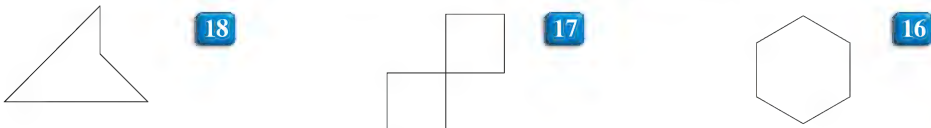
14 ناۋى چەندلايەكە بەيپى لايەكانى ناۋىنى.

15 ھەريەكە لە پىۋانەى \hat{Q} و \hat{S} بدۇزەۋە ئەگەر بزانى \hat{P} و \hat{T} و \hat{R} گۇشەى ۋەستاون و $\hat{Q} \cong \hat{S}$

5 برۋانە نمۇنە

جىبەجىكرەنەكان

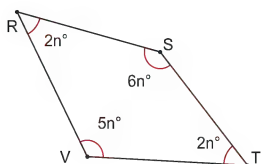
دىارىبىكە ئەم شىۋە دروستكراۋانە چەندلان يان نا، شىۋەكە ناۋىنى ئەگەر چەندلابوو.



رايىنانى تازاد	
بۇ شىكارى تەماشاي نمۇنە	پرسىيارەكان
1	18-16
2	21-19
3	24-22
4	26-25
5	28-27

دىارىبىكە ئەم چەندلايەك رىك يان نا، قۇپاون يان قۇقۇن.





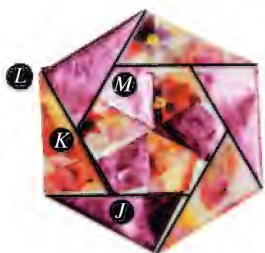
22 پېوانه‌ی هەریه‌که له‌گۆشه‌کانی ناوه‌وی چه‌ندلای به‌رامبه‌ر بدۆزه‌وه.

23 پېوانه‌ی هەریه‌که له‌گۆشه‌کانی ناوه‌وی 18 لایه‌کی رێک بدۆزه‌وه.

24 کۆی پېوانه‌ی گۆشه‌کانی ناوه‌وی هه‌وتلایه‌ک بدۆزه‌وه.

25 پېوانه‌ی هەریه‌که له‌گۆشه‌کانی ده‌ره‌وی نۆلایه‌کی رێک بدۆزه‌وه.

26 ئەگەر پېوانه‌ی گۆشه‌کانی ده‌ره‌وی پینج‌لایه‌ک $8a^\circ, 10a^\circ, 4a^\circ, 6a^\circ$ ئه‌گەر $2a^\circ$ بێت، ئایا به‌های a چه‌نده‌؟

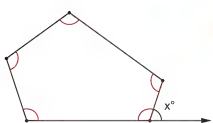


وێنه‌ی به‌رامبه‌ر بۆ شیکاری پرسیاره‌کانی 27 و 28 به‌کاربێنه.

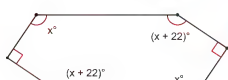
27 به‌های $m \widehat{JKM}$ بدۆزه‌وه.

28 به‌های $m \widehat{MKL}$ بدۆزه‌وه.

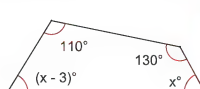
جەبر به‌های x له هەریه‌ک له‌م شیوانه‌دا بدۆزه‌وه.



31



30



29

ژماره‌ی لایه‌کانی ئەو چه‌ندلایه‌ک به‌دۆزه‌وه که له‌گه‌ڵ باسه‌که‌یدا گونجاوبێت.

32 پېوانه‌ی هەرگۆشه‌یه‌کی ناوه‌وی یه‌کسانه به‌پېوانه‌ی هەرگۆشه‌یه‌کی ده‌ره‌وی.

33 پېوانه‌ی هەرگۆشه‌یه‌کی ناوه‌وی یه‌کسانه به‌ چوار ئەوه‌نده‌ی پېوانه‌ی هەرگۆشه‌یه‌کی ده‌ره‌وی.

34 پېوانه‌ی هەرگۆشه‌یه‌کی ده‌ره‌وی یه‌کسانه به‌ $\frac{1}{8}$ پېوانه‌ی هەرگۆشه‌یه‌کی ناوه‌وی.

ناوی ئەو چه‌ندلایه‌ دياره‌که که‌کۆی پېوانه‌ی گۆشه‌کانی ناوه‌وی یه‌کسانه به‌

38 2520°

37 1800°

36 900°

35 540°

هه‌نگاوی جۆراوجۆر ژماره‌ی لایه‌کان و پېوانه‌ی گۆشه‌کانی ناوه‌وی ئەو چه‌ندلایه‌ک چه‌نده‌؟

ئەگەر بزانی‌ت پېوانه‌ی گۆشه‌یه‌کی ده‌ره‌وی یه‌کسانه به‌:

42 24°

41 36°

40 72°

39 120°

43 هه‌له‌ له‌ شیکاردا کام ده‌رئه‌نجام هه‌له‌یه‌؟ هه‌له‌که له‌کۆی‌دايه‌؟



ب وێنه‌ی به‌رامبه‌ر چه‌ندلا نانوینیت.

ا وێنه‌ی به‌رامبه‌ر چه‌ندلا ده‌نوینیت.

44 خه‌مڵاندن وێنه‌ی ئەو چه‌ندلایه‌ بکێشه که خاڵی سه‌ره‌کانی بریتی‌ن له‌ $A(-2, -6)$ و $B(-4, -1)$

و $C(-1, 2)$ و $D(4, 0)$ و $E(3, -5)$ پېوانه‌ی هەریه‌که له‌گۆشه‌کانی ناوه‌وی بخه‌مڵینه‌ چی

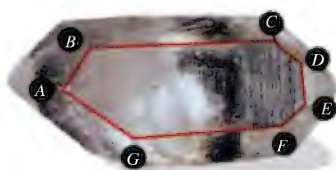
ده‌رباره‌ی گۆشه‌کانی ئەم چه‌ندلایه‌ ده‌لێیت؟ گۆشه‌ پێو به‌کاربێنه‌ بۆ پېوانی ئەم گۆشانه

وه‌لامه‌که‌ی پێشوت پاسادانیکه.

45 ئەمانه‌ی خواره‌وه هه‌ندێک پێدراون له‌سه‌ر پېوانه‌ی گۆشه‌کانی ئەو پارچه‌ کوارتزه‌ی به‌رامبه‌ر

$$m \hat{E} = m \hat{D} = 130^\circ, m \hat{B} = 125^\circ, m \hat{A} = 95^\circ$$

$$m \hat{C} = m \hat{D} = m \hat{G}$$



ا چه‌ندلای $ABCDEFGH$ ناوینێ.

ب کۆی پېوانه‌ی گۆشه‌کانی ناوه‌وی چه‌ندلایه‌که چه‌نده‌؟

ج $m \hat{F}$ بدۆزه‌وه.

46 ئەۋچەندلاپكە ئاۋبىنى كە چۆۋەكە 45 m ۋە دىرژى لايەك لە لايەكانى 7.5 m بىت.

ۋىنەى ئەمانە بكيڭشە.

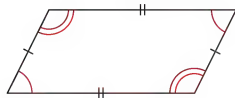
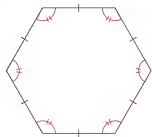
47 چۈرلەيەكى پك

48 ھەۋتلايەكى قۇپاۋى ناپك.

49 بېنجالايەكى قۇقزى ناپك

50 چەندلايەك لايەكانى يەكسان ۋە گۆشەكانى جۈۋتەن.

51 بىر كىرەنەۋەى رەخنەگرانە بەزىادىۋونى ژمارەى لايەكانى چەندلايەكى پك



52 چەندلايەكە لەكام شۆۋەى ئەندازەىى نىكەدەبىتەۋە.

نامادە كىرەن پۇ تاكىرەتەۋە



53 شۆۋەى بەرامبەر كام لەم سىفەتەنە دەگىتە خۇ

I چۈرلە II قۇپاۋ III پك

(أ) تەنھا I (ب) تەنھا II (ج) I ۋە II (د) I ۋە III

54 16 لاي رك كام يەككە لەم سىفەتەنەى تىدا نىيە.

(أ) چەندلايەكى قۇقزە

(ب) ھەمۋە لايەكانى جۈۋتەن

(ج) كۆى پىۋانەى گۆشەكانى ناۋەۋەى 2880°

(د) كۆى گۆشەكانى دەرەۋەى 360°

55 لە چۈرلەى ABCD دا $\hat{C} = m$ چەندە؟ ئەگەر بزانت $\hat{A} = 45^\circ$ ۋە $\hat{B} = 111^\circ$ ۋە $\hat{C} = 2\hat{D}$

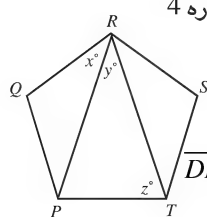
(أ) 24° (ب) 68° (ج) 102° (د) 136°

بەرەنگارى ۋە فراۋان كىرەن

56 پىۋانە گۆشەكانى ناۋەۋەى پىنجالايەكى قۇقز چەندجارە يەكەدۋاى يەكەكانى ژمارە 4

پىكىدېنېت پىۋانە گۆشەكانى پىنجالايەكە بدۆزەۋە.

57 بەھاى x ۋە y ۋە z لەۋ پىنجالارېكەى بەرامبەر بدۆزەۋە.



58 ھەنگاۋى جۇراۋجۇر چەندلاى ABCDEFGHJK دىلەيەكى رېكە دوۋلاى AB ۋە DE

دىرژكرانەۋە تا لە L دا ۋە لەدەرەۋەى چەندلايەكە پىكەگەپشتن. $m\angle BLD$ بدۆزەۋە.

59 بىر كىرەنەۋەى رەخنەگرانە ئايا سەلمىنراۋى كۆى پىۋانەى گۆشەكانى ناۋەۋەى

چەندلا راستە لەچەندلاى قۇپاۋدا؟ بۇ پالپشتى ۋە لامەكەت ۋىنەى شۆۋەيەك بكيڭشە.

پىداچۈۋنەۋەى لولپىچى

بەبەكارھىنانى شىتەل ھەريەك لەم ھاۋكىڭشانە شىكارىكە (پۇلەكانى پىشۋ)

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \quad 60 \quad x^2 - x - 12 = 0 \quad 61 \quad x^2 - 12x = -35 \quad 62$$

لە پىرسىارەكانى 63 تا 65 دوۋلاى سىگۆشەيەك دراۋە، پىۋىستە لەسەرت دوۋ راۋە بدۆزىتەۋە دىرژى لاي سىيەم x يان لەنىۋاندا بىت (پۇلەكانى پىشۋ)

63 4: 4 64 12: 6 65 7: 3

لەسىگۆشەى گۆشەۋەستۋاى 90-60-30 ئەمانە بدۆزەۋە (پۇلەكانى پىشۋ)

66 دىرژى ژىيەكە، ئەگەر دىرژى لا بچۈكەكە 6 يەكەبىت.

67 دىرژى لا گەرەكە، ئەگەر دىرژى ژىيەكە 10 يەكەبىت.

هاورپژەى ئەندازەىى

Dilation

3-1



كى ئەمە بەكار دەھىنىت؟

پروگرامسازى كومپيوتر، پوتانەكان بۆ گەرەكردن و بچووكردنەو بەكار دىنىت.

ئامانجەكان

- جىبەجىكردى سىفەتەكانى ھاوشىوھبون لە پروتەختى پوتاندا
- سەلماندنى ھاوشىوھبونى دوشىوھى ئەندازەى بەبەكارھىنانى پوتانەكان.

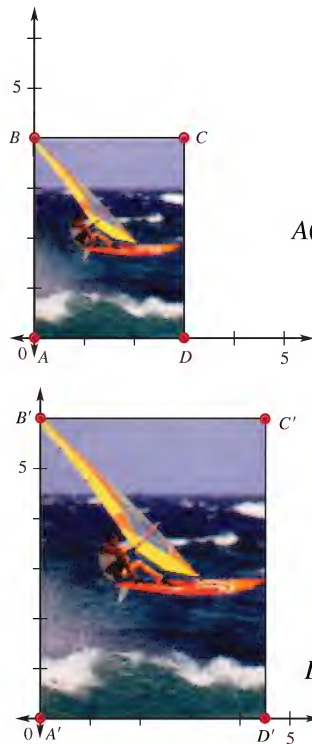
زاراوەكان

Vocabulary

هاورپژەى ئەندازەى
Dilation

پژەى جىگوركى
Scale factor

زۆر لەو وىنانەى لەسەر تۆرى ئەنتەرنىت دەبىرنى پشت بە شىوھى (format) JPEG دەبەستىت چونكە گۆرپىن وگواستەوھى وىنەكان ئاساندەكات كاتىك بە ماوسەكە گۆشەىەكى وىنەكە رادەكشيت لەشىوھى JPEG بە مەبەستى گەرەكردن يان بچووكردنەوھى بەرنامەكە، پىوانەكانى ئەو وىنەى دەستكەوتوھ بە بەكارھىنانى پوتانەكان و ھاوشىوھبون رىكەدەخات. **هاورپژەى ئەندازەى Dilation:** جىگوركىيەكى ئەندازەى پىوانەكانى شىوھ ئەندازەىيەكە دەگۆرپت لەگەل پارىزگارىكردى شىوھەكى بنەپەت و وىنەكەى لەم جىگوركىيەدا دوو شىوھى ھاوشىوھ رىژەى ئەم جىگوركى ئەندازەىيە **Scale factor** ژمارەىەكى راستى مەجەبە $k \neq 1$ رادەى گەرەكردن يان بچووكردنەوھى وىنەكە لەچا و بنچىنەكەيدا نىشانەدات. وىنەى خالى (x, y) بە ھاورپژەى ئەندازەى پىژەكەى k بىت برىتەىە لە (kx, ky) ، ئەگەر $k > 1$ ھاورپژە ئەندازەىيەكە گەرەكردن و ئەگەر $k < 1$ ئەو ھاورپژە ئەندازەىيەكە بچووكردنەوھ دەبىت.



جىبەجىكردى لەسەر پروگرامسازى كومپيوتر

وىنەى بەرامبەر شوپىنى وىنەكە لەشىوھى JPEG دا پوونەكاتەوھ سنوورى وىنەى پەيدا بوو لە جىگوركى وىنە بنچىنەىيەكە گەرەكراوھ بەرپژەى $\frac{3}{2}$ بكىشە.

ھەنگاوى 1 پوتانى ھەر سەرىك لەسەرە بنچىنەىيەكانى $A(0, 0)$

$B(0, 4)$ ، $C(3, 4)$ ، $D(3, 0)$ ، لىكدانى $\frac{3}{2}$ بكە.

لاكىشەى

ABCD

لاكىشەى

A'B'C'D'

$$A(0, 0) \rightarrow A'(0 \times \frac{3}{2}, 0 \times \frac{3}{2}) \rightarrow A'(0, 0)$$

$$B(0, 4) \rightarrow B'(0 \times \frac{3}{2}, 4 \times \frac{3}{2}) \rightarrow B'(0, 6)$$

$$C(3, 4) \rightarrow C'(3 \times \frac{3}{2}, 4 \times \frac{3}{2}) \rightarrow C'(\frac{9}{2}, 6)$$

$$D(3, 0) \rightarrow D'(3 \times \frac{3}{2}, 0 \times \frac{3}{2}) \rightarrow D'(\frac{9}{2}, 0)$$

ھەنگاوى 2 خالەكانى $A'(0, 0)$ ، $B'(0, 6)$ ، $C'(\frac{9}{2}, 6)$ ، $D'(\frac{9}{2}, 0)$

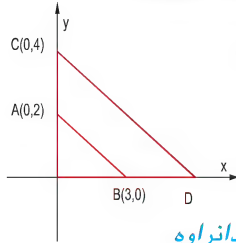
دىارىبەكە پاشان وىنەى لاکىشەكە بكىشە.

1. جى دەبىت ئەگەر سنوورى وىنەى پەيدا بوو لە جىگوركى وىنە بنچىنەىيەكە بە بچووكردنەوھىەك رىژەكەى $\frac{1}{2}$ بىت بكىشە.



نمونہ 2

دوڑینہ وہی پوٹانی شیوہیہ کی ئەندازہیی هاوشیوہی شیوہ دراوہ کہ



پوٹانی خالی D وپیژہی ئەو هاوپیژہ ئەندازہییہی جیگورپی
بەخالی B بو خالی D دەکات و جورەکەشی بدۆزەو ئەگەر
بزانیت کہ هەردوو سیگۆشەیی AOB و COD هاوشیوہن.

لەبەرئەوہی دوو سیگۆشەکە هاوشیوہن واتە $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{OD}$$

بەهای هەر پێوانەیکە دانراو

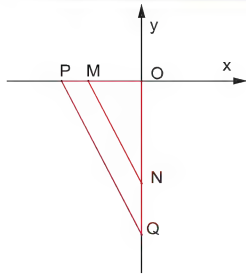
$$2OD = 12$$

لێکدانى دوولا و دوو نیوان کراو

$$OD = 6$$

هەردوولا دابەشی دوو کراو.

لەبەرئەوہی D لەسەر تەوہری x ، بۆیە y سفرە. و لەبەرئەوہی $OD = 6$ ئەو پۆی
یەکەم یەکسانە بە 6 واتە $x = 6$. کەواتە پوٹانی D بریتییه لە $(6, 0)$. لەبەرئەوہی
 $(6, 0) = (3 \times 2, 0 \times 2)$ ئەو پیژەیی جیگورپییکە بریتییه لە 2 گەرەکردن.



2. دوو سیگۆشەیی MON و POQ هاوشیوہن کاتیئە

پوٹانی N و پیژە هاوپیژەییەکەى بدۆزەو

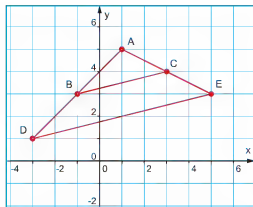
پاشان جورەکەى دیاریبکە.



نمونہ 3

سەلماندى هاوشیوہبوونی دوو سیگۆشە بەھۆی پوٹانەوہ.

دراو: $A(1, 5)$, $B(-1, 3)$, $C(3, 4)$, $D(-3, 1)$, $E(5, 3)$



داواکراو: بیسەلمینە هەردوو سیگۆشەیی ABC و ADE هاوشیوہن.

هەنگاوی 1: خالەکان دیاریبکە پاشان وینەى دوو سیگۆشەکە بکیشە.

هەنگاوی 2: یاسای دووری بو هەژمارکردنى درێژى لایەکان بەکاربینە.

$$AC = \sqrt{(3-1)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{5}$$

$$AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$AE = \sqrt{(5-1)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$AD = \sqrt{(-3-1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

هەنگاوی 3: پیژەى هاوشیوہبوون بدۆزەو.

$$\frac{AC}{AE} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

لەبەرئەوہی $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ و لەبەرئەوہی $\widehat{BAC} \cong \widehat{DAE}$ کەواتە دوو سیگۆشەکە هاوشیوہن.

3. دراو: $R(-2, 0)$ و $S(-3, 1)$ و $T(0, 1)$ و $U(-5, 3)$ و $V(4, 3)$.

داواکراو: بیسەلمینە هەردوو سیگۆشەیی RST و RUV هاوشیوہن.

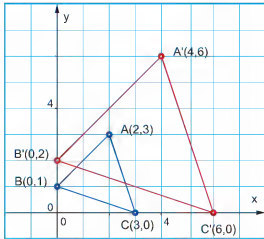


نمونہ 4

بہ کارہیتانی سی لا (لا، لا، لا) بؤ ھاوشیوہوونی سیگوشہکان

سیگوشہی ABC وینہکے $A'B'C'$ بے گورہکردنیک ریژہکے 2 بیت بکیشہ، پاسادانی ھاوشیوہوونی دوو سیگوشہکے بکے.

ہہنگاوی 1: بؤ دؤزینہوہی پؤوتانی سیگوشہی $A'B'C'$ پؤوتانی ہہر خالیک لیکدانی 2 بکے.



$$A(2, 3) \rightarrow A'(2 \times 2, 3 \times 2) \rightarrow A'(4, 6)$$

$$B(0, 1) \rightarrow B'(0 \times 2, 1 \times 2) \rightarrow B'(0, 2)$$

$$C(3, 0) \rightarrow C'(3 \times 2, 0 \times 2) \rightarrow C'(6, 0)$$

ہہنگاوی 2: وینہی سیگوشہی $A'B'C'$ بکیشہ.

ہہنگاوی 3: یاسای دووری بؤ ھہژمارکردنی دریژی لایہکان بہکاربیئہ.

$$A'B' = \sqrt{(4-0)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$AB = \sqrt{(2-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$B'C' = \sqrt{(6-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{(3-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{10}$$

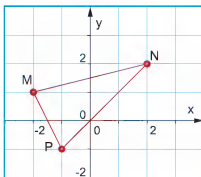
$$A'C' = \sqrt{(6-4)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{(3-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}$$

ہہنگاوی 4: ریژہی ھاوشیوہوون بدؤزہوہ.

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 2 \quad \frac{B'C'}{BC} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 2 \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 2$$

لہبہرئہوہی $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$ مانای دوو سیگوشہی $A'B'C'$ و ABC ھاوشیوہن.



4. وینہی سیگوشہی MNP بہ گورہکردنیک ریژہکے 3 بیت بکیشہ ساغیکہوہ سیگوشہکے و وینہ گورہکراوہکے ھاوشیوہن.



بیریکہوہ و تاوتویکے

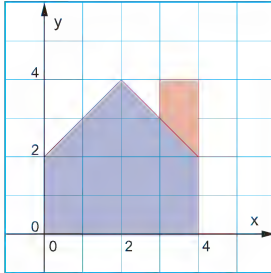
- پؤوتانی سہرہکانی سیگوشہی JKL بریتیین لہ $J(0, 0)$ و $K(0, 2)$ و $L(3, 0)$ پؤوتانی سہرہکانی وینہی ئەم سیگوشہیہ بہ ھاوریژہی ئەندازہی بریتیین لہ $J'(0, 0)$ و $K'(0, 8)$ و $L'(12, 0)$ چؤن ھاوریژہی ئەندازہی دەدؤزیتہوہ؟ چؤن جۆرہکے دیاریدہکےیت؟
- ریکخہریہ: خشتہکےی خوارہوہ بنووسہ و تہواوی بکے، لہہر چوارچیوہیہکدا ئەوہی داواکراوہ بینووسہ.

سيفت	پیناسہ
گورہکردن و بچووکردنہوہ	
دژہ نمونہ	نمونہ



رَاهِيَّانِي ئَارَاسْتَهْكَراو

1 **زاراوهكان** رِيژهي پِيوانهكاني ويْنهي شِيوهيهكي ئهَنْدازهيي به گهورهكردن يان بچووكردنهوه بريتييه له ____ (هاورِيژهي ئهَنْدازهيي، رِيژهي هاورِيژهي ئهَنْدازهيي).



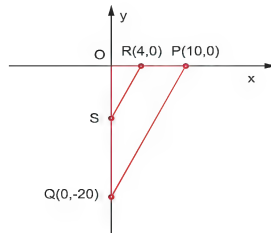
2 نهخشهكيشاني رِوونكرْدنهوهيي Graphic Design

يهكِيك له ئهَنْدازيارهكان شِيوهي بهرامبهرِي نهخشهكيشا بُو ئهوهي بِيِيته دروشمي يهكِيك له دامه زاراوهكان. بهرِيوهبهرِي دامه زاراوهكه داوي له ئهَنْدازيارهكه كرد ئهوه دروشمه بهرِيژهي 2 گهوره بكات. ويْنهي دروشمهكه داوي گهورهكردن بكِيشه.

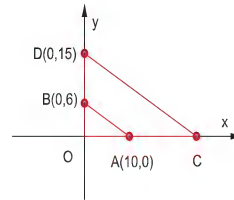
نمونه 1

نمونه 2

4 ههردوو سِيگوشهي ROS و POQ هاوشِيوهن پَوْتاني S و ئهوه رِيژهي هاورِيژهي ئهَنْدازهيي بدَوَزهوه كه سِيگوشهي POQ بُو سِيگوشهي ROS جِيگوركي پِيدهكات جوْري هاورِيژهي ئهَنْدازهييكه چِييه؟



3 دوو سِيگوشهي AOB و COD هاوشِيوهن پَوْتاني C و ئهوه رِيژهي هاورِيژهي ئهَنْدازهيي بدَوَزهوه كه سِيگوشهي AOB بُو سِيگوشهي COD جِيگوركي پِيدهكات جوْري هاورِيژهي ئهَنْدازهييكه چِييه؟

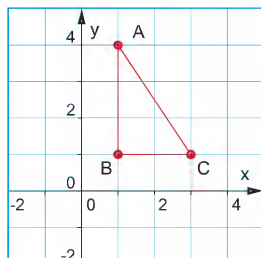


5 دراو: $A(0, 0)$ و $B(-1, 1)$ و $C(3, 2)$ و $D(-2, 2)$ و $E(6, 4)$. داواكراو: بيسهلمِينه دوو سِيگوشهي ABC و ADE هاوشِيوهن.

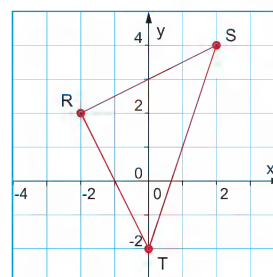
6 دراو: $J(-1, 0)$ و $K(-3, -4)$ و $L(3, -2)$ و $M(-4, -6)$ و $N(5, -3)$. داواكراو: بيسهلمِينه دوو سِيگوشهي JKL و JMN هاوشِيوهن.

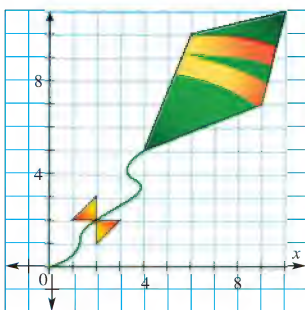
ههنگاوي جوْراوجوْري ويْنهي ههريهكه له سِيگوشهكان به گهورهكرديك كه رِيژهكهي دراوه بكِيشه و پاشان پاسادانبكه لهوهي سِيگوشه بنچينهيهكه و ويْنهكهي هاوشِيوهن.

8 بهرِيژهي 2



7 بهرِيژهي 3/2





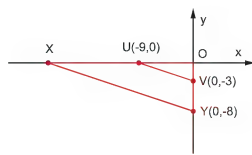
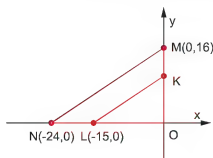
راهبندان و شیکارکردنی پرسیارهکان

9 **ریکلامهکان** بریکاریکې بلاوکردنهوې ریکلام وینې بهرامبهري بۇ دروشمی مانگی کرین و فروشتن دروستکرد بریکارهکه دهیهویت دروشمهکه بچووک بکاتهوه بهرپژهی نیوه تا لهسهر کارت چاپی بکات. وینې دروشمهکه پاش بچووکردنهوه بکیشه.

راهبندانى نازاد

شیکارکردنی پرسیارهکان	تەماشای نمونه
1	10
2	12-11
3	14-13
4	16-15

10 دوو سیگوشه XOY و UOV هاوشیوهن پۆتانی X و U و رپژه Y و V تهاندازییه بدۆزهوه که سیگوشه UOV بۇ سیگوشه XOY جیگورکی پیدهکات جوری هاوپژه تهاندازییهکه دیاریبکه.



12 دراو: $D(-1, 3)$ و $E(-3, -1)$ و $F(3, -1)$ و $G(-4, -3)$ و $H(5, -3)$

داواکراو: بیسهلمینه دوو سیگوشه DEF و DGH هاوشیوهن.

13 دراو: $M(0, 10)$ و $N(5, 0)$ و $P(15, 15)$ و $Q(10, -10)$ و $R(30, 20)$

داواکراو: بیسهلمینه دوو سیگوشه MNP و MQR هاوشیوهن.

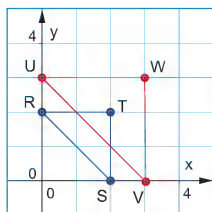
ههنگاوی جوراوجور وینې ههریهکه له سیگوشهکان دواي جیگورکی پیکردنیان بکیشه به گهورهکردنیک یان بچووکردنیک بهرپژهی k . پاشان پاسادانیبکه لهوې سیگوشه بنچینهیهکه وینهکهی هاوشیوهن.

14 $J(-2, 0)$, $K(-1, -1)$, $L(-3, -2)$; $k = 3$.

15 $M(0, 4)$, $N(4, 2)$, $P(2, -2)$; $k = \frac{1}{2}$.

16 **بیرکردنهوې رهخنهگر** ئایا U و V جیگورکی تهاندازییه خالی (x, y) بۇ خالی $(2x, 4y)$ جیگورکی پیدهکات، هاوپژهی تهاندازییه؟ وهلامهکته پوونبکهوه.

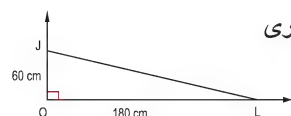
17 **ههله له شیکردنهوهدا** له خوارهوه دوو شیکار بۇ دۆزینهوې رپژهی هاوپژهی تهاندازییه که سیگوشه RST بۇ سیگوشه UVW جیگورکی پیدهکات کامیان ههلهیه؟ وهلامهکته پوون بکهوه



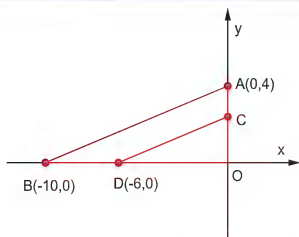
ب رپژهی هاوپژه تهاندازییهکه بریتیهله رپژهی نیوان لایهکانی سیگوشهکه له بهرنهوهی $\frac{RT}{UV} = \frac{3}{2}$ واته رپژهکه $\frac{2}{3}$

ا بۇ جیگورکی پیکردنی سیگوشه RST بۇ سیگوشه UVW پۆتانی ههر خالی که له دراوه رپژهی هاوپژه تهاندازییهکه $\frac{3}{2}$

18 **بنووسه** سیگوشه $A'B'C'$ وینې سیگوشه ABC به هاوپژهی تهاندازییه، پهیهوندی له نیوان رپژهی هاوپژه تهاندازییهکه و رپژهی هاوشیوه بوونهکه له نیوان دوو سیگوشهکه دا چیه؟ وهلامهکته پوونبکهوه.



19 پۆتانی J و L چیه، ئهگەر واتدانا که ههریهکه یهکه لهسهر دوو تهوهری پۆتانهکان 60 cm بیته وینې سیگوشهکه و گهورهکردنهکهی له پووتهختی پۆتانهکاندا به رپژهی 3 بکیشه.



20 كام پۇتۇن بۇ خالى C ھەلدەبۇرى تا ھەردو سىگۇشە

AOB و COD ھاوشىۋەن.

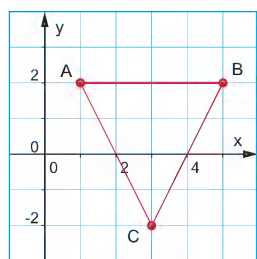
(0, 2.4) (ا) (0, 3) (ج)

(0, 2.5) (ب) (0, 3.6) (د)

21 سىگۇشە $A'B'C'$ گەورەكراوى سىگۇشە ABC بەرپۇزە 2. ئەگەر چىۋە ABC 60 يەكە بىت ئايا

چىۋە $A'B'C'$ چەندە؟

(0, 30) (ا) (0, 60) (ب) (0, 120) (ج) (0, 240) (د)



22 كام سىگۇشە DEF ھاوشىۋە سىگۇشە ABC دەبىت.

(0, 2), (1, 2), (2, 0) (ا) $F(2, 0)$, $E(3, 2)$, $D(1, 2)$

(0, -2), (1, -2), (2, -5) (ب) $F(1, -5)$, $E(2, -2)$, $D(-1, -2)$

(0, 2), (1, 2), (3, 0) (ج) $F(3, 0)$, $E(5, 2)$, $D(1, 2)$

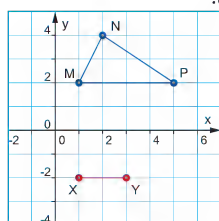
(0, -2), (0, 2), (-2, -2) (د) $F(-1, 0)$, $E(0, 2)$, $D(-2, -2)$

23 كورتە ۋەلام AB بەرپۇزە 3 گەورەكرا كاتىك $A(3, 2)$ و $B(7, 5)$ بىت درىژى $A'B'$ چەندە؟

بەرەنگارى و فراوانكىرىن

24 چەند سىگۇشە يەككە لەلا يەكەنى XY بىت ھاوشىۋە سىگۇشە MNP دەن؟

25 پۇتۇن Z بدۇزەۋە كاتىك سىگۇشە XYZ ھاوشىۋە سىگۇشە MPN بىت.



26 دولاي لاكىشە يەك لەسەر تەۋەرى پۇتۇنەكەنە، ئەگەر يەككە

لەسەرەكەنى بىكەۋىتە سەر خالى بىنەرەت و سەرەكە تىرى بىكەۋىتە

سەر راستەھىلى $2x =$ يىسەلمىنە ھەردو لاكىشەكە مەرچەكەنى

پىشۇۋ پاسادان دەكەن ھاوشىۋەدەن.

27 سەرەكەنى سىگۇشە ABC برىتتىن لە $A(0, 1)$ و $B(3, 1)$ و $C(1, 3)$ دوو شوين بۇ سەرى F

بدۇزەۋە ئەگەر $D(1, -1)$ و $E(7, -1)$ بن بۇ ئەۋە دوو سىگۇشەكە ھاوشىۋەن.

پىداچوۋنەۋە لولپىچى

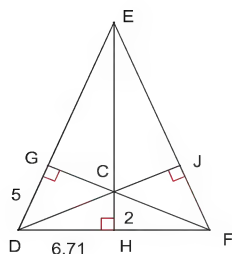
لاسەنگە يەك بۇ نواندى بارەكە بنوۋسە (پۇلەكەنى پىشۇۋ)

28 بەرزكەرەۋە يەك (كرىن) بەلا يەنى كەمەۋە 250kg ھەلدەگرىت. دوۋتەن

كىشى ھەرىكە يان 50kg بە ھەردوۋ لاي تولىكەۋە كە بارستايەكەنى

5kg جىگىركرا ھىماي گۇراوى x بۇ ئەۋ بارستايەكە دابنى كە بۇ تولەكە

زىادكرا لاسەنگە يەك بنوۋسە x پاسادانى بىكەت.



درىژى ھەر پارچە راستەھىلىك بدۇزەۋە ئەگەر بزانى $\overline{DE} \equiv \overline{FE}$

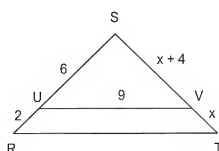
(0, 29) (ا) (0, 30) (ب) (0, 31) (ج) \overline{CD}

(0, 30) (ب) \overline{JF}

(0, 29) (ا) \overline{HF}

درىژى ھەر پارچە راستەھىلىك بدۇزەۋە ئەگەر بزانى دوو سىگۇشە

USV و RST ھاوشىۋەن.



(0, 32) (ا) (0, 33) (ب) (0, 34) (ج) \overline{ST}

(0, 33) (ب) \overline{VT}

(0, 32) (ا) \overline{RT}

ئاراستەبەرەكان

Vectors



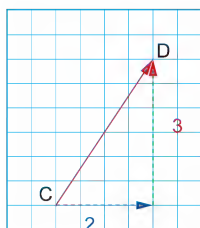
كى ئەمە بەكار دەھيئىت؟

ئەوانەى پېشېرېكى بىلەن مەكانىيان لە
پووبارەكاندا كىرەتە پېشەى خۇيان،
ئاراستەبەرەكان بەكار دېئىن بۇ ئەۋەى ئاراستەى
رېرەۋى ئاۋ لەبەر چاۋېگرى كاتېك
پېشېرېكىيەكە ئەنجام دەدەن. (نمۇنە ۵)

دەتوانىت ئاراستەبەرەكان بۇ نواندىنى خۇيانى و

ئاراستەى جولەى تەنىكى جولۇ بەكاربەھيئىت ئاراستەبەر Vector بىرېكە بە درېژى و ئاراستە
دىارى دەكرىت دەتوانى ئاراستەبەرېك بەپارچە راستەھيلىكى ئاراستەكراۋ وئەنە بىكەى بۇ نواننى

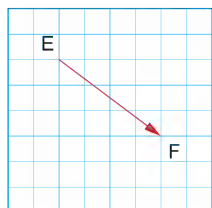
ئاراستەبەرې خوارەۋە \overrightarrow{AB} يان \vec{u} بنووسە.
خالى كۆتايى
خالى سەرەتا



ھەرۋەھا دەتوانىت ئاراستەبەر بە بەكارھيئاننى دوو پېكەنەرەكەى ناۋىنېى
دوۋپېكەنەرى ئاراستەبەرەكە Components دوو ژمارەن يەكەمىيان لەمەۋداى
جولەى ئاسۋىي و دوۋمىيان لەمەۋداى جولەى ستونىدايە ھەردوۋىكىيان
پېۋىستە لەخالى سەرەتاى ئاراستەبەرەكەۋە بۇ خالى كۆتايى بچن بەو شېۋەيەى
كە پېكەنەرى يەكەمى x و پېكەنەرى دوۋمى y بېت و بە (x, y) دەنوسرىت بۇ
نمۇنە دەنوسرىت $(2, 3)$ كە ئاراستەبەرې \overrightarrow{CD} دەگەيئىت.

نوسىنى ئاراستەبەر بە دوو پېكەنەرەكانى

ھەريەكە لەم ئاراستەبەرەكانە بە دوو پېكەنەرەكەى بنووسە.

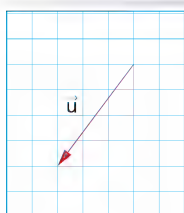
ا ئاراستەبەرې \overrightarrow{EF}

بۇ گواستەنەۋەى لە خالى E ۋە بۇ خالى F ، 4 يەكە بۇ لاي راست و
3 يەكە بۇ خوارەۋە بچولېت، پېكەنەرى يەكەم $+4$ و پېكەنەرى دوۋم
 -3 دەبېت، كەۋاتە ئاراستەبەرې \overrightarrow{EF} بىرېتېيە لە ئاراستەبەرې $(4, -3)$

ب ئاراستەبەرې \overrightarrow{PQ} كاتېك $P(7, -5)$ و $Q(4, 3)$

پۆتوانى خالى سەرەتا لە پۆتوانى خالى كۆتايى
دەرىكە لەجياتى ھەر پۆتوانىك بەھاكەى دابىنى.
سادەبەكە.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle \\ \overrightarrow{PQ} &= \langle 4 - 7, 3 - (-5) \rangle \\ \overrightarrow{PQ} &= \langle -3, 8 \rangle\end{aligned}$$



1. ھەر ئاراستەبەرېك بە دوو پېكەنەرەكەى بنووسە.

خالى
چاۋدېرى

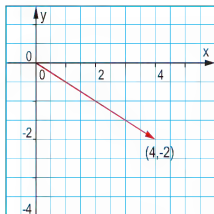
ا \vec{u}
ب \overrightarrow{AB} كاتېك $A(-1, 1)$ ، $B(6, 2)$

دریژى ئاراستەبىر **Magnitude** بریتییه لەو دوورییهى دەکەوێتە نۆوان خاڵى سەرەتاو خاڵى کۆتایى ئەم ژمارەیه لە ئاراستەبەردا بەشپۆهێ $|AB|$ یان $|v|$ دەنوسرێت. کاتیگ ئاراستەبەر بۆ نواندنی خێرایى شتیکی جولاو بە ئاراستەیهکی دیاریکراو بەکار دێت، ئەوا دریژى ئاراستەبەرەکی یەكسانە بە خێرایى تەنە جولاو دەکە بەمەش دریژى ئەو ئاراستەبەرەى جولەى بەلەمى پووبارەکی دەنویئیت بریتییه لە خێرایى بەلەمەکە.

2 نمونە

دۆزینەوهی دریژى ئاراستەبەر

وینەى ئاراستەبەر $(4, -2)$ لە پووتەختى پۆوتاندا بکێشه دریژیهکەى هەژماربە و وەلامەکەت بۆ نزیکتەین دەیهک نزیکبکەوه.

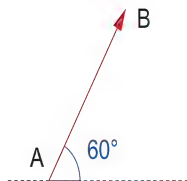


هەنگاوى 1: وینەى ئاراستەبەرەکی بەبەکارهێنانى خاڵى بنەرەت وەك خاڵى سەرەتا بکێشه خاڵى کۆتایى بریتییه لە $(4, -2)$

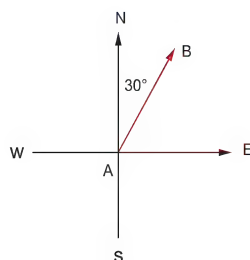
هەنگاوى 2: دریژى ئاراستەبەرەکی بەبەکارهێنانى یاسای دووری

$$|(4, -2)| = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{20} \approx 4.5$$

2. وینەى ئاراستەبەر $(-3, 1)$ لە پووتەختى پۆوتاندا بکێشه دریژیهکەى هەژماربە وەلامەکەت بۆ نزیکتەین دەیهک نزیکبکەوه.



ئاراستەى ئاراستەبەر **Direction** ئەو گۆشەیه که لهگەڵ راستەهێلى ئاسۆدا دروستى دەکات و ئەو گۆشەیه بە ئاراستەى پێچەوانەى میلی کاترێمێر دەپۆرێت که لەبەشى موجهبى تەوهرى یەكەمەوه دەرچووێت.

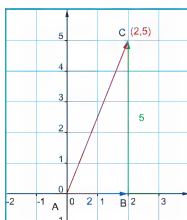


هەر وها دەگونجێت ئاراستەى ئاراستەبەر بە دیاریکردنى ئەو گۆشەیهى لهگەڵ یەكێك له چوار ئاراستەكان خۆرههلات، خۆرئاوا، باکور، باشووردا پێکدێت دیاری بکریت ئاراستەى ئاراستەبەر بەرامبەر \overrightarrow{AB} بریتییه لە باکور $- 30^\circ$ - خۆرههلات.

3 نمونە

دۆزینەوهی ئاراستەى ئاراستەبەر

ئاراستەبەر $(2, 5)$ ئاراستەى باو خێراییهکەى دەنویئیت. وینەى ئاراستەبەرەکی لە پووتەختى پۆوتاندا بکێشه، ئاراستەکەى بدۆزەوه بۆ نزیکتەین پله نزیکبکەوه.



هەنگاوى 1: وینەى ئاراستەبەرەکی لە پووتەختى پۆوتاندا بە دیاریکردنى خاڵى بنەرەت وەك خاڵى سەرەتا بکێشه خاڵى کۆتایى $(2, 5)$ دەبێت.

هەنگاوى 2: ئاراستەکەى بدۆزەوه سێگۆشە وەستاوى ABC بکێشه ئەو

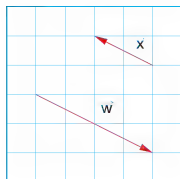
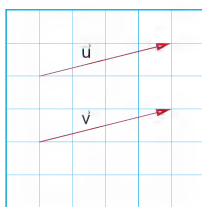
گۆشەیهى ئاراستەبەرەکی لهگەڵ بەشى موجهبى تەوهرى

یەكەم دروستى دەکات بریتییه لە \hat{A}

$$\hat{A} = \tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) \approx 60^\circ$$

3. ئاراستەبەر $(7, 3)$ هێزى پاكیسانی پاكیسهریكى دەریاییه، که کەشتى بارهه لگری خراپ بووى پى رادهکیشریت دەنویئیت وینەى ئاراستەبەرەکی لە پووتەختى پۆوتاندا بکێشه ئاراستەکەى بەنزیکراوهیى بۆ نزیکتەین پله بدۆزەوه.





دو ئاراسته‌بېر يەكسان دەبن ئەگەر ھەمان درېژى و ھەمان ئاراستەيان ھەيئەت بۇ نموونە $u = v$ بۇ دوو ئاراسته‌بېر يەكسان پيويست نىيە كە ھەمان خالى سەرەتاو خالى كۆتايان ھەيئەت.

$$|u| = |v| = 2\sqrt{5}$$

دو ئاراسته‌بېر تەرىپ دەبن ئەگەر راستەھيئەلەكانيان بەيەكتى تەرىپ بن، دىگونجى دوو ئاراسته‌بېر تەرىپ لەدرېژىدا جياوازبن بۇ نموونە: دوو ئاراسته‌بېر x و w تەرىپن ئەگەر دوو ئاراسته‌بېر يەكسان بن بەيەكتى تەرىپ دەبن.

$$|w| = 2\sqrt{5}$$

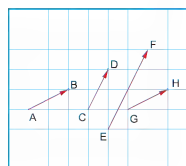
$$|x| = \sqrt{5}$$

ئاگادارىيە!

سەرنج بدە $\vec{AB} \neq \vec{BA}$ چونكە ئاراستەى يەكەم لە ئاراستەى دووهم جياوزە.

جياكردنەوہى ئاراسته‌بېر يەكسانەكان و ئاراسته‌بېر تەرىپەكان

لەويئەنى بەرامبەردا ئەمانە جياپكەوہ.

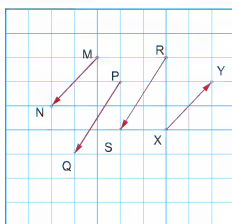


ئاراسته‌بېر يەكسانەكان

$\vec{AB} = \vec{GH}$ ئەو ئاراسته‌بېر يەكسانەكان ھەمان درېژى و ھەمان ئاراستەيان ھەيە جيايان بکەوہ.

ئاراسته‌بېر تەرىپەكان

$\vec{AB} \parallel \vec{GH}$ و $\vec{CD} \parallel \vec{EF}$ ئەو ئاراسته‌بېر يەكسانەكان ھەمان ئاراستەيان ھەيە يان ئەوانەى ئاراستەى پيچەوانە يان ھەيە جيايان بکەوہ.



4. لەويئەنى بەرامبەردا ئەمانە جياپكەوہ.



ئاراسته‌بېر يەكسانەكان.

ئاراسته‌بېر تەرىپەكان.

بەرەنجام Resultant ى دوو ئاراسته‌بېر ئەو ئاراسته‌بېر يەكسانەكان سەرەتايان دەنويئەت. بۇ كۆكردنەوہى دوو ئاراسته‌بېر بە ئەندازەى دەتوانى رېگاي لەسەرەوہ بۇ كلك يان رېگاي لاتەرىپ بەكاربېنئەت.

كۆكردنەوہى ئاراسته‌بېرەكان



نموونه	رېگايە
	<p>رېگاي لەسەرەوہ بۇ كلك</p> <p>خالى سەرەتاي ئاراسته‌بېر دووهم لەسەر خالى كۆتايى</p> <p>ئاراسته‌بېر يەكەم دابنى. بەرەنجامەكە برىتييە لەو ئاراسته‌بېر يەكسانەكان سەرەتاي خالى سەرەتاي ئاراسته‌بېر يەكەمەو خالى كۆتاييەكەشى خالى كۆتايى ئاراسته‌بېر دووهمە.</p>
	<p>رېگاي لاتەرىپ</p> <p>خالىك وەك خالى سەرەتاي دوو ئاراسته‌بېرەكە بەكاربېنئە.</p> <p>لاتەرىپەكە تەواوبكە بەزىادكردنى دانەيەك لەھەر ئاراستە بېرەك لەو خالە كۆتاييەدا كە خالى كۆتايى ئاراسته‌بېر يەكسانەكان. بەرەنجامەكە برىتييە لەو ئاراسته‌بېر يەكسانەكان سەرەتاي خالى ھاوبەشى دوو ئاراسته‌بېرەكە و خالى كۆتاييەكەشى لايەكەى تىرەكەيە.</p>

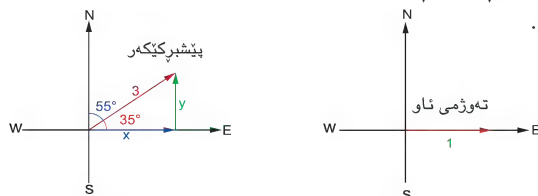
بۆلەۋى دوو ئاراستەبې بەجەبرى كۆپكەيتەۋە دوو پېكنەرەكە كۆپكەۋە ئەگەر $\vec{u} = \langle x_1, y_1 \rangle$ ۋە $\vec{v} = \langle x_2, y_2 \rangle$ ئەۋا $\vec{u} + \vec{v} = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle$

5 نەۋنە

جېبەجېكرىن لەسەر ۋەرزىش

بەلەمىك بەخېرايى 3 km/h بە ئاراستەبې باكور - 55° - خۆرەلەت. كەۋتە پى خېرايى تەۋزى ئاۋەكە يەك كىلۆمەترەلەھەر كاتزمېرىكدا بە ئاراستەبې خۆرەلەت. خېرايى بەلەمەكە دەبېتە چەندە ۋ ئاراستەكەبى چۆنە؟ خېرايىكەبى بۇ نىزىكتىن دەۋ ئاراستەكەبى بۇ نىزىكتىن پلە نىزىكەۋە.

ھەنگاۋى 1: ئەۋ دوو ئاراستەبې بېكىشە كە جوۋلەبى بەلەمەۋانەكە ۋ جوۋلەبى تەۋزى ئاۋەكە دەنۆيىن.



ھەنگاۋى 2: ئاراستەبې جوۋلەبى بەلەمەۋانەكە بەھەردو پېكنەرەكانىيەۋە بنوۋسە. دىرېزى ئەۋ ئاراستەبې جوۋلەبى بەلەمەۋانەكە دەنۆيىن بىرېتېيە لە 3 km/h كە گۆشەيەك پېكىدىن پېۋانەكەبى 35° لەگەل ئاراستەبى مۇجەبى تەۋەرى يەكەم.

$$\cos 35^\circ = \frac{x}{3} \quad \text{لەمەۋە دەست دەكەۋىت كە} \quad x = 3 \cos 35^\circ \approx 2.5$$

$$\sin 35^\circ = \frac{y}{3} \quad \text{لەمەۋە دەست دەكەۋىت كە} \quad y = 3 \sin 35^\circ \approx 1.7$$

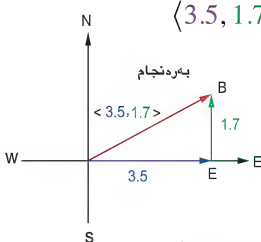
ئەۋ ئاراستەبې جوۋلەبى بەلەمەۋانەكە دەنۆيىن بىرېتېيە لە $\langle 2.5, 1.7 \rangle$

ھەنگاۋى 3: ئاراستەبې جوۋلەبى تەۋزى بەھەردو پېكنەرەكانىيەۋە بنوۋسە. لەبەرئەۋى تەۋزى بەخېرايى يەك كىلۆمەتر بە ئاراستەبى خۆرەلەت دەجولت ئەۋا پېكنەرى يەكەم يەكسانە بە 1 ۋ پېكنەرى دوۋم يەكسانە بە 0 ئەۋ ئاراستەبې جوۋلەبى تەۋزى بەخېرايى بىرېتېيە لە $\langle 1, 0 \rangle$

ھەنگاۋى 4: بەرەنجامى دوو ئاراستەبې بەدۆزەۋە ۋىنەبى بېكىشە دوو پېكنەرى ئاراستەبې يەكەم لەگەل دوو پېكنەرى ئاراستەبې دوۋم كۆپكەۋە

$$\langle 2.5, 1.7 \rangle + \langle 1, 0 \rangle = \langle 3.5, 1.7 \rangle$$

بەرەنجامى دوو ئاراستەبې بەرېتېيە لە ئاراستەبې $\langle 3.5, 1.7 \rangle$



ھەنگاۋى 5: دىرېزى بەرەنجامەكە ۋ ئاراستەكەبى بەدۆزەۋە.

دىرېزى بەرەنجامەكە بىرېتېيە لە خېرايى راستىنەبى

$$|\langle 3.5, 1.7 \rangle| = \sqrt{(3.5-0)^2 + (1.7-0)^2} \approx 3.9$$

خېرايى راستىنەبى بەلەمەۋانەكە بىرېتېيە لە 3.9 km/h بە نىزىكەبى ئاراستەبى

بەرەنجامەكە بە گۆشەيەك لەگەل بەشى مۇجەبى تەۋەرى يەكەم دروستى دەكات دىارى دەكرېت.

$$\tan \hat{A} = \frac{1.7}{3.5} \quad \text{لەمەۋە دەستدەكەۋىت كە} \quad \hat{A} = \tan^{-1}\left(\frac{1.7}{3.5}\right) \approx 26^\circ$$

لە باكور 64° خۆرەلەت بە نىزىكەبى لەبەرئەۋە 90° - 26° = 64°

لەبىرت بېت

نوسىنى ئاراستەبې بە پېكنەرەكانى يارمەتت دەدات بۇ دىارىكرىنى جوۋلانى ستوۋنى ۋ ئاسۋىي لە گواستەۋ لە خالى سەرەتاۋە بۇ خالى كۆتايى.

5. چى دەبىت ئەگەر ...؟ گرىمان بەلەماوانەكە بەخىرايى 4 km/h بەئاراستەى باكور -55°. خۆرھەلات جوولانەوہى خىرايى راستىنەى بەلەمەوانەكە چەندە؟ وئاراستەى جوولەكەى چەندە؟ خىرايىكەى بۇ نىكتىن دە وئاراستەكەى بۇ نىكتىن پلە بدۆزەوہ



بىرىكەوہ و تاوتويىكە

1. پوونىكەوہ ھۆى چىيە ئەو پارچە راستەھىلەى دوو سەرەكانى (0, 0) و (1, 4) نابىتە ئاراستەبى.
2. گرىمان دوو پىكنەرى ئاراستەبىك دەزانىت بەبى بەكارھىنانى ياساى دورى چۆن درىژىيەكەى دەدۆزىتەوہ؟

ناوہكان	پىناسە
ناراستەبى	
دۆنەموانەكان	ناراستەبى

3. پوونىكەوہ چۆن دوو ئاراستەبى جەبرىانە كۆدەكەيتەوہ؟
4. پىكخەرىبە ئەم ھىلكارىيە دروستبەكەوہ پاشان تەواوى بكە.

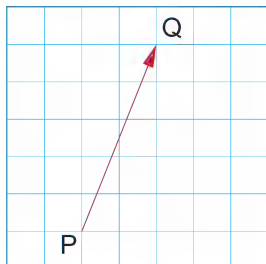


4-1 رايىنانەكان

رايىنانى ئاراستەكراو

زاراوەكان زاراوەكانى وانەكە بۇ وەلامدانەوہى ھەرىكەكە لەم پرسىارانە بەكاربىتە.

1. ئەگەر دوو ئاراستەبى ھەمان درىژى و ھەمان ئاراستەيان ھەبىت —؟ (يەكسان، تەرىبن).
2. ئەگەر دوو ئاراستەبى ھەمان ئاراستەيان ھەبىت يان لە ئاراستەدا پىچەوانەبن —؟ (يەكسان، تەرىبن).
3. —؟ ئاراستەبى نىشانەى گەورەيىتەى (درىژى، ئاراستەى).



4. ھەر ئاراستەبىك بەدوو پىكنەرەكەى بنوسە. \overrightarrow{AC} كاتىك $A(1, 2)$ و $C(6, 5)$
5. ئەو ئاراستەبى خالى سەرەتاي $M(-4, 5)$ و خالى كۆتايى $N(4, -3)$
6. ئاراستەبى \overrightarrow{PQ} ى بەرامبەر.

1 برپوانە نمونە

7. ھەر ئاراستەبىك لە پروتەختى پۆوتانەكاندا بكىشە درىژىيەكەى بۇ نىكتىن دەبى بدۆزەوہ. $\langle 1, 4 \rangle$
8. $\langle -3, -2 \rangle$
9. $\langle 5, -3 \rangle$

2 برپوانە نمونە

10. ھەر ئاراستەبىك لە پروتەختى پۆوتانەكاندا بكىشە ئاراستەكەى بۇ نىكتىن پلە بدۆزەوہ. ئاراستەبى $\langle 4, 6 \rangle$ تەوژمى ئاوى پوبارىك دەنۆيىت.
11. ئاراستەبى $\langle 5, 1 \rangle$ جوولەى فرۆكەيەك دەنۆيىت.
12. ئاراستەبى $\langle 6, 3 \rangle$ جوولەى تىرىك دەنۆيىت.

3 برپوانە نمونە

ھەريەك لەمانەى خوارەوہ جيابكەوہ.

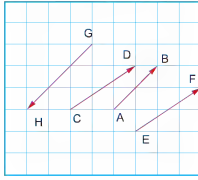
13 ئاراستەبەرە يەكسانەكان لەوینەى 1 دا.

14 ئاراستەبەرە تەریبەكان لەوینەى 1 دا.

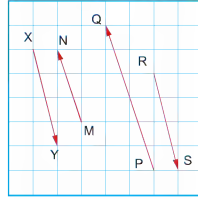
15 ئاراستەبەرە يەكسانەكان لەوینەى 2 دا.

16 ئاراستەبەرە تەریبەكان لەوینەى 2 دا.

وینەى 2



وینەى 1



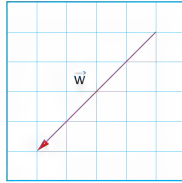
راھینان و جیبەجێکردنەكان

ھەر ئاراستەبەرێك بەدوو پێكنەرەكەى بنووسە.

17 \overrightarrow{JK} كاتێك $J(-6, -7)$ و $K(3, -5)$

18 \overrightarrow{EF} كاتێك $E(1.5, -3)$ و $F(-2, 2.5)$

19 \overrightarrow{W} (لەوینەى بەرامبەر)



وینەى ھەر ئاراستەبەرێك لە پروتەختى پۆتاندا بکێشە درێژییەكەى بۆ نزیكترین دەیەك نزیكەرەوہ.

20 $\langle -2, 0 \rangle$

21 $\langle 1.5, 1.5 \rangle$

22 $\langle 2.5, -3.5 \rangle$

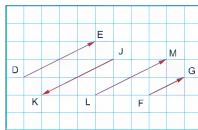
وینەى ھەر ئاراستەبەرێك لە پروتەختى پۆتاندا بکێشە ئاراستەكەى بۆ نزیكترین پلە نزیكەرەوہ.

23 ئاراستەبەرى $\langle 4, 1.5 \rangle$ جوولەى پاپۆرێك دەنوینیت.

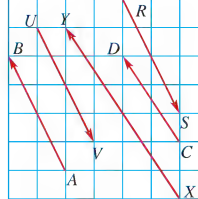
24 ئاراستەبەرى $\langle 3.5, 2.5 \rangle$ جوولەى ژێردەریایێك دەنوینیت.

25 ئاراستەبەرى $\langle 2, 5 \rangle$ جوولەى موشەكێك دەنوینیت.

وینەى 2



وینەى 1



ھەريەك لەمانەى خوارەوہ جيابكەوہ.

26 ئاراستەبەرە يەكسانەكان لەوینەى 1 دا.

27 ئاراستەبەرە تەریبەكان لەوینەى 1 دا.

28 ئاراستەبەرە يەكسانەكان لەوینەى 2 دا.

29 ئاراستەبەرە تەریبەكان لەوینەى 2 دا.

30 **فرپن** فرۆكەوانێك فرۆكە تايبەتیيەكەى بەخێرایيەكی نەگۆر 200 km/h

بەئاراستەى باكوور - 25° - پۆژەلەت لیدەخوړی، فرۆكەكە پووبەرپووی

بايەك دەبێتەوہ كە خێرایيەكەى 40 km/h بەئاراستەى باشوور - 45° -

پۆژەلەت. خێرایى راستینەى فرۆكەكە چەندە؟ ئاراستە راستینەكەى

چەندە؟

ھەردوو ئاراستە بپ كۆبكەوہ.

31 $\langle 1, 2 \rangle + \langle 0, 6 \rangle$

32 $\langle -3, 4 \rangle + \langle 5, -2 \rangle$

33 $\langle 0, 1 \rangle + \langle 7, 0 \rangle$

34 $\langle 8, 3 \rangle + \langle -2, -1 \rangle$

35 **بیری رەخنەگر** ئایا كۆكردنەوہ لە ئاراستەبەرەكاندا ئالۆگۆرە؟ واتە ئایا ئاراستەبەرەكانى

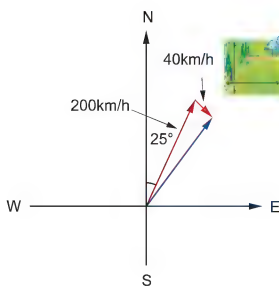
$\vec{u} + \vec{v}$ و $\vec{v} + \vec{u}$ یەكسانن؟ رێگای لەسەرەوہ بۆ كك بەكاربێنە بۆ كۆكردنەوہى ئاراستەبەرەكان

بەمەبەستى پروونكردنەوہى وەلامەكان.

راھینانى ئازاد

بۆ شیکارکردنى تەماشای
پرسیارەكان نمونەى

1	19-17
2	22-20
3	25-23
4	29-26
5	30



ھەر ئاراستەبېرىك بەدوو پېكئەرەكەى بنووسە، بۇ نىكتىرىن دەيەك نىكرابىتەوہ.

36 درىژى 15 ئاراستە 42° 37 درىژى 7.2 ئاراستە 9°

38 درىژى 12.1 ئاراستەى باكور 57° - خۆرھەلات 39 درىژى 5.8 ئاراستەى باكور 22° - خۆرھەلات.

40 **فىزىيا** ژوورى پۆلىك پەنجەرەيەكى تىدايە لە بنمىچەكەوہ نىكە بۇ

داخستنى داردەستىك بەكاردىت.



ا ھۆژىن دارەكەى بەئاراستەيەك گرتوہ 45° لەگەل زەوى ژوورەكەدا دروستدەكات. بەھىژىك برەكەى 44 نيوتن (N) بو، پالى بەليوارى سەرەوہى پەنجەرەكەوہ نا. ئەو پېكئەرە ستونىيەى ئاراستەبېرەكە بدۆزەوہ كە ھىژى پالئانى سەرپەنجەرەكە دەنويىت. وەلامەكەت بۇ نىكتىرىن دەيەك نىكەبەوہ.

ب نەشمىل دارەكەى بەئاراستەى 75° لەگەل پووى زەوى ژوورەكە گرت و

بەھىژىك برەكەى 44 نيوتن (N) بو پالى بەليوارى سەرەوہى

پەنجەرەكەوہ تا ئەو پېكئەرە ئەستونىيەى ئاراستەبېرەكە بدۆزەوہ كە ھىژى

پالئانى سەر پەنجەرەكە دەنويىت. وەلامەكەت بۇ نىكتىرىن دەيەك نىكەبەوہ.

ج بۇ داخستنى پەنجەرەكە، كام لەم دوو خويىندكارە پووبەرووى دژوارى كەمتر

دەبىتەوہ؟ كام لەو دوو پېكئەرە ئەستونىيە ھىژى پالپوہەنانيان گەورەترە؟

41 **ئەگەر** دلسۆز ژمارەكانى 1 و 2 و 3 و 4 لەسەر چەند پارچە كاغەزىك نووسى و لەناو

توورەكەيەكدا دايئا، بە ھەرپەمەكى پارچە كاغەزىكى پاكىشا وای دانا كە ئەمە پېكئەرەى ئاسۆيى

دەنويى، پاشان كاغەزىكى ترى پاكىشا بى ئەوہى كاغەزى يەكەم بگەرىنئىتەوہ بۇ ناو تورەكەكە

وای دانا كە ئەوہيان پېكئەرەى ستونى دەنويىت بۇ ھەمان ئاراستەبېر.

ا ئەگەرى ئەوہى ئاراستەبېرەكە (1, 2) بىت چەندە؟

ب ئەگەرى ئەوہى ئاراستەبېرەكە تەرىب بىت بە ئاراستەبېرى (1, 2) چەندە؟

42 **خەملاندن** ئاراستەبېرى (4, 6) بۇ تەواوكردى ھەريەك لەمانەى خوارەوہ بەكاربىنە.

ا وىنەى ئاراستەبېرەكە لەسەر كاغەزى پوونكردنەوہى بكىشە.

ب خەملاندنى ئاراستەى ئاراستەبېرەكە بۇ نىكتىرىن پلە نىكرابىتەوہ.

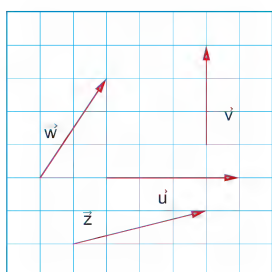
ج پېوانەى ئەو گۆشەيەى ئاراستەبېرەكە لەگەل راستەھىلى ئاسۆيدا دروستيدەكات بە

بەكارھىنانى گۆشەپېو.

د ھەژماركردى ئاراستەى ئاراستەبېرەكە بەبەكارھىنانى پېكئەرەكانى.

ھ بەراوردبەكە لەنيوان ئەو خەملاندنەى نيوان لقى (ب) دا و ئەو پېوانەيەى لە لقى (ج) دا

كردووتە، و ئەو ھەژمارەى لە لقى (د) دا ئەنجامداوہ.



ھەنگاوى **جۆراوجۆر** درىژى ھەريەكە لەم ئاراستەبېرەكە بدۆزەوہ

ئاراستەكەى ديارىبەكە. درىژىيەكەى بۇ نىكتىرىن دەيەك و

ئاراستەكەى بۇ نىكتىرىن پلە نىكەبەوہ.

44 \vec{v}

46 \vec{z}

43 \vec{u}

45 \vec{w}

بۇ ھەر ئاراستەبېرىك ئاراستەبېرىكى تر بدۆزەوۈ كەھەمان درېژى ھەبىت بەلام ئاراستەكەى جياوازىت پاشان ئاراستەبېرىك بدۆزەوۈ كە ھەمان ئاراستەى ھەبىت بەلام لەدرېژىدا جياوازىن.

$$\langle -3, 6 \rangle \quad 48$$

$$\langle 2, 0 \rangle \quad 47$$

$$\langle 8, -11 \rangle \quad 50$$

$$\langle 12, 5 \rangle \quad 49$$

ھەنگاۋى جۇراۋجۇر دوو ئاراستەبېرەكە كۆيكەوۈ پاشان درېژى بەرەنجام و ئاراستەكەى بدۆزەوۈ درېژىيەكەى بۇ نىكتىن دە و ئاراستەكەى بۇ نىكتىن پلە نىكتىكەوۈ.

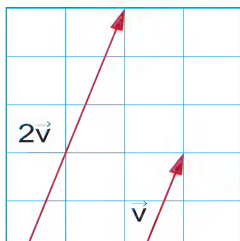
$$\vec{v} = \langle 4.8, -3.1 \rangle \text{ و } \vec{u} = \langle -2, 7 \rangle \quad 52$$

$$\vec{v} = \langle 2.5, -1 \rangle \text{ و } \vec{u} = \langle 1, 2 \rangle \quad 51$$

$$\vec{v} = \langle 5.2, -2.1 \rangle \text{ و } \vec{u} = \langle -1.2, 8 \rangle \quad 54$$

$$\vec{v} = \langle -2, 4 \rangle \text{ و } \vec{u} = \langle 6, 0 \rangle \quad 53$$

مېژوۋى بىركارى ئۆگەست موبىوس August Möbius لە سالى 1827 كىتېپكى بىلاۋكرەوۈ تىايدا باسى پارچە راستەھىلە ئاراستەكراۋەكان دەكات ئەوۋى ئەمرۆ بە ئاراستەبېرەكان دەناسرېت ئەو زاناىە لە كىتېپكەيدا باسى كىرەوۈ چۆن ئاراستەبېرىك لىكدانى ژمارەكەى راستى دەكرېت بۇ نموۋە: ئەگەر ئاراستەبېرى \vec{v} جۈولەى ئوتومبىلەك بنوئىت ئەوا ئاراستەبېرى $2\vec{v}$ جۈولەى ئاراستەبېرى دوۋەم دەنوئىت كە بەھەمان ئاراستە دەروات و خىرايەكەى دوو ئەوۋەندەى خىرايى يەكەمە.



ا پىكنەرى ھەرىكە لەودوۋ ئاراستەبېرى \vec{v} و $2\vec{v}$ بنوسە.

ب درېژى ھەرىكە لەو دوو ئاراستەبېرە بدۆزەوۈ و بەراۋرد لەنۆوان درېژىيەكانىدا بكة.

ج ئاراستەى ھەرىكە لەم ئاراستەبېرە بدۆزەوۈ بەراۋرد لەنۆوان ئاراستەكانىدا بكة.

د پرونىكەوۈ چۆن دوو پىكنەرەكەى ئاراستەبېرى $k\vec{v}$ دەدۆزىەوۈ كاتىك k ژمارەكەى راستى بىت و دوو پىكنەرەكەى \vec{v} زانراۋىت.

ه ئاراستەبېرەكە لىكدانى $k = -1$ بكة بۇ نووسىنى دژى \vec{v} بە دوو پىكنەرەكەىيەوۈ.

بىركىرەنەوۋى رەخنەگرانە ئاراستەبېرى \vec{u} كە درېژىيەكەى u بەئاراستەى خۇرئاۋايە كەچى

ئاراستەبېرى \vec{v} كە درېژىيەكەى v پوۋە و خۇرەلەتە.

باسى ھەرسى ئەنجامى كۆكرەنەوۋى ئەم دوو ئاراستەبېرە بكة.

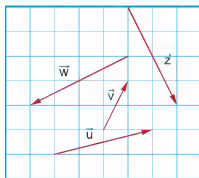
بنوسە بەراۋردبەكە لەنۆوان پارچە راستەھىلە و تىشك و ئاراستەبېرەدا. **57**

دەروازەيەك

لەسەر مېژوۋى بىركارى



موبىوس بەو پەتەى
لەوئىنەكەدا ديارە
ناوبانگى دەركرد كە
برىتېيە لە شىۋەيەكى
ئەندازىيى سى دورى
يەك پوۋ و يەك لاي
ھەيە.



58 كام لەم ئاراستەبرانە بە ئاراستەبىرى (2, 1) تەرىپە؟

- (ا) \vec{u} (ب) \vec{v}
(ج) \vec{w} (د) \vec{z}

59 ئاراستەبىرى (9, 7) جوولەى ھەلىكوپتەرىك دەنۆيىت ئاراستەى

ئەو ئاراستەبىرە بۇ نىكتىرىن پلە چەندە؟

- (ا) 38° (ب) 52° (ج) 128° (د) 142°

60 ئاراستەبىرى (11, 5) جوولەى كەشتىك دەنۆيىت درىژى ئاراستەبىرەكە بۇ نىكتىرىن يەكە نىكتىكە وه.

- (ا) 6 (ب) 8 (ج) 12 (د) 16

61 تەنھا وه لام (6, -3) خالى سەرەتاي ئاراستەبىرى \vec{AB} و (-2, -5) خالى كۇتايىكەيەتى، درىژى \vec{AB}

بۇ نىكتىرىن دەيەك بدۆزە وه.

بەرەنگارى و فراوانگردن

بىرت بىتە وه ئەو گۆشەيەى ئاراستەى ئاراستەبىر ديارىدەكات لەبەشى موجهى تەوهرەى يەكەمە وه دەرەچىت بە ئاراستەى پىچەوانەى مىلى كاتزمىر دەپيورىت. ئاراستەى ھەريەك لەم ئاراستەبىرە بدۆزە وه بۇ نىكتىرىن پلە نىكتىكە وه.

- (ا) $\langle -2, 3 \rangle$ (ب) $\langle -4, 0 \rangle$ (ج) $\langle -5, -3 \rangle$ (د) $\langle -3, -5 \rangle$

65 دەرياوانى فەرماندەى پاپۇرىك پلاندا دەنۆيت بۇ ئەوئەى لەناوچەيەكدا كە تەوژمى ئاوى دەريا بەئاراستەى خۆرەلات بەخىرايى 4 km/h دەروات دەرياوانى بكات. ئاراستەى جولەى پاپۇرەكە و خىرايىكەى بدۆزە وه بۇئەوئەى خىرايى پاستىيەكەى بكاتە 10 km/h و ئاراستە پاستىيەكەى باكور 75° خۆرەلات بىت (تەوژمى ئاوى دەرياكە بەھەند وەرگىرا وه) خىرايىكەى بۇ نىكتىرىن دەيەك و ئاراستەكەى بۇ نىكتىرىن پلە نىكتىكە وه.

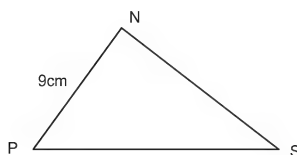
66 بۇ گەيشتن بەباخى گشتى، شوان دورى 3 km بەئاراستەى باكور 30° خۆرەلات پاشان 6 km بەئاراستەى خۆرەلات پاشان 4 km بەئاراستەى باكور 80° خۆرەلات پۇيشتن. درىژى ئەو ئاراستەبىرە چەندە كە پۇيشتنى شوان لەمالەكەيە وه بۇ باخى گشتى دەنۆيىت؟ ئاراستەكەى چەندە؟ درىژىيەكەى بۇ نىكتىرىن دەيەك و ئاراستەى بۇ نىكتىرىن پلە نىكتىكە وه.

پىداچوونە وهى لولپىچى

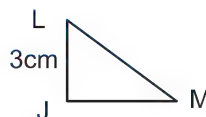
ھەريەكە لەم سستەمى ھاوكىشە ھىلىيانە بە روونگردنە وهى شىكارىكە (پۆلەكانى پىشوو)

- (ا) $\begin{cases} x+y=5 \\ 3y+15=2x \end{cases}$ (ب) $\begin{cases} x-2y=0 \\ 2y+x=8 \end{cases}$ (ج) $\begin{cases} x-y=-5 \\ y=3x+1 \end{cases}$

دوو سىگۆشەى JLM و NPS ھاوشىوون، چىوئەى سىگۆشەى JLM 12 cm و پووبەرەكەى 6 cm^2 پىوانەى داواكراو بدۆزە وه (پۆلەكانى پىشوو)



71 رووبەرى سىگۆشەى NPS



70 چىوئەى سىگۆشەى NPS

تاقىکردنەۋەى نىۋەى بەش

تاقىکردنەۋەى بەش ۋانەكان 1-1 تا 4-1.

1-1 بۆشايى پۇوتان ✓

ھەرىكە لەم خالانەى خوارەۋە لە بۆشايى پۇوتاندا بنوینە.

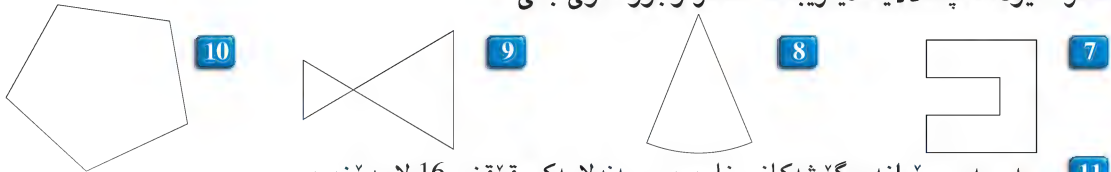
- 1 $(-3, 2, 1)$ 2 $(2, -3, -2)$ 3 $(3, 1, -3)$

لەبۆشايى پۇوتاندا وینەى ھەرىكە لەم ھاۋكىشە ھىلىيانە (رووتەختانەى) خوارەۋە بە پوونکردنەۋەىى بكىشە.

- 4 $2x - 2y + 4z = 8$ 5 $2x + y - 2z = -4.5$ 6 $x + 5y + 3z = 15$

2-1 چەندلايەكان ✓

ئەگەر شىۋەكە چەندلايە دىارىبەكە، ئەگەر ۋابوو ناۋى بنى.

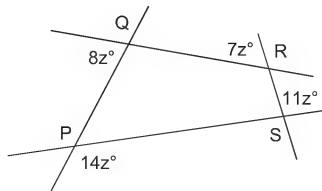


11 سەرجمەى پىۋانەى گۆشەكانى ناۋەۋەى چەندلايەكى قۇقىزى 16 لا بدۇزەۋە.

12 ستونىك بىنكەكەى شەشلايەكى رىكە پىۋانەى ھەر گۆشەيەكى ناۋەۋەى چەندە؟

13 وینەى بەرامبەر ھىلكارى باخىكى پەرژىن كراۋ پىشانەدات پىۋانەى ھەرىكە لە دەرە گۆشەكانى بدۇزەۋە.

14 پىۋانەى ھەرىكە لەگۆشەكانى دەرەۋەى دەلايەكى پىك بدۇزەۋە.

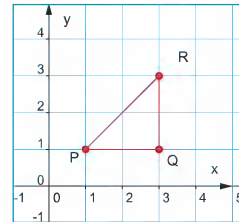
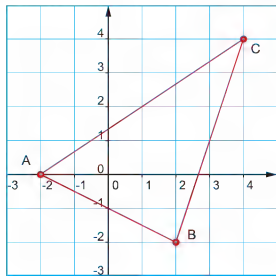


3-1 ھاورپژەى ئەندازەىى ✓

15 بىسەلمىنە دوو سىگۇشەى ABC و ADE كاتىك $A(-1, 2)$, $B(-3, -2)$, $C(3, 0)$, $D(-2, 0)$, $E(1, 1)$ ھاۋشۋەن

وینەى ھەر سىگۇشەيەك بەۋ ھاورپژە ئەندازەيەى رىژەكەى دىارىكراۋە بكىشە. ساغىبەكەۋە سىگۇشە بىنەپتەيەكە و وینەكەى ھاۋشۋەن.

16 رىژەى گەرەكرەنەكە 3 بىت. 17 رىژەى گەرەكرەنەكە 1.5 بىت.



4-1 ئاراستەبەرەكان ✓

وینەى ھەرىكە لەم ئاراستەبەرەنە لە پووتەختى پۇوتاندا بكىشە. دىرىيەكەى بۇ نىكتىرىن دەيەك ھەژماربەكە.

- 18 $(3, 1)$ 19 $(-2, -4)$ 20 $(0, 5)$

وینەى ھەرىكە لەم ئاراستەبەرەنە لە پووتەختى پۇوتاندا بكىشە. لارىيەكەى بۇ نىكتىرىن پلە ھەژماربەكە.

21 خىرايى با بە ئاراستەبەرى $(2, 1)$ نوینراۋە. 22 تەۋرمى ناۋى پروبارىك بەئاراستەبەرى $(5, 3)$ نوینراۋە.

23 ھىزى سىپرینگ بەئاراستەبەرى $(4, 4)$ نوینراۋە.

پووبەری بازە و چەندلارېكەكان

Area of circles and regular polygons



ئامانجەكان

- دۆزىنەۋى ياسايەك بۇ ھەژمارکردى پووبەرى بازە ۋە ياسايەك بۇ ھەژمارکردى چۆۋەكى ۋە بەكارھېنانىان
- دۆزىنەۋى ياسايەك بۇ ھەژمارکردى پووبەرى چەندلارېكەكان ۋە بەكارھېنانىان.

زاراۋەكان Vocabulary

بازە
Circle

چەقى بازە
Center of a circle

نيوۋەتيرەكى بازە
Radius of a circle

تيرەكى بازە
Diameter of a circle

چەقى چەندلاى رېك
Center of a regular polygon

ئەستوندىكى چەندلاى رېك
Apothem of regular polygon

چەقەگۈشە لەچەندلاى رېك
Central angle of a regular polygon

كى ئەمە بەكاردەھيئىت؟

تەپل ژەنەكان بۇ دەستكەۋتنى دەنگە ديارىكراۋەكان تەپلى پۆۋانە جياۋاز بەكاردېنن، ئەۋ دەنگانە تەپلەكان دەرىدەكەن بەندە بە پووبەرى پوۋە بازەنيەكەيەۋە. (نمۇنە 2).

بازە Circle كۆمەللە خالېكە لە پوۋتەختدا دوۋرى ھەريەكيان لەخالېكى زانراۋە

كە پېى دەۋترىت چەقى بازە يەكسانە بە نيۋەتيرەكى بازە (دريژى تيرەكى بازە

دوۋ ئەۋەندە نيۋەتيرەكەيەتى، (ئەۋ پارچە . لەۋىنە بەرامبەردا، A چەقى

بازەكەيە ۋ نيۋەتيرەكەى برىتييە لە $r = AB$ ۋ تيرەكەى برىتييە لە $d = CD$.

رېژەكى چۆۋەكى بازەكى C بۇ دريژى تيرەكەى d ژمارەكى نەگۈرە ۋ ناگۈرېت

بەگۈرېنى نيۋەتيرەكەى ئەۋ رېژەيەش ژمارەكى ناپېژەيە π بە پاى

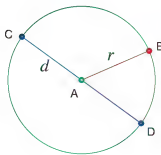
دەخوينرېتەۋە بەجۈرېك دەۋانۋىت بنووسىت $\pi = \frac{C}{d}$. ئەگەر C مان بەپېى d ھەژمارکرد

ئەۋا رېساي چۆۋەكى بازەمان دەستدەكەۋىت $C = \pi d$ يان $C = 2\pi r$ لەبەرئەۋەكى $d = 2r$

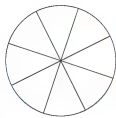
دەۋانۋىن چۆۋەكى بازە بەكاربېنن بۇ دۆزىنەۋەكى پووبەرىكەى. بازەكە دابەشېكە

ۋ پارچەكان رېكېخە بەجۈرېك شۆۋەيەكت بۇ دەرىچىت ھاۋشۆۋەكى لاتىريېك بىت

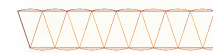
ۋەك لە شۆۋەكەدا ديارە.



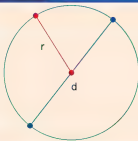
بەنكەى لاتىريېكە يەكسانە بەنيۋەكى چۆۋەكى بازەكە بەنزيكەيى يان πr . بەرزيكەشى نيۋەتيرەكى بازەكەيە بەنزيكەيى لەمەشەۋە دەستدەكەۋىت پووبەرى بازەكە بەنزيكەيى. $A = \pi r \times r = \pi r^2$.



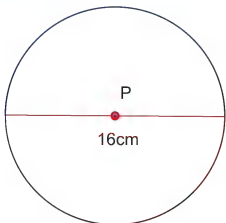
ھەر كاتېك ژمارەكى پارچەكان زياترېت، پووبەرى لاتىريېكە لە پووبەرى بازەكە نزيكەيەۋە، بەمەش بەھا نزيكەيەكەى لەبەھا راستىيەكەى نزيكتردەيەۋە.



چۆۋە ۋ پووبەرى بازە



كاتېك بازەنيەك نيۋەتيرەكەى r ۋ تيرەكەى d بىت چۆۋەكى c بەياساي $C = \pi d$ يان $C = 2\pi r$ ۋ پووبەرىكەى بە ياساي $A = \pi r^2$ ھەژماردەكرېت.



ھەژمارکردى چۆۋە ۋ پووبەرى بازە

داۋاڪراۋ ھەژماربەكە.

پووبەرى بازەنى بەرامبەر.

ياساي پووبەرى بازە.

تيرە دابەش 2 كە بۇ دۆزىنەۋەكى نيۋەتيرە، پاشان لەجياتى نيۋەتيرەكە

بەھاكەى دابنى ئىنجا سادەكى بەكە.

پووبەرى بازەكە $A = 64\pi \text{ cm}^2$

$$A = \pi r^2$$

$$A = \pi (8)^2$$

$$A = 64\pi$$

ب نیوہتیرہی بازنیہک چئوہکەمى 24π م بئت.

$$\begin{aligned} C &= 2\pi r && \text{ياسای چئوہی بازنہ} \\ 24\pi &= 2\pi r && \text{لہجیاتى چئوہ بہاگہى دابنئ.} \\ 24 &= 2r && \text{ہەردوولا دابەشى } \pi \text{ بکە.} \\ r &= 12 && \text{ہەردوولا دابەشى 2 بکە.}\end{aligned}$$

ج چئوہی بازنیہک پرووبہرەکەمى $9x^2\pi$ بئت بہپئى π و x ەوہ.

ہەنگاوى 1: نیوہتیرہ r بہپئى x ہەژماربکە.
 ہەنگاوى 2: چئوہی بازنہکە ہەژماربکە بہکارہئانی بہہای نیوہتیرەکە.

$A = \pi r^2$	ياسای پرووبہر
$9x^2\pi = \pi r^2$	لہجیاتى A بہاگہى دابنئ
$9x^2 = r^2$	ہەردوولا دابەشى π بکە
$3x = r$	رہگى دووجای ہەردوولا
	وہرہگرہ.

$C = 2\pi r$	ياسای چئوہ
$C = 2\pi(3x)$	بہہای نیوہتیرەکە
	لہجیاتى دابنئ
$C = 6x\pi$	کورتنى بکەوہ.

1. پرووبہرى بازنیہک بہپئى π ہەژماربکە کہ چئوہکەمى $(4x-6)\pi$ م بئت.



نمونہ 2 جیبہجیکردن لہ میوزیک

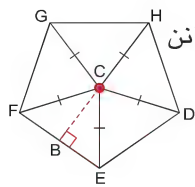
جاز لەسى تەپل کە تیرەکانیان لہ 10ئنج، 12ئنج، 14ئنج، پیکدئت پرووبہرى ہەر تەپلیک بدۆزەوہ و وەلامەکەت لہ نزیکترین دەیەک نزیکبکەوہ.

تیرہ 14ئنج	تیرہ 12ئنج	تیرہ 10ئنج
$r = \frac{14}{2} = 7$ $A = \pi(7)^2$	$r = \frac{12}{2} = 6$ $A = \pi(6)^2$	$r = \frac{10}{2} = 5$ $A = \pi(5)^2$
$A \approx 153.9$	$A \approx 113.1$	$A \approx 78.5$
پرووبہر 153.9 ئنج دووجایە.	پرووبہر 113.1 ئنج دووجایە	پرووبہر 78.5 ئنج دووجایە.

لەبیرت بئت

کللی π لہ بژمیری
رونکردنەوہدا باشتەین
نزیکەرەوہیہ بۆ بہہای π
چاوہروان بہ تا لہ
ہەژمارکردنی تەواودەبئت
پیش ئەوہی نزیکبکەیت.

2. چئوہی ہەر تەپلیکی نمونہی 2 ہەژماربکە.



چەقى Center چەندلاى پړك خالێكى ناوہەيەتى، دوورییەكەى لەسەرەكانیہوہ یەكسان

ئەستونەكی **Apothem** چەندلاى پړك دوورى نیوان چەق و یەكك لەلایەكانیہتى،

ئەوگۆشەيەى سەرەكى چەقى چەندلاپړكەكە بئت و لایەكانى بەدوو سەرى ھاوسىی

یەكترىدا برۆن چەقەگۆشەى **Central angle** چەندلاپړكەكەيە.

ھەموو چەقەگۆشەكانى چەندلاى پړك لە پۆوانەدا یەكسان. پۆوانەى ھەریەكێكان $\frac{360^\circ}{n}$

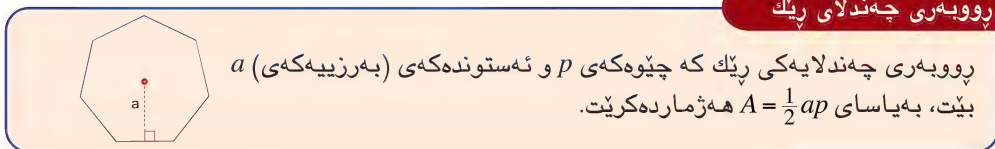
كاتێك n ژمارەى لایەكانى چەندلاپړكەكە بئت.

بۆ دۆزینەوہى پرووبہرى چەندلاى پړك كەژمارەى لایەكانى n و ئەستونەكەى a و درژى لایەكى s بئت

چەندلايەكە دابەش بکە بە n سیگۆشەى دوولایەكسان پرووبہرى ھەرسىگۆشەيەك دەكاتە $\frac{1}{2}as$.

پرووبہرى چەندلايەكە $A = \frac{1}{2}a(ns) = \frac{1}{2}ap$ یان $A = \frac{1}{2}ap$ $p = ns$ ھیمابئت بۆ چئوہى چەندلاپړكەكە.

پرووبہرى چەندلاى پړك



پرووبہرى چەندلايەكى پړك كە چئوہكەى p و ئەستونەكەى (بەرزىيەكەى) a بئت، بەياسای $A = \frac{1}{2}ap$ ھەژماردەكرئت.



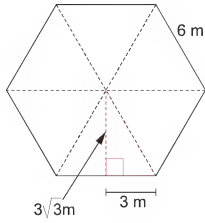
نمونە

3

دۆزىنەۋەى پروبەرى چەندلاى رىك

پروبەرى ھەرىكەت لىم چەندلاىرىكانە بدۆزەۋە ۋەلامەكەت نىزىكىكەرەۋە بۇ نىزىكتىن دەيەك.

شەشلايەكى رىك درىژى لايەكەى 6 m بىت.



چىۋەى چەندلايەكە دەكاتە 36 m (6 × 6) شەشلاى رىك دابەش دەبىت بۇ 6 سىگۇشەى رىك درىژى بىكەكەى 6 m . لەۋەشەۋە دەرەچىت كە ئەستوندەكى شەشلاىرىكەكە برىتتە لە 3√3

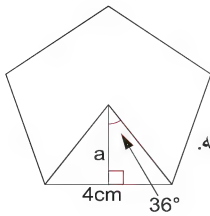
$$A = \frac{1}{2}ap \quad \text{ياساى پروبەرى چەندلا.}$$

$$A = \frac{1}{2}3\sqrt{3} \times 36 \quad \text{لەجىياتى دابنى.}$$

$$A = 54\sqrt{3} \approx 93.5 \quad \text{سادەبەكە ونزىكىكەۋە بۇ نىزىكتىن دەيەك.}$$

پروبەرى شەشلايەكى رىك بەنزيكەى دەكاتە 93.5 m²

پىنجلايەكى رىك درىژى لايەكەى 8 cm بىت.



ھەنگاۋى 1 وىنەى پىنجلايەك بىكشە، سىگۇشەيەكى دولايەكسان بىكشە سەرەكەى چەقى چەندلايەكە بىت و بىكەكەى يەكى لەلايەكانى پىنجلايەكە بىت. پىۋانەى چەقەگۇشەى چەندلايەكە. $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. لەتەكەرى چەقەگۇشەكە بىكشە تا سىگۇشەيەكى گۇشەۋەستات دەستبەكەۋىت.

ھەنگاۋى 2: پىژەى سىگۇشەى tan بەكاربىنە بۇ دۆزىنەۋەى ئەستوندەك a.

$$\tan 36^\circ = \frac{4}{a} \quad \text{پىناسەى پىژەى سىگۇشەى (tan)}$$

$$a = \frac{4}{\tan 36^\circ} \quad \text{بەھاي a ھەژمارىكە.}$$

ھەنگاۋى 3: ئەستوندەك و درىژى لايەكەى بەكاربىنە بۇ ھەژماركىردنى پروبەرى 5

$$A = \frac{1}{2}ap \quad \text{لاپىكەكە. ياساى پروبەرى چەندلا.}$$

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\tan 36^\circ} \right) (5 \times 8) \quad \text{لەجىياتى دابنى.}$$

$$A \approx 110.1 \quad \text{سادەبەكە ونزىكىكەۋە بۇ نىزىكتىن دەيەك}$$

پروبەرى 5 لايەكە بەنزيكەى دەكاتە 110.1 cm²

لەبىرت بىت

لە سىگۇشەى گۇشە
ۋەستادا تانجىتى گۇشە
لاى بەرامبەر
= لاى تەنىشت

3. پروبەرى ھەشتلايەكى رىك ھەژمارىكە كە درىژى لايەكەى 4 m بىت.

خالى
چاۋدىرى



بىرىكەۋە و تاۋتوبىكە

1. پەيۋەندى نىۋان π وچىۋەى بازىنە پروبەرىكەۋە.
2. باسى چۆنىەتى ھەژماركىردنى چەقەگۇشەى چەندلايەكى رىك كە لە n لا پىكەھاتبىت.
3. پىكخەرىبە ئەم خىشتەيە دروست بىكە و تەۋاۋى بىكە.

چەندلاى رىك درىژى لايەكەى 1 بىت				
چەندلا	ژمارەى لايەكان	چىۋەكەى	پىۋانەى چەقەگۇشەى	ئەستوندەك پروبەرى
سىگۇشە				
چوارگۇشە				
شەشلا				



رايھىنانى ئاراستەكراو

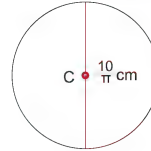
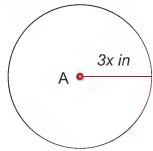
1 زاراۋەكان چۆن ئەستونىدەكى چوارگۆشەيەك دەۋزىتەۋە درىژى لايەكى 5 يەكە بىت؟

1 برۋانە نموونە

بدۆزەۋە.

2 چۆۋەى ئەم بازىنەيەى خوارەۋە.

3 پوۋبەرى ئەم بازىنەيەى خوارەۋە.



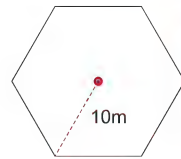
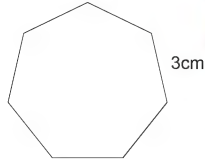
4 چۆۋەى بازىنەيەى پوۋبەرىدەكى $36\pi \text{ m}^2$

5 خواردن چىشتخانەى پىتزاى فورات سى قەبارەى جياواز لە پىتزا پىشكەش دەكات كەتيرەكانى يەك لەدۋايەك 15 cm و 25 cm و 40 پوۋبەرى ھەر پىتزاىەك ھەژمارىكە و نىكىبىكەۋە بۆ نىكىترىن دەيەك

2 برۋانە نموونە

3 برۋانە نموونە

پوۋبەرى ھەريەك لەم چەندلاپىكانە بدۆزەۋە و نىكىكراپىتەۋە بۆ نىكىترىن دەيەك



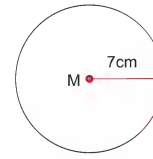
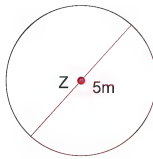
8 سىگۆشەيەكى رېك ئەستونىدەكى 2 cm بىت. 9 بازىنەيەى چۆۋەكى 5 m بىت.

رايھىنان و جىبەجىكرىدەكان

بەپى π ئەو ئەنجامانەى خوارەۋە بدۆزەۋە.

11 چۆۋەى ئەم بازىنەيە

10 پوۋبەرى ئەم بازىنەيە

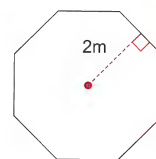
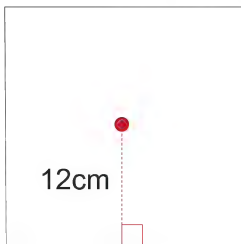


12 تيرەى بازىنەيەى چۆۋەكى 10 m بىت.

13 ۋەرزىش رايھىنەرىكى ئەسپ سى ھەلەبەى جياواز بەكاردەھىننىت كەيەك لەدۋاي يەك تيرەكانيان 7 m و 10 m و 13. پوۋبەرى ھەريەكە لە ھەلەبەكان بدۆزەۋە و نىكىبىكەۋە بۆ نىكىترىن دەيەك.

سەيرى	بۇ شىكارىدەكى
نمۇنەى	پرسىارەكان
1	12-10
2	13
3	17-14

پوۋبەرى ھەريەك لەم چەندلاپىكانە بدۆزەۋە نىكىبىكەۋە بۆ نىكىترىن دەيەك.



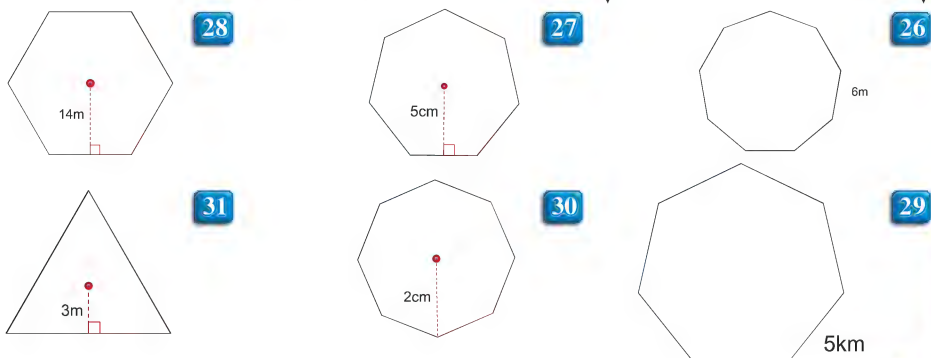
17 پىنجلايەكى رېك ئەستونىدەكى 2 km

16 نۆلەيەكى رېك چۆۋەكى 144 m بىت.

چەقەگۆشەى ھەرىكە لەم چەندلا پێكانەى خوارەو دەۆزەو.

- 18 سېگۆشەىكى پێك 19 چوارگۆشە 20 پېنجلا 21 شەشلا
22 حەوتلا 23 ھەشتلا 24 نۆلا 25 دەلا.

پووبەرى ھەرىكە لەم چەندلا پێكانە بۆ نېكتىرېن دەىكە دەۆزەو.



زېندەزانى دەتوانرېت تەمەنى درەختكە بخەملېنرېت بەبەكارھېنانى ياساى $a = \frac{r}{w}$ كاتېك r ھېماى نېوەتېرەى درەختكە بېتوېكلەكەى بېت و w ھېماى ناوئەندە ژمېرەى ئەستورى ئەلقەكانى درەختكە بېت. تەمەنى دارى (سندىان) بە پووبەرى بخەملېنە كە چۆوگەى 150 cm و ئەستورى توېكلەكەى 0.2 cm وپانى ئەلقەكانى 0.5 cm بېت.

ھەلە لە شېكرەنداو دا دوو خويندكار پووبەرى بازەنەكەيان بەو دوو شېوہەى خوارەو دۆزىيەوە كاميان توشى ھەلەبوون؟ لەكوى؟

ب	ا
نېوەتېرەى بازەنەكە يەك مەترە لەبەر	نېوەتېرەى بازەنەكە 2m لەبەر
ئەوہى چۆوگەى $2\pi \cdot m$ پووبەرىكەى	ئەوہى چۆوگەى $2\pi \cdot m$ پووبەرىكەى
$A = \pi(1^2) = 4\pi$ مەتر دووجا	$A = \pi(2^2) = 4\pi$ مەتر دووجا

پېوانە نادىارەكان بەپىى π دەۆزەو.

تېرە	نېوەتېرە	پووبەرى	چۆو
6			
		100	
	17		
			36π

ھەنگاوى جۆراوچۆر سالار نەخشە بۆ باخچەىك دەكېشېت بەدەورى گۆمېك ئاوكە لەشېوہى شەشلاىەكى پێك دابېت درېژى لاىەكى 60 m بېت. ئەگەر باخچەكە لەشېوہى بازەنەىكە دابېت و 10 m دوربېت لە ھەرسەرېك لەسەرەكانى گۆمەكە پووبەرى باخچەكە چەندە؟ وەلامەكەت بۆ نېكتىرېن دەىكە نېكېكەو.

بۆ ھېماى وەستان لەياساى ھاتوچۆدا شېوہى ھەشتلاىەكى پێك بەدو جۆر پېوانە ھەىە 30 cm و 36 cm



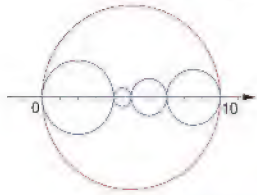
- ا پووبەرى ھېماى يەكەم بۆ نېكتىرېن دەىكە دەۆزەو.
ب پووبەرى ھېماى دووہم بۆ نېكتىرېن دەىكە دەۆزەو.
ج پېژەى سەدى بۆ پووبەرى زىادكراو لە كانزاي پېوېست بۆ دروستكرەنى جۆرى دووہم لەباتى جۆرى يەكەم چەندە؟

پېوانە ھەندېك لەئەندازىاران پەوپەوہىەك بەكاردەھېنن كە بە دەورى تەوہرەىكدا دىخولېتەوہ بۆ پېوانى دورىيەكان بەخولانەوہى پەوپەوہەكە و ژمارەنى جارى خولانەوہەكى تېرەى ئەو پەوپەوہىە دەۆزەو ئەگەر بزانىت چۆوگەى يەك مەترە.



زاناكانى پووبەك ناسى
لېكۆلېنەوہ لەسەر
ئەلقەكانى درەختەكان
دەكەن بۆ
دەرئەنجامھېنانى ئەو
گۆرانانەى كە لە
شېوازەكانى
نموونەكانيان
پوويانداوہ.

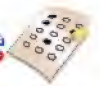
- 41 **بیری رهنهگر** کام یهكك لهم دوو میزه زوړترین خلك دهرن میژیکي لاکشیهی درژییهکی 6 m وپانییهکی 4 m بیټ پان میژیکي خړ تیرهکی 6 m بیټ؟ بهنریکهی چهند کس لهسر میزهکان ددهنیشن؟ بیروکهکان پروونیکهوه.



- 42 **بنوسه** چهقی هر بازنهیهك له وینهی بهرامبر دهكهوینه سر راستههیلای ژمارهکان. پهیوهندی نیوان چپوهی بازنه گهورهك و چپوهی ههریهك له بازنهکانی تر پروونیکهوه.



ناماده کردن یو تاقیکردنهوه



- 43 چپوهی ههشتلایهکی پکی بهرامبر بو نریکترین سانتیمهتر چهند؟

(ا) 5 (ب) 40 (ج) 20 (د) 68

- 44 کام لهم پیزانهی خواروه π دهنوینت کاتیک C چپوهی بازنهك و d تیرهکی بیټ.

(ا) $\frac{C}{d}$ (ب) $\frac{4C}{d^2}$ (ج) $\frac{d}{C}$ (د) $\frac{d}{2C}$

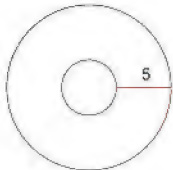
- 45 ناراس میژیکي بازنهیی هیه تیرهکی 2 m . دهیوینت لهسر پرووهکی وینهی لاکشیهك كه درژییهکی 2 m وپانییهکی 1 m بیټ و 4 گوښه كه درژی ههرلایهکی $\frac{1}{2}$ m بیټ بکیشیت. کام یهكك لهمانه ئهسته می ویستی ناراس دهردهپریت.

- (ا) دواي کیشانی وینهی لاکشیهك هیچ جیگایهك نامینیتوه.
- (ب) ناراس ناتوانیت لاکشیهك لهسر پرووی میزهك بکیشیت درژییهکی 2 m بیټ.
- (ج) ناتوانریت وینهی چوارگوښهكان بکیشیت.

- (د) هیچ جیگایهك لهسر پرووی میزهك نامینیتوه بو کیشانی 4 چوارگوښهك درژی لای ههریهکیان $\frac{1}{2}$ m بیټ

به رهنگاری و فراوانکردن

- 46 وینهی بهرامبر دوو بازنه دهنوینت كه ههمان چهقیان هیه نیوهتیرهی گهورهك 5 cm زیاتره له نیوهتیرهی بچوکه كه جیاوازی نیوان چپوهی هردوو بازنهك بهپی π بدوزهوه.



- 47 **جهر** یاسایهك بو ههژمارکردنی پروبهی بازنه بهپی چپوهکی بنوسه.
- 48 **بیری رهنهگر** پروونیکهوه كه پروبهی ئه چهندلا پیکه ژماره لایهکانی n له پروبهی بازنهیهك نریکدهبیتهوه ههتا ژماره n زیادبكات.

پیداچونهوهی لولپچی

ئهو نهخشه هیلییه بنوسه كه ههر خشتهیهك دهینوینت. (پولهکانی پشوو)

x	-3	0	4	9
y	2	-1	-5	-10

50

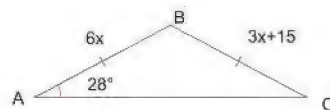
x	-2	0	5	10
y	-19	-13	2	17

49

ئهمانه بدوزهوه. (پولهکانی پشوو)

AB 52

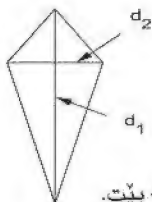
mB 51



ئهمانه بدوزهوه. (پولهکانی پشوو)

- 53 تهگه بزانی $d_1 = 20$ و پروبههکی $A = 14$ یهکی پروبه

- 54 پروبهی نیمچه لاتهریبهك بکهکانی یهك لهواي یهك 3 m و 6 m و بهرییهکی 4 m بیټ.



ھەندىك لە ياساكانى بۆشايى

Formulas in 3 dimensions





كى ئەمە بەكار دەھيئەت؟

مەلەوانەكانى ژىرئو پۇتەنەكانى بۆشايى
بەكار دەھيئەت بۇ دۆزىنەۋى دورى نۆۋان دوخالى
ژىرئو (نمونه 5)

چەندروو Polyhedron لەچار پروو يان زياتر پىكىدەت
كە تەنھا لە لايەكانىدا يەكتىرى دەپن. پوازك و ھەرەم چەندروون بەلام لولەك و قوچەك بەچەند
پوودا دانانرەت.

ئامانجەكان

- ياساى ئۆلەر بۇ دۆزىنەۋى
ژمارەى سەرولايەكان و
پوۋەكانى چەندروو
بەكار دەھيئەت.
- ياساى دورى پەرەپىدەدات لە
بۆشايىدا و بەكارىدەھيئەت.
- ياساى پۇتەنى ناوەرەستى
پارچە راستەھيئەلەبۆشايىدا
پەرەپىدەدات و بەكارى
دەھيئەت.

ئەم شىۋە ئەندازەيىانە چەندروو نىن	ئەم شىۋە ئەندازەيىانە چەندروون
	

پەيوەندىيەك ھەيەكە ژمارەى سەرەكان و ژمارەى لايەكان و ژمارەى پوۋەكان لەچەند پوودا
بەيەكەۋە دەبەستەت.

زاراۋەكان Vocabulary

چەندروو
Polyhedron

ياساى ئۆلەر Euler's formula

ئەگەر V ژمارەى سەرە E ژمارەى لايەكانى و F ژمارەى پوۋەكانى چەندروۋىيەك بن ئەوا.

$$V - E + F = 2$$




نمونه 1

بەكارھيئەتەنى ياساى ئۆلەر

ژمارەى سەرەكان ولايەكان و پوۋەكانى بدۆزەۋە و بەكارىان بىئە بۇ پاسادان لەراستى
ياساى ئۆلەر.

ب




$$F = 7 \quad E = 15 \quad V = 10$$

$$10 - 15 + 7 = 2$$

ياساى ئۆلەر بەكارىيئە
سادەبەكە. $2 = 2$ ✓

ا

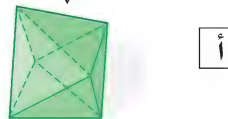


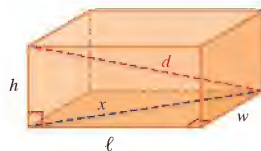
$$F = 4 \quad E = 6 \quad V = 4$$

$$4 - 6 + 4 = 2$$

ياساى ئۆلەر بەكارىيئە
سادەبەكە. $2 = 2$ ✓

1. ژمارەى سەرەكان ولايەكان و پوۋەكانى بدۆزەۋە و بەكارىان بىيئە بۇ
پاسادان لە راستى ياساى ئۆلەر.





تیرەى چەندروو ئەو پارچە راستەھێلەىە دوو سەر بەیەك دەگەییەنیت و ناكەوێتە هیچ پرویەك لە پروەكانى. وێنەى بەرامبەر یەكێك لەتیرەكانى d لاكێشە تەریبەكە پروندەكاتەوہ بۆ ئەوێ درێژى تیرەكە ھەژماربەیت دووجار سەلمێنراوى فیتاگۆرس بەكاربێنە.

$$d^2 = h^2 + x^2 \quad x^2 = \ell^2 + w^2$$

پاش لەجیاتى دانانى x^2 بە بەھاكەى دەردەچیت كە $d^2 = h^2 + \ell^2 + w^2$

تیرەى لاكێشە تەریب



درێژى تیرەى لاكێشە تەریبێك كە درێژییەكەى ℓ و پانییەكەى w و بەرزىیەكەى h بێت بریتییه لە

$$d = \sqrt{h^2 + \ell^2 + w^2}$$

نمونە 2 بەكارھێنانی سەلمێنراوى فیتاگۆرس لە بۆشاییدا بدۆزەوہ

ئەمانە بدۆزەوہ.

أ درێژى تیرەى ئەولاكێشە تەریبە بدۆزەوہ كە درێژى 3 cm و پانی 4 cm و بەرزى 5 cm

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{9 + 16 + 25} \\ &= \sqrt{50} \approx 7.1 \end{aligned}$$

بەھای ℓ و w و h لەجیاتى بکە. سادەبکە.

درێژى تیرەكە بەنزیكەى 7.1 cm

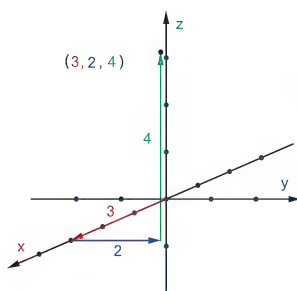
ب بەرزى لاكێشە تەریبێك كە درێژى 12 m و پانی 8 m و درێژى تیرەكەى 18 m بێت.

$$\begin{aligned} 18 &= \sqrt{8^2 + 12^2 + h^2} \\ (18)^2 &= 8^2 + 12^2 + h^2 \\ 324 &= 64 + 144 + h^2 \\ h^2 &= 116 \\ h &= \sqrt{116} \approx 10.8 \end{aligned}$$

بەھای ℓ و w و h لەجیاتى بکە. ھەردولا دوچابکە. سادەبکە. بەھای h^2 ھەژماربکە. رەگى دوچای ھەردولا وەرگەرە.

بەرزى لاكێشە تەریبەكە بەنزیكەى 10.8 m

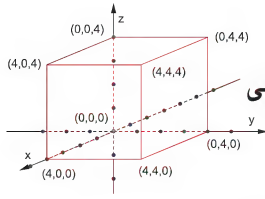
2. درێژى تیرەى خشتەكێك بدۆزەوہ كە درێژى لایەكى 5 cm بێت.



لەبیرت بێت بۆ دیاریکردنى شوێنى خالێك لەسەر پروتەختى پۆتانەكان پێویستت بە پۆتانەكەى ھەیه و بۆ دیاریکردنى خالێك لە بۆشاییدا 3 جێكەوتت پێویستە. ھەروەھا لەبیرت بێت تەوہرى بۆشایى پێویستى بە 3 تەوہرە ھەیه وەك لەوێنەى بەرامبەردا دیارە. ھەموو سیانە رێكخراویك (x, y, z) تەنھا خالێك دیاریدەكات لەتەوہرى بۆشاییدا. ھەروەھا ھەموو خالێك سیانە رێكخراویك دیاریدەكات. بۆ دیاریکردنى خالى $(2, 3, 4)$ لەخالى بنەرەتەوہ $(0, 0, 0)$ دوو یەكە بجولێ بۆ پێشەوہ لەسەر تەوہرى یەكەم، پاشان سێ یەكە بۆ لای راست تەریب بەتەوہرى دووھم پاشان 4 یەكە بۆ سەرەوہ تەریب بەتەوہرى سێیەم.

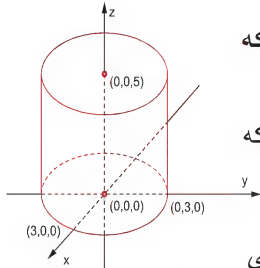
نمونه 3

وینەکیشانی تەنیک لەبۆشایی پۆتاند.



ا خشتەکی بکێشە درێژی لایەکی 4 یەکو پۆتانی سەرەکانی سالب نەبن، یەکیک لەسەرەکانی خالی بنەرەت بێت.

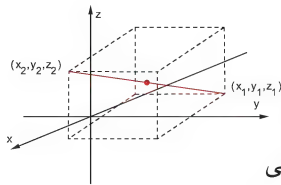
خشتە 8 سەری هەیە کە بریتین لە خالەکانی $(0, 0, 0)$ ، $(4, 4, 4)$ ، $(0, 4, 4)$ ، $(4, 0, 4)$ ، $(4, 4, 0)$ ، $(4, 0, 0)$ ، $(0, 0, 4)$ ، $(0, 4, 0)$



ب لۆولەکی بکێشە بەرزیهکی 5 یەکو نیووتیرە بکە 3 یەکو بێت و چەقی بکە خوارەوی خالی بنەرەت $(0, 0, 0)$ بێت

چەقی بکە خوارەوی $(0, 0, 0)$ دیاریکە لەبەرئەوی بەرزیه لۆلەکە 5 یەکیە، ئەوا چەقی بکە سەرەوی لەسەر خالی $(0, 0, 5)$ لە خالەکی دیاریکە لەلایەکی تریشەو نیووتیرە بکە 3 یەکیە ئەوەش واتا بکە خوارەوی تەوهری دووم لەخالی $(0, 3, 0)$ و تەوهری یەکم لەخالی $(3, 0, 0)$ دەبێت. بکە خوارەوی بکێشە پاشان بکە سەرەوی تەریب بە بکە خوارەوی بکێشە بکەکانی بەیەک بگەیەنە.

3. وینە قوچەکیکی بازەیی و ستاو بکێشە کە بەرزیهکی 7 یەکو و نیووتیرە بکە 5 یەکو چەقەکی خالی بنەرەت $(0, 0, 0)$ بێت.



بۆ ئەوەی دووری نیوان دوخالی $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$

لەبۆشاییدا بدۆزیتەو وینە لاکێشە تەریبیک بکێشە یەکیک

لەتیرەکانی \overline{AB} بێت. یاسای هەژمارکردنی درێژی تیرە بەکاربهێنە.

هەرەها دەتوانیت یاسایەکی هاوشتیوی یاسای دووری لە پووتەختی

پۆتانهکاندا بەکاربهێنیت هەرەها بۆ هەژمارکردنی پۆتانهکانی ناوهراستی پارچە

راستهیل یاسایەکی هاوشتیوی یاسای پۆتانی خالی ناوهراستی پارچە راستهیل لە پووتەختی

پۆتانهکاندا بەکاربهێنیت.

یاسای دووری و پۆتانی ناوهراست لەبۆشایی پۆتاند.

یاسای $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی دووری نیوان دوو خالی $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$.

ناوهراستی ئەو پارچە راستهیلە سەرەکانی دوخالی $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$

بریتییه لە $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$



نمونه 4

هەژمارکردنی دووری و پۆتانی ناوهراست لەبۆشایی پۆتاند

دووری نیوان دوخالی A و B و پۆتانی ناوهراستی \overline{AB} بدۆزەو. وەلامەکت لە نزیکترین دەیهک نزیکبکەو.

ا $B(3, 4, 12)$ ، $A(0, 0, 0)$

پۆتانی ناوهراست

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{0+3}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{0+12}{2}\right)$$

$$M(1.5, 2, 6)$$

دووری

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2 + (12-0)^2}$$

$$= \sqrt{9+16+144}$$

$$= \sqrt{169} = 13$$

ب $B(7, 12, 15)$ ، $A(3, 8, 10)$

پۆتانی ناوهراس

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{3+7}{2}, \frac{8+12}{2}, \frac{10+15}{2}\right)$$

$$M(5, 10, 12.5)$$

دووری

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(7-3)^2 + (12-8)^2 + (15-10)^2}$$

$$= \sqrt{16+16+25}$$

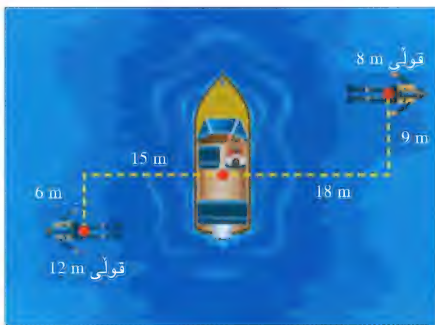
$$= \sqrt{57} \approx 7.5$$

4. دووری نیوان دوو خالی A و B و پۆتانی ناوهراس \overline{AB} بدۆزه وه وهلامهكەت لهزیکترین دهیهك نزیكبهوه.



ب $B(12, 16, 20)$ ، $A(5, 8, 16)$

ا $B(6, 0, 12)$ ، $A(0, 9, 5)$



5 نمونه جیبهجێکردن

دوو مهلهوانی ژێرناو چوونه دوو شوین وهك لهوینهی بهرامبهردا دیاره دووری نیوانیان چهنده؟

وای دادهنین شوینی بهلهمهکیان خالی بنهپهته $(0, 0, 0)$. شوینی دوو مهلهوانهكه دوو خالی $(18, 9, -8)$ و $(-15, -6, -12)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-15-18)^2 + (-6-9)^2 + (-12+8)^2}$$

$$= \sqrt{1330} \approx 36.5$$

دووری نیوان دوو مهلهوانهكه نزیكهی 36.5 m

5. چی دهبیئت نهگهر دوو مهلهوانهكه بهپێکی سهركهوتنه سهراوهكه دووری نیوانیان چهند دهبیئت.



بیربکهوه و تاوتویبکه

- چۆن دووری نیوان دوو خال لهبۆشایی پۆتانهکاندا ههژماردهکەیت.
- پێکخهريه ئهم خستهيه دروستبکه و پاشان تهواوی بکه.



ههپهمیکی وهستاوی بنکه لاکیشه	پوازکیکی وهستاوی بنکه لاکیشه	
		ژمارهی سهرهکان
		ژمارهی لایهکان
		ژمارهی پوههکان
		$V - E + F$

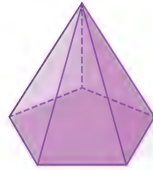
راھینانی ئاراستەکراو

1 **زاراوەکان** پروونبکەو بەچی لولەک بەچەند پروو دانانریت.

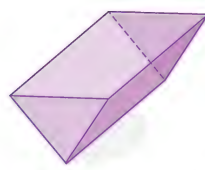
ژمارەى سەرەکان و لایەکان و پرووەکان بدۆزەو و بەکاریان بێتە بۆ پاسادان لەراستی یاسای ئۆلەر.



4



3



2

پۆوانەى ئەمانە بۆ نزیکتەین دەیهە بدۆزەو.

5 تیرەى لاکیشە تەریبیک درێژى 8 cm و پانی 4 cm و بەرزى 12 cm بێت.

6 بەرزى لاکیشە تەریبیک درێژى 10 cm و پانی 6 cm و تیرەکەى 13 cm بێت.

7 تیرەى پوازکێکى وەستایى بکە چوارگۆشەى درێژى لایەکى بکەکەى 12 cm و بەرزى بکەکەى 10 cm بێت.

وێنەى ئەمانە بکێشە.

8 قوچەکێک بەرزى بکەکەى 4 یەکە و نیو تیرەى بکەکەى 8 یەکە و چەقى بکەکە خاڵى (0, 0, 0) بێت.

9 لولەکێک بەرزى بکەکەى 4 یەکە و نیو تیرەى هەردوو بکەکەى 3 یەکە و چەقى بکەکە خوارەو خاڵى (0, 0, 0) بێت.

10 خشتەکێک درێژى لایەکى 7 یەکە و یەکەى لەسەرەکانى خاڵى بنەرەت (0, 0, 0) بێت.

دووری نیوان هەردوو خاڵى A و B و پۆوانى ناوەراستى \overline{AB} بدۆزەو وەلامەکەت لە نزیکتەین دەیهە نزیکەو.

12 $B(7, 0, 14)$ ، $A(0, 3, 8)$

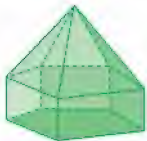
11 $B(9, 5, 10)$ ، $A(0, 0, 0)$

13 $B(9, 12, 15)$ ، $A(4, 6, 10)$

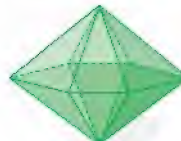
14 **بوخۆشى** دواى پۆژیک لەئەنجامدانى وەرزشى رێپۆشتن لەشاخەکاندا تێمەکە خێوەتگەى یەکیان بۆ پشووھەلدا کە 3 km پروو پۆژەللات و 7 km پروو باکورى خاڵى جولان دووربێت و بکەوێتە سەر بەرزایى بکە کە 0.6 km بەرزبێت لە خاڵى جولانەو دووری نیوان خاڵى جولان و خێوەتگە چەندە؟

جیەجیەکردنەکان

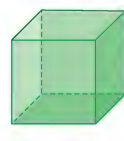
ژمارەى سەرەکان و لایەکان و پرووەکان بدۆزەو بەکاریان بێتە بۆ پاسادان لەراستی یاسای ئۆلەر.



17



16



15

پۆوانەى ئەمانە بۆ نزیکتەین دەیهە بدۆزەو.

18 تیرەى لاکیشە تەریبیک درێژى بکەکەى 7 cm و پانی بکەکەى 8 cm و بەرزى بکەکەى 16 cm بێت.

19 بەرزى لاکیشە تەریبیک درێژى بکەکەى 15 cm و پانی بکەکەى 6 cm و تیرەکەى 17 cm بێت.

20 درێژى لایەکى خشتەکێک تیرەکەى 8 cm بێت.

راھینانی ئازاد

بۆ شیکارى سەیری
پرسیارەکان نمونەى

1	17-15
2	20-18
3	23-21
4	26-24
5	27

ويٽنهي ٺهمانه بکيڻه.

21 لولهڪڙڪ بهرزيههڪي 3 يهڪه و نيوهتيره ي بنگه بازنهيههڪاني 5 يهڪه بيٽ و چهقي بنگهي خوارهوي خالي بنهپهت (0, 0, 0) بيٽ.

22 قوچهڪڙڪ بهرزيههڪي 4 يهڪه و نيوهتيره ي بنگه بازنهيههڪي 2 يهڪه و چهقي بنگهي خالي بنهپهت (0, 0, 0) بيٽ.

23 پوازڪيكي وهستاوي بنگه چوارگوشه يي يهڪڙڪ لهسهرهڪاني خالي بنهپهت (0, 0, 0) بيٽ دريڙي لايهڪي بنگهي 5 يهڪه و بهرزي 3 يهڪه بيٽ.

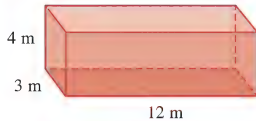
دووري نيوان ههردوو خالي A و B و پوٽاني ناوهراستي \overline{AB} بدوڙهوه وهلامهڪهت له نزيڪترين دهيهڪ نزيڪهوه.

25 $B(9, 10, 10)$ ، $A(2, 3, 7)$

24 $B(4, 4, 4)$ ، $A(0, 0, 0)$

26 $B(8, 8, 10)$ ، $A(2, 5, 3)$

27 **باري ڪهش و ههوا** بهرزي ههورڙڪ 6500 پڙيه. ٺه بارانهي ههورهڪه دهيبارڙنيٽ 700 پڙيه بهٽاراستهي باشور و 500 پڙ بهٽاراستهي پڙههٽلات باديجولڙنيٽ پڙش ٺهوي بگهويٽه سهرزهوي. ٺه دووريه ي بارانهڪه له ههورهڪهوه بڙزهوي دهيبريٽ چهنده؟



28 **ههنگاي جوراوجور** دريڙي تيره ي لاکيڙهتيره يي بهرامبه ر بدوڙهوه دههٽهنگامي دوو ٺهوهندهکردني دريڙي وپاني و بهرزي لاکيڙهتيره يهڪه لهسهر دريڙي تيرهڪه چيهه؟

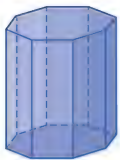
ناديار بدوڙهوه و ويٽنهي ٺهو شيوه ٺههاندازهيهه بکيڻهڪه ٺهو سهرو لاو پووانهي ههبيٽ.

چهنڊپوههڪه	ژماره ي پوههڪان	ژماره ي لايهڪان	ژماره ي سههڪان
	5	8	5
		12	8
	5	9	
	7		7

29

30

31

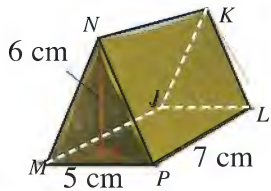


32 **جهبر** هر بنگهيهڪ لهدوو بنگهي پوازي بهرامبه ر چهنڊلايهڪه n لاي ههيه بهپي n ي ٺهو برانه بنووسه كهژماره ي سههڪاني پوازهڪه وژماره ي لايهڪاني وژماره ي پوههڪاني بنويٽي. ٺه ٺههنگامانه ي بهدهست هيناوه بهڪاريبيٽه بڙ پاساداني راستي ياساي ٺوله.



33 **جهبر** بنگهي ههرمي بهرامبه ر چهنڊلايهڪه n لاي ههيه بهپي n ٺهو برانه دهريبره كه ژماره ي سههڪاني ههرمهڪه و ژماره ي لايهڪاني و ژماره ي پوههڪاني بنويٽي. ٺه ٺههنگامانه ي بهدهست هيناوه بهڪاريبيٽه بڙ پاساداني راستي ياساي ٺوله.

34 دهوارهڪهي بهرامبه ر پوازيهڪه بنگهي سيگوشهيهڪي وهستاو بهجوري $\overline{KJ} \cong \overline{KL} \cong \overline{MN} \cong \overline{NP}$



ا دهوارهڪه بهشيويهڪه ههلڊرا كهسهر ي J خالي بنههت (0, 0, 0) بيٽ و سهري M خالي (7, 0, 0) بيٽ پوٽاني سههڪاني تري بدوڙهوه.

ب پيشهوهري دهوارهڪه ههزهڪات دووري نيوان K و P بزانيٽ تا توليڪ زيادبكات بڙ پالپشتي دهوارهڪه. KP بدوڙهوه وهلامهڪهت لهنزيڪترين دهيهڪ نزيڪهوه.

دهوارهيهڪ

لهسهر سهقا

ڪيڙي ههنڊي پهلهمهوري رهش دهگاته نزيڪهي 635 هزار تهن كه له ڪيڙي 100 هزار فيل زياتره.

پيئوانى نادىارى ھەريەك لەلاكيئشەتەريبەكان بدۆزەو ۋەلامەكەت بەشيۆمى پەگيكي سادە بنووسە

دريژى l	پانى w	بەرزى h	تيرە d
6	6	6	■
24	■	60	65
12	18	■	24
■	2	3	4

35

36

37

38

ويئەنى ئەمانە بكيئشە.

39 لولەكيك بەرزى 5 يەكەو چەقى بىنكە بازەنى خوارەو (1, 2, 5) ونيوئتيرەكەى 4 يەكەبيئت.

40 قوچەكيك بەرزىيەكەى 7 يەكەو چەقى بىنكەكەى (3, 3, 6) ونيوئتيرەكەى 3 يەكەبيئت.

41 خشتەكيك دريژى لايەكى 6 يەكەو چەقەكەى خالى (4, 2, 3) بيئت.

42 لاكيئشە تەريبيك سەرەكانى (4, 2, 5), (4, 6, 5), (4, 6, 8), (8, 6, 5), (8, 2, 5).

(8, 2, 8) (4, 2, 8) (8, 6, 8)

43 قوچەكيك سەرەكەى (4, 7, 8) و بىنكەكەى بازەنىيە چەقەكەى (4, 7, 1) ونيوئتيرەكەى 4 يەكەبيئت.

44 لولەكيك نيوئتيرەى بىنكە بازەنىيەكانى 5 يەكەو چەقى بىنكەكانى دووخالى (2, 3, 7) و (2, 3, 15) بيئت

\overline{AB} بكيئشە پاشان دريژى ويئوانى ناوئراستى بدۆزەو ۋەلامەكەت بونزيكتريىن دەيەك نزيكەو

45 $B(3, 2, 1)$, $A(1, 2, 3)$ 46 $B(7, 4, 4)$, $A(4, 3, 3)$ 47 $B(3, 1, 5)$, $A(4, 7, 8)$

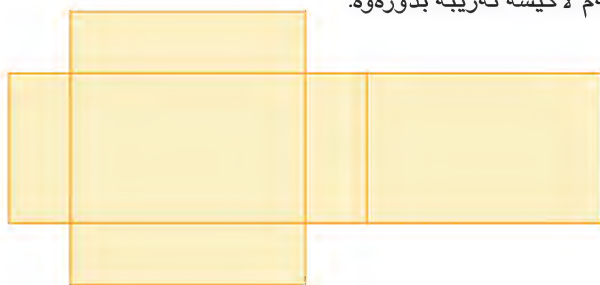
48 $B(8, 3, 6)$, $A(0, 0, 0)$ 49 $B(2, 2, 6)$, $A(6, 1, 8)$ 50 $B(3, 6, 3)$, $A(2, 8, 5)$

51 ھەنگاوى جوراوجور

بەھاي z بدۆزەو ئەگەر بزانيت دورى نيوان $R(6, -1, -3)$ و $S(3, 2, z)$ بکاتە 13 يەكە.

52 ويئەنى شيۆمەيەكى ئەندازەيى بكيئشە كە 6 سەرو 6 پووى ھەبيئت.

53 خەملاندن دورىيەكانى پووى ئەم لاكيئشە تەريبيە بدۆزەو.



54 دەستەواژەيەك دابريژە بەراى تۆكام پارچە راستەھيئل لەوانەى سەرەكانى دەكەونە سەرلاكيئشە

تەريبيك دريژترە؟ پاسادانى راستى وتەكەت بکە بەبەكارھيئنانى بەلايەنى كەمەو 3 پارچە

راستەھيئل كە سەرەكانى بکەونە سەر لاكيئشە تەريبيى $ABCDEFGH$ كاتيک $A(0, 0, 0)$ و $B(1, 0, 0)$

$C(1, 2, 0)$ و $D(0, 2, 0)$ و $E(0, 0, 2)$ و $F(1, 0, 2)$ و $G(1, 2, 2)$ و $H(0, 2, 2)$

55 بيرکردنەوھى رەخنەگرانە خالەكانى $A(3, 2, -3)$ و $B(5, 8, 6)$ و $C(-3, -5, 3)$ سيگوشەيەك

دەنوئىن جورى سيگوشەكە بەھوى لا وگوشەكانىيەو پوليىبکە.

56 بنوسە نيوئتيرەى لولەكيك 4 cm و بەرزىيەكەى 6 cm دريژى دريژترين پارچە راستەھيئل چەندە؟

كەسەرەكانى لەسەر لولەكەكەبن؟ شوئىنى ھەردو سەرى ئەو پارچە راستەھيئلە ديارىبکە. ئەو

ھۆكارە ديارىبکە كە واى ليئەكەت دريژترين بيئت.

57 ژمارى سەرەكان و لايەكان و پوۋەكانى ھەرەمىكى بىنكە شەشلايى چەندە؟

- (أ) 6 پوۋ، 10 لا، 6 سەر. (ب) 7 پوۋ، 12 لا، 7 سەر.
(ج) 7 پوۋ، 10 لا، 7 سەر. (د) 8 پوۋ، 18 لا، 12 سەر.

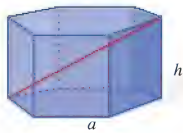
58 كام يەككە لەمانە نىزىكترن لەتيرەى ئەو لايىشە تەرىپەى درىژيەكەى 12 m پانىيەكەى 8 m بەرزيەكەى 6 m.

- (أ) 6.6 m (ب) 44 m (ج) 15.6 m (د) 244.0 m
(9, 3, 12) (7, 14, 8)

59 دوورى نىۋان دووخالى (7, 14, 8) A و (9, 3, 12) B چەندە؟ ۋە لامەكە لەنزيكترين دەيەك نىزىككەۋە.

- (أ) 10.9 (ب) 11.9 (ج) 119.0 (د) 141.0

بەرەنگارى و فراوانكردن



60 ھەنگاۋى جۇراۋجۇر بىنكەكانى پوزىكى بەرامبەر شەشلايەكى پىكە درىژى

لايەكى a يەكە درىژى تيرە سوورەكە بەپىي درىژى لاي a ۋە بەرزي h بدۆزەۋە.

61 نايە خالەكانى (4, 2, -1) A و (6, -2, 1) B و (8, -6, 3) C لە پىكى يەكترن.

62 جەبەر پۇتەنەكان ۋە ياساى دوورى بەكاربىنە بۇ سەلماندنى ياساى پۇتەنى ناۋەرەست.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad \text{ۋە} \quad B(x_2, y_2, z_2) \quad \text{ۋە} \quad A(x_1, y_1, z_1)$$

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

داۋاكراۋ: سى خالەكە دەكەنە سەر يەك راستەھىل ۋە AM: MB

63 جەبەر پۇتەنەكان بەكاربىنە بۇ سەلماندنى ئەۋەى تيرەكانى لايىشەتەرىپ جوتەن ۋە يەكترى

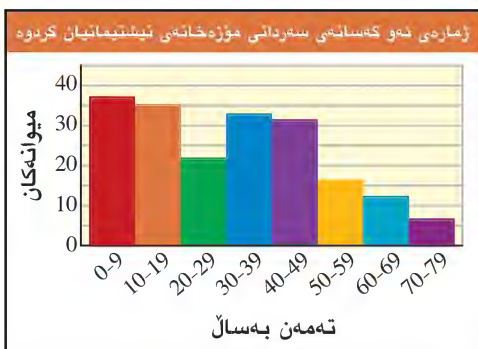
لەتەدەكەن لە ناۋەرەستياندا.

دراۋ: پوزىكى ۋە ستاۋى بىنكە لايىشەيى سەرەكانى (0, 0, 0) A ۋە (0, 0, 0) B ۋە (a, b, 0) C

(0, 0, c) E ۋە (a, b, c) G ۋە (0, b, 0) D ۋە (0, 0, c) F ۋە (0, b, c) H.

داۋاكراۋ: AG ۋە BH جوتەن ۋە يەكترى لەتەدەكەن.

پىداچوۋنەۋەى لولپىچى



ۋىنەى پوۋنكردنەۋەى بەرامبەر ژمارەى ئەۋەكەسانە دەنويىت كەسەردانى مۇزەخانەى نىشتىمانيان كىدۋە بەپىي تەمەنيان. ئەمانە بدۆزەۋە پۇلەكانى پىشۋو

55 64 ژمارەى ئەۋەكەسانەى سەردانى مۇزەخانەيان

كىدۋە تەمەنيان لەنۋان 10 سال ۋە 29 سالدايە.

9-0 65 چەشنى ئەۋەكەسانەى كە زۇرتترين سەردانكەرى تىابۋو.

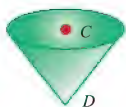
ياسايەك بۇ ھەژماركردنى پوۋبەرى ھەرشىۋەيەكى

ئەندازەيى بنووسە دۋاى گۇرانى دىيارىكراۋ. (پۇلەكانى پىشۋو)

66 $A = 2bh$ لاتەرىپكە درىژى بىنكەكى b ۋە بەرزيەكەى h بىت دۋاى دوۋەۋەندەكردنى بەرزيەكەى.

67 نىمچە لاتەرىپكە بەرزيەكەى h ۋە بىنكەكانى b_1 ۋە b_2 بىت، دۋاى لىكەكانى b_1 لە $\frac{1}{2}$. $A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$

68 $A = 9\pi r^2$ بازەنەك نىۋەتيرەكەى r بىت دۋاى سى جار دوۋەۋەندەكردنى نىۋەتيرە.



ۋىنەى بەرامبەر بەكاربىنە بۇ شىكاركردنى پرسىارەكانى 69 تا 71 (ۋانەى 1-2)

69 شىۋەكە پۇلىنكە. 70 لايەكانى ناۋىنى. 71 بىنكەكى ناۋىنى.

بازەنە كە چەكەكى c

بى لا

قوچەكى

بەشى 1 ئەندازە

كى ئەمە بەكار دەھيئەت؟

زانايانى زىندەزانى توۋىنەنە لەسەر چاۋى ھەندىك لەو گياندارانەى لەقولاۋى دەريادا دەژىن ئەنجامدەدەن وەك مەرەكەبەى زەبەلاح بۇ ئەۋەى زانباريان لەسەر ئەو قولايپانە دەسكەۋىت. (نمونه 2)

ئامانجەكان

- بىرھىنەۋەى ياساى قەبارەى گۆ و بەكارھىنەى
- بىرھىنەۋەى ياساى پوۋبەرى گۆ بەكارھىنەى.

زاراۋەكان
Vocabulary

گۆ

Sphere

چەقى گۆ

Center of a sphere

نيوھتيرەى گۆ

Radius of a sphere

نيوھگۆ

Hemisphere

بازنەى مەزن

Great circle

قەبارە

Volume (v)

لولەك

Cylinder

قوچەك

Cone

گۆ Sphere برىتيەى لە كۆمەلە خاڵىك لەبۆشايدا كە ھەمان

دوورىان لەخاڵىكى ديارىكراۋە ھەيە، پىي دەوترىت چەقى گۆ Center

ھەر پارچە راستەھىللىك چەقى گۆيەكە بەخاڵىكى سەرگۆيەكە

بگەينىت پىي دەوترىت نيوھتيرەى گۆ Radius . ھەر پروتەختىك بەچەقى

گۆيەكەدا بروت لەبازنەيەكدا دەيپىت پىي دەوترىت بازنەى مەزن Great circle

دابەشى دەكات بە دووبەشەۋە بەھەريەكەيان دەوترىت نيوھگۆ Hemisphere

ئەم وئەنەيەى خوارەۋە نيوھگۆيەكە و لولەكە قوچەككى لىپراۋە. ھەر پروتەختىك بەنكەى لولەكەكە

و بازنەى مەزنى گۆيەكە تەرىب بىت گۆيەكە و لولەكە لىپراۋەكە لەدوۋ بىرگەدا دەپىت (بەرەنگى

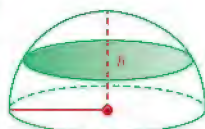
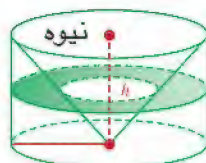
سەۋز ديارىكراۋن) كە پوۋبەرەكانيان يەكسان دەپىت. لەمەۋە دەستدەكەۋىت كە تيرەى گۆيەكە و

ئەو لولەكەى قوچەكەى لىپراۋە لەقەبارەدا يەكسان دەپن. پالپشت بە رىساى كافاليرا Cavalier's

Principle . يەكسانبۋنى دوۋ پوۋبەرەكە دەسەلمىنرىت لەپرسىارى 39 دا.

$$V(\text{Hemisphere}) = V(\text{Cylinder}) - V(\text{Cone})$$

$$V(\text{قوچەك}) - V(\text{لولەك}) = V(\text{نيوھگۆ})$$



بەرزى لولەكەكە يەكسانە بە نيوھتيرەى گۆيەكە

$$= \pi r^2 h - \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{2}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{2}{3} \pi r^2 (r) = \frac{2}{3} \pi r^3$$

لەمەۋە دەستدەكەۋىت، قەبارەى گۆيەكە نيوھتيرەكەى r بىت برىتيەى لە $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ چونكە قەبارەى

گۆيەكە يەكسانە بەدوۋئەۋەندەى قەبارەى نيوھ گۆيەكە.

قەبارەى گۆ



قەبارەى گۆيەكە نيوھتيرەكەى r بىت بەياساى $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ ھەژماردەكرىت

قەبارەى



دۆزىنەۋەى قەبارەى گۆ

1 نمونه

بەپىي π بدۆزەۋە.

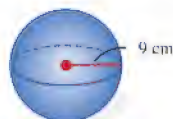
قەبارەى گۆى بەرامبەر

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3} \pi (9)^3 = 972\pi$$

$$V = 972\pi$$

قەبارەى ئەو گۆيە دەكاتە $972\pi \text{ cm}^3$



بەھاي نيوھتيرەكە دابنى وپاشان سادەى بگە.

ب تیره گۆیه قهباردهکی $972\pi \text{ cm}^3$

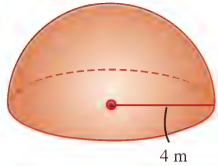
$$972\pi = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$729 = r^3$$

$$r = 9$$

$$d = 2 \times r = 2 \times 9 = 18$$

تیره ئه گۆیه دهکاته 18 m



ج قهبارهی نیوهگۆی بهرامبه

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi (4)^3 = \frac{128\pi}{3}$$

قهبارهی نیوهگۆیه که بریتیه له $\frac{128\pi}{3} \text{ m}^3$

1. نیوه تیره گۆیه که بدۆزهوه قهباردهکی $2304\pi \text{ cm}^3$ بێت.



جیبه جیکردن له سههر زینده زانی

2 نموونه

مه ره که به گیانداریکی ده ریاییه و له قولایی ده ریادا ده ژێ، مه ره که به پێویسته چاوی فراوان بێت تا به ئاسانی بتوانیت له پروناکییه کی متدا که به سههر قولایی ده ریادا ده کشیت نیچیره که ی ببینی تیره گۆی چاوی مه ره که به ی زه به لاح ده گاته 25 cm ئه وه له کاتی که تیره گۆی چاوی مروّف 2.5 cm به نزیکه یی نایا قه باره ی گۆی چاوی مه ره که به ی زه به لاح چه ند ئه وه ندی قه باره ی گۆی چاوی مروّفه؟

قه باره ی گۆی چاوی مه ره که به ی زه به لاح

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi (12.5)^3$$

قه باره ی گۆی چاوی مه ره که به ی زه به لاح

$$8181.23 \text{ cm}^3 \text{ به نزیکه یی.}$$

قه باره ی گۆی چاوی مروّف

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi (1.25)^3$$

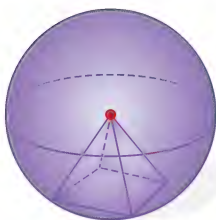
قه باره ی گۆی چاوی مروّف

$$8.18 \text{ cm}^3 \text{ به نزیکه یی.}$$

پێوانه ی قه باره ی چاوی مه ره که به ی زه به لاح 1000 ئه وه ندی قه باره ی چاوی مروّفه.

2. تیره گۆی چاوی بالنده ی طنان 0.6 cm به نزیکه یی. قه باره ی گۆی چاوی مروّف

چه ند ئه وه ندی قه باره ی گۆی چاوی ئه و بالنده یه؟



له وینه که ی به رامبه ردا سه ری هه پمه که ده که ویتته چه قی گۆیه که وه، به رزی هه ره مه که یه کسانه به نیوه تیره ی گۆیه که به نزیکه یی. وای دابنی گۆیه که به n هه پمه پپرکرا، پروبه ری بنکه ی هه ر یه ککیان B و به رزییه که ی r بێت.

قه باره ی گۆیه که یه کسانه به سه رجه می قه باره ی

هه پمه کان به نزیکه یی.

هه ردوولا دابه شی $\frac{1}{3}r$ بکه.

$$V(\text{Sphere}) = \frac{1}{3}Br + \frac{1}{3}Br + \dots + \frac{1}{3}Br$$

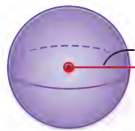
$$\frac{4}{3}\pi r^3 = n\left(\frac{1}{3}Br\right)$$

$$4\pi r^2 = nB$$

ئه گه ر هه پمه کان گۆیه که یان پپرکده وه ئه و سه رجه می پروبه ری بنکه کان یان یه کسانه به پروبه ری گۆیه که به نزیکه یی واته $S = 4\pi r^2$ تا ژماره ی هه پمه کان زیاتر بێت کۆی پروبه ری بنکه کان له پروبه ری گۆیه که نزیکتر ده بێت وه.



پووه پووبه ری گۆ



پووبه ری پووی گۆیهک نیووتیرهکە ی r بیئت بهیاسای $S = 4\pi r^2$ هەژماردەکریت.

نموونه 3

دۆزینەوهی پووبه ری پووی گۆ

بهپیی π ئەمانە بدۆزەوه.

ا پووبه ری پووی گۆیهک تیرهکە ی 10 cm بیئت.

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi(5)^2 = 100\pi$$

پووبه ری پووی گۆیهکە دەکاتە $100\pi \text{ cm}^2$

ب قەبارە ی گۆیهک پووبه ری پووهکە ی $144\pi \text{ cm}^2$

$$S = 4\pi r^2$$

$$144\pi = 4\pi r^2$$

$$6 = r$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(6)^3 = 288\pi$$

قەبارە ی گۆیهکە دەکاتە 288 cm^3

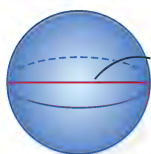
ج پووبه ری پووی گۆیهک پووبه ری بازنە مەزنەکە ی $4\pi \text{ cm}^2$ بیئت.

$$\pi r^2 = 4\pi$$

$$r = 2$$

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi(2)^2 = 16\pi$$

پووبه ری پووی گۆیهکە دەکاتە $16\pi \text{ cm}^2$



50 cm

3. پووبه ری پووی گۆی بەرامبەر بدۆزەوه.

خالی
چاودیری

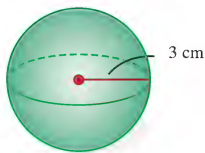


نموونه 4

دەرخستنی کاریگەری گۆرانی پێوانەکان لەسەر قەبارەو پووبه ری پووی گۆ.

نیووتیره ی گۆیهک لە 3 در. کاریگەری ئەو لەسەر قەبارەکە ی باسبکە.

گۆیهکە دوا ی گەورەکردنی نیووتیرهکە ی



3 cm

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi(9)^3 \\ &= 972\pi \end{aligned}$$

گۆیهکە بنه پەتییهکە

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi(3)^3 \\ &= 36\pi \end{aligned}$$

سەرئێجده کە $972\pi = 27(36\pi)$ واتە کاتیگ نیووتیرهکە لە 3 دەدریٹ ئەوا قەبارەکە ی لە 27 دەدریٹ. [تییینی بکە 27 سیجای 3 هـ]

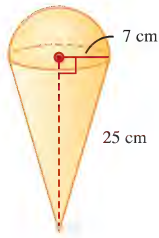
4. چۆن قەبارە ی گۆیهک دەگۆریت ئەگەر نیووتیرهکە ی دابهشی 3 بکریٹ؟

خالی
چاودیری



دۆزىنەۋە قەبارە و پووبەرى پووى تەنە ئاۋىتەكان (پىكەتاتوۋەكان)

پووبەرى پووى قەبارە تەنى بەرامبەر بەپىي π بدۆزەۋە.



پووبەرى پووى ئەم تەنە ئاۋىتەيە بىرىتتەيە لە سەرچەمى
پووبەرى نيوەگۆيەكە و تەنەشەپووى قوچەكەكە.

$$S(\text{نيوگۆ}) = \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2\pi(7)^2 = 98\pi \text{ cm}^2$$

$$S(\text{قوچەك}) = \pi r G = \pi(7)(25) = 175\pi \text{ cm}^2$$

$$S(\text{تەنە ئاۋىتەكە}) = 98\pi + 175\pi = 273\pi \text{ cm}^2$$

پووبەرى پووى تەنە ئاۋىتەكە دەكاتە $273\pi \text{ cm}^2$

دەستپىيەكە بە دۆزىنەۋە بەرزى قوچەكەكە.

$$h = \sqrt{25^2 - 7^2}$$

$$h = \sqrt{576} = 24 \text{ cm}$$

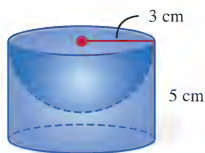
قەبارە ئەم تەنە ئاۋىتەيە دەكاتە كۆى ھەردو قەبارە نيوەگۆ و قوچەكەكە

$$V(\text{نيوگۆ}) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{2}{3}\pi(7)^3 = \frac{686\pi}{3} \text{ cm}^3$$

$$V(\text{قوچەك}) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(7)^2(24) = 392\pi \text{ cm}^3$$

$$V(\text{تەنە ئاۋىتەكە}) = \frac{686\pi}{3} + 392\pi = \frac{1862\pi}{3} \text{ cm}^3$$

قەبارە تەنە ئاۋىتەكە دەكاتە $\frac{1862\pi}{3} \text{ cm}^3$

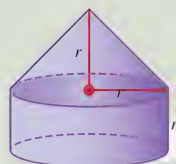
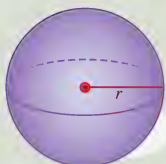


5. پووبەرى پووى قەبارە ئەم تەنە ئاۋىتەيە بەرامبەر
بدۆزەۋە.



بىرىكەۋە و تاۋىيەكە

1. چۆن پووبەرى پووى گۆيەك ھەژماردەكەيت ئەگەر پووبەرى بازىنە مەزىنەكەي بزانىت؟
2. بەراۋردىكە لەنپوان قەبارە گۆى بەرامبەر و
قەبارە تەنە ئاۋىتەكەي تەنەشتى.



3. رىكخەريە ئەم ھىلكارىيە دروستىكە وتەۋاۋى بكە.



ئەگەر نيوەتيرەي
گۆيەكە r بىت كەۋاتە

پووبەرى بازىنە
مەزىنەكە دەكاتە

پووبەرى پووى
گۆ دەكاتە

قەبارە گۆيەكە دەكاتە
.....

7-1 راهیڻانه کان

راهیڻانی ئاراسته کراو

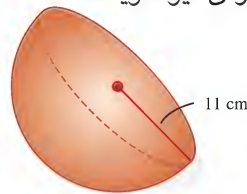
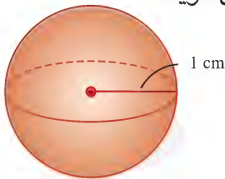
1 زاروہ کان باسی نیوہ تیرہی بازنہ و ہر دوو سرہکانی بکہ.

1 پروانہ نمونہ

بہ پی ی π بدؤزہوہ.

2 قہبارہی نیوہ گویہ کہ

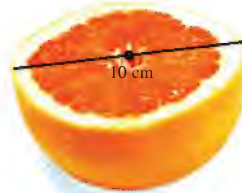
3 قہبارہی گویہ کہ



4 نیوہ تیرہی گویہ کہ قہبارہ کی $288\pi \text{ cm}^3$ بیٹ.

2 پروانہ نمونہ

5 خواردن چہند جار قہبارہی نیوہ لیموئیک دہکاتہ قہبارہی نیوہ پرتہ قالہ کہ؟

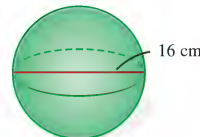
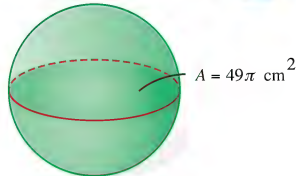


3 پروانہ نمونہ

بہ پی ی π بدؤزہوہ.

6 پووبہری پووی گویہ کہ

7 پووبہری پووی گویہ کہ.



8 قہبارہی گویہ کہ پووبہری پوویہ کی $6724\pi \text{ m}^2$

4 پروانہ نمونہ

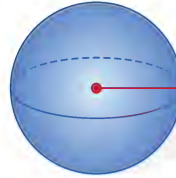
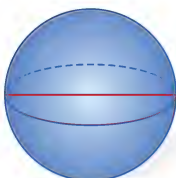
کاریگہری ہر گؤرانیک لہسہر پیوانہی دراو باسبکہ.

10 قہبارہی گویہ کہ دوی بچوکر دنہوہی

9 پووبہری پووی گویہ کہ دوی دو

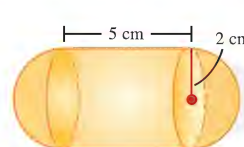
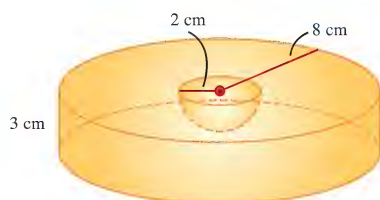
تیرہ کہی بو چارہ کیٹ.

ٹہوہندہ کردنی نیوہ تیرہ کہی.



پووبہری پووی و قہبارہی ہریہ کہ لہم تہنہ ئاویٹانہ بدؤزہوہ.

5 پروانہ نمونہ



جیبہ جیکر دنہ کان

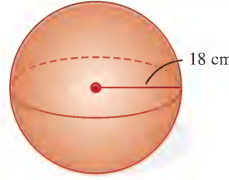
راہیتانی نازاد

بۇ شىكارىكرىنى تەماشىي
پرسىيارىكان نمونەي

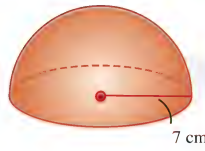
1	15-13
2	16
3	19-17
4	21-20
5	23-22

بەپپى π بدۆزەوہ.

13 قەبارەى گۆ



14 قەبارەى نيومگۆكە



15 تيرەى گۆيەك قەبارەكەى $7776\pi \text{ cm}^3$ بىت.

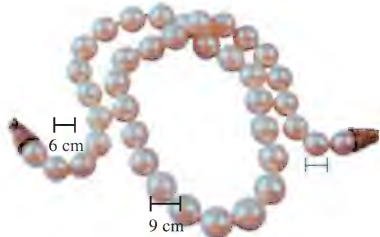
16 خىشل پىوانەى مروارى بەدرىژى تيرەكەى بە ميليمەتر

دىاريدەكرىت. قەبارەى مروارىيەك تيرەكەى 9 mm بىت

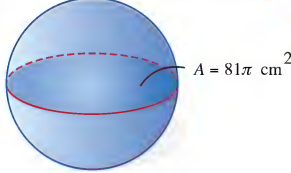
چەند جارگەورەترە لە قەبارەى مروارىيەك تيرەكەى 6 mm

بىت.

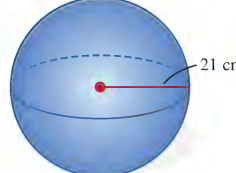
بەپپى π بدۆزەوہ.



18 پووبەرى پووى گۆيەكە



17 پووبەرى پووى گۆيەكە



19 قەبارەى گۆيەك پووبەرىكەى $625\pi \text{ m}^2$ بىت.

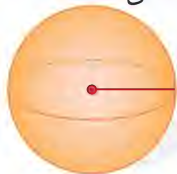
كارىگەرى ھەر گۆرانىك لەسەر پىوانەى دراو باسبەكە.

21 كارىگەرى لىكدانى تيرە لە 6 لەسەر

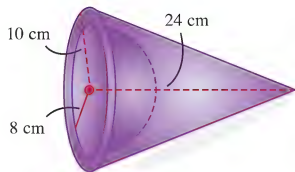
قەبارەكەى.

20 كارىگەرى لىكدانى نيومەتيرە لە $\frac{1}{5}$ لەسەر

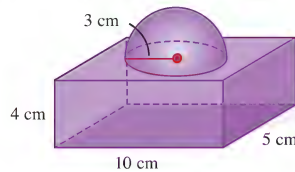
پووبەرى پووبەكەى چەندە؟



قەبارەو پووبەرى ھەرتەنىكى ئاويته بدۆزەوہ.



23



22

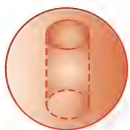
24 نيومەتيرەى نيومگۆيەك بدۆزەوہ قەبارەكەى $144\pi \text{ cm}^3$ بىت.

25 چىوہى بازنەى مەزنى گۆيەك بدۆزەوہ كە پووبەرى پووبەكەى $60\pi \text{ cm}^2$ بىت.

26 قەبارەى گۆيەك بدۆزەوہ كە چىوہى بازنەى مەزنىكەى $36\pi \text{ cm}$ بىت.

27 پووبەرى پوو و قەبارەى ئەو گۆيەك بدۆزەوہ كە چەقەكەى دەكەويته سەرخالى بنەرەت $(0, 0, 0)$

لەبۇشايى پۇوتاندا و بەخالى $(2, 3, 6)$ دا دەپوات.














28 خەملاندن مروارىيەكى گۆيى تيرەكەى 8 mm بەچالكرىنى بە لولەكىكى بازنەيى

تيرەكەى 2 mm بوو لەناوہە كونكرا. پووبەرى پوو و قەبارەى مروارىيە كونكراوہكە

بەخەملانە.

وهرزش پيؤره نادياره كانى هەر تۆپىك له تۆپه كانى هەندىك له يارييه وهرزشه ييه كان بدۆزه وه.

وهرزش	تۆپ	تيره	چيۆدى بازنى مەزن	پووبەر	قەبارە
29		4.27 cm			
30			22.86 cm		
31		6.35 cm			
32		74 mm			

زیندەزانی ژێردەریای باتسفیر یەكەم ژێردەریای توێژینه وەكانى ئاوى بوو. لەسەر شپۆدى گۆیهەك لەسالى 1930 دروستكرا، تیرەى ناووەوى ئەم ژێردەریایە نزیكەى 137 cm بوو، ئەستوورى ئەو پۆلایەى كەپێى دروستكراو 3.8 cm بوو، ئەم ژێردەریایە 3 پەنجەرەى بازەنى هەبوو كەتیرەى هەر یەكێیان نزیكەى 30 cm بوو، قەبارەى ئەو پۆلایەى كەبەكارهێنراو بۆ دروستكردى ئەم ژێردەریایە بخەمڵێنە.

جوغرافیا نیووتیرەى گۆى زەوى دەگاتە 6437 km بەنزیكەى $\frac{2}{3}$ ی پووى زەوى بەئاو داپۆشراو پووبەرى وشكانییەكە بخەمڵێنە.

هەسارە	تیرە بە میل
عەتارد	3032
زوهەر	7521
زەوى	7926
مەریخ	4222
مشتەرى	88846
زوحەل	74898
ئورانوس	31763
نبتون	30775
بلوتو	1485

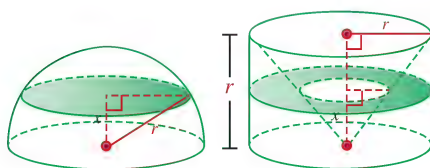
گەردون ئەم خشتەیه بەكاربەئێنە بۆ شیکارکردنى پرسیارەكانى 35 تا 38

35 قەبارەى مشتەرى چەند ئەوەندەى قەبارەى زەوییه؟

36 كام هەسارە قەبارەكەى بەنزیكەى دەكاتە سەرجمەى هەردوو قەبارەى زوهەر و مەریخ؟

37 كامیان گەرەتەر پووبەرى زوحەل یان سەرجمەى هەردوو پووبەرى ئورانوس و نبتون؟

38 پووبەرى عەتارد چەند ئەوەندەى پووبەرى بلوتویه؟



39 **بیرکردنەوهى رەخنەگرانە** نیوگۆكە و لولەكەكە هەمان نیووتیرەیان هەیه لەوێنەى بەرامبەر. پوونیکەوه دووبەرگە پەنگراوێكە هەمان پووبەریان هەیه.

40 **بنووسە** وایدابنى گۆیهەك و خشتەكێك هەمان پووبەرى روویان هەیه هاوكێشەیهك بنووسە پەيوەندى نۆوان نیووتیرەى گۆیهەكە r و درێژى لایەكى خشتەكەكە s پيشان بدات.

41 كارگەیهكى شەربەتى پرتەقال دەفرى گۆبى شپۆ پرتەقالى بەكاردهێنا لەپركردنەوهى بەرهمەكەى پووبەرى رووى دەفرە گۆبیهكە 324.5 cm^2 بەنزیكەى.

أ قەبارەى ئەو دەفرە گۆبیه چەندە؟ وەلامەكەت نزیكەوه لە نزیكتەرىن دەیهك.

ب كارگەكە بپاریدا نیووتیرەى دەفرە گۆیهكە بەرێژەى 10% زیادبكات. قەبارەى دەفرە تازەكە چەندە؟



42 گۆيەك نىۋەتيرەكە 8 cm بەخشەككە دەۋردار ۋە رىۋى قەبارە خىشتەك بۇ گۆيەككە چەندە؟

- ① $2:\frac{1}{3}\pi$ ② 3π ③ $1:\frac{4}{3}\pi$ ④ $1:\frac{2}{3}\pi$

43 پوۋبەرى پوۋى گۆيەك چەندە؟ قەبارەكە $10\frac{2}{3}\pi \text{ cm}^3$ بىت

- ① $8\pi \text{ cm}^2$ ② $10\frac{2}{3}\pi \text{ cm}^2$ ③ $16\pi \text{ cm}^2$ ④ $32\pi \text{ cm}^2$

44 كام بېرە قەبارە تەنى ئاۋىتەى بەرامبەر كە لەنىۋە گۆيەك نىۋەتيرەكە r

ۋىخشەككە درىۋى لايەكى $2r$ پىكىدەت دەنىۋىت.

- ① $(\frac{2}{3}\pi + 8)r^3$ ② $2(2\pi + 12)r^2$
③ $\frac{4}{3}\pi r^3 + 8r^3$ ④ $\frac{4}{3}\pi r^3 + 2r^3$



بەرەنگارى و فراوانكىرىن

45 خوارىن ئامىرى بەشىنەۋى بنىشتى گۆيى، لەگۆيەك پىكىدەت تىرەكە 18 cm

ئامىرەكە 1 300 بنىشتى گۆيى تىدايە 57% قەبارەكە دەگرىتەۋە. تىرەى ھەر بنىشتىكى گۆيى بەشمەلەنە.

46 دەتوانرىت پوۋبەرى پوۋى گۆ بۇ دۆزىنەۋى قەبارەكە بەكاربەرىت.

ا ياساى پوۋبەرى پوۋى گۆ بۇ ھەزمەركەنى نىۋەتيرەكە r بەپى پوۋبەرى S بەكاربەرىنە

ب لەياساى قەبارە گۆدا لەجىياتى r ئەۋ بەھايە دابىنى كە لە پىرسىارى پىشودا دۆزىتەۋە

ج وىنەى پوۋنكرەنەۋى ئەۋ نەخشەيە بكىشە كە قەبارەى گۆيەككە بەپى

پوۋبەرى پوۋى گۆيەككە دەردەپىت باسى پوۋنكرەنەۋى وىنەكە بىكە.

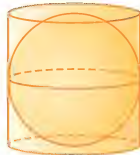


ۋىنەى بەرامبەر بەكاربەرىنە بۇ شىكارىكرەنى ھەردوۋ پىرسىارى 47 و 48.

47 پەيۋەندى لەنىۋان قەبارەى گۆۋ قەبارەى لولەك چىيە؟

48 پەيۋەندى نىۋان پوۋبەرى پوۋى گۆيەككە تەنىشتە پوۋبەرى

لولەككە چىيە؟



پىداچوۋنەۋى لولپىچى

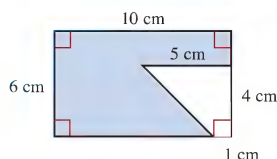
نەخشەيەك بنوۋسە كە وىنە روۋن كىرەنەۋەيەكەى بەم خالانى خوارەۋەدا پروات. (پۆلەكانى

پىشوو)

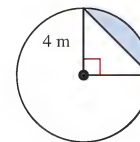
49 $\{(0, 1), (1, 2), (-1, 2), (2, 5), (-2, 5)\}$

50 $\{(-1, 9), (0, 10), (1, 11), (2, 12), (3, 13)\}$

پوۋبەرى بەشە پەنگراۋەكە بدۆزەۋە ۋە لامەكەت بۇ نىكتىرىن دەيەك نىكتىكەۋە. (پۆلەكانى پىشوو)



52



51

كارىگەرى ھەر گۆرانىك لەسەر قەبارە باسبە. (پۆلەكانى پىشوو)

53 قەبارەى خىشتەككە دواى لىكانى لايەكى لە $\frac{3}{4}$

54 قەبارەى پوزاككە دواى لىكانى ھەريەكە لەبەرى و پوۋبەرى بىكەكەى لە 5.

بۇ لىدون

ئايا ئەتوانىت نەخشە
داينىن ئەگەر
خالەكانمان زانى.

كهـرته بازنهـپهـكان و كهـوانهـكان

Sector and arcs



كى ئهـمه بهـكاردهـهينـت

جوتيارهكان نيوهتيرهى بازنه بهكاردههينن
بو ههژماركردى پروبهى ئهـو ناوچهپهـى
كه ئاوڊيرى دهيانگرتهوه. (نموونه 3)

ئامانجهكان

- پروبهى كهـرتى بازنهـپهـى
- ههژماردهكات
- دريژى كهـوانه ههژماردهكات.

زاراوهكان

Vocabulary

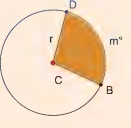
كهـرته بازنه
Sector of a circle

پارچه بازنهـپهـى
Segment of a circle

دريژى كهـوانه
Arc length

پروبهى كهـرته بازنهـپهـى بهـشكه له پروبهى
ئهـو بازنهـپهـى كه تيايهـتى بو ئهـوهى پروبهى
كهـرته بازنهـپهـى كه گۆشهـكهـى m° يه ههژماربكهـيت پروبهى بازنهـكه له $\frac{m^\circ}{360^\circ}$ دهـ.

كهـرته بازنهـپهـى

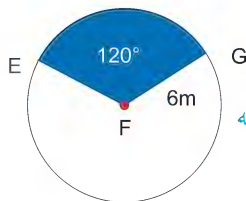
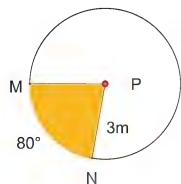
پووبهـر	ويتهـ	ناوليئان	پيناـسهـ
$A = \pi r^2 \left(\frac{m^\circ}{360^\circ} \right)$		كهـرتى BCD	كهـرته بازنهـپهـى Sector of a circle بهـشكهـى دياريكراوه لهـبازنهـكه به دوو نيوهتيرهـ ئهـو كهـوانهـپهـى پيـيان سنووردراوه ديارى دهـكرت.



دۆزينهـوهـى پروبهـى كهـرته بازنهـپهـى

پروبهـى هـريـهـكه لهـم كهـرته بازنهـپهـى بهـپيـ π بدۆزهـوه و ئهـنجامهـكه بو نزيكـترين
بهـش له سهـد نزيكـهـوه.

نمونهـ 1



ياساى پروبهـى كهـرته بازنهـپهـى.
لهـجياتى هـريـهـكه له نيوهتيرهـ ويـئوانهـى گۆشهـكه
بهـهاكهـى دابنـى.
سادهـبكهـ.

$$2\pi \text{ m}^2 \approx 6.28 \text{ m}^2$$

ياساى پروبهـى كهـرته بازنهـپهـى.
لهـجياتى هـريـهـكه له نيوهتيرهـ ويـئوانهـى گۆشهـكه
بهـهاكهـى دابنـى.
سادهـبكهـ.

$$12\pi \text{ cm}^2 \approx 37.70 \text{ cm}^2$$

كهـرتى MPN

$$A = \pi r^2 \left(\frac{m^\circ}{360^\circ} \right)$$

$$A = \pi (3)^2 \left(\frac{80^\circ}{360^\circ} \right)$$

$$A = 2\pi$$

پروبهـى ئهـو كهـرته

كهـرتى GFE

$$A = \pi r^2 \left(\frac{m^\circ}{360^\circ} \right)$$

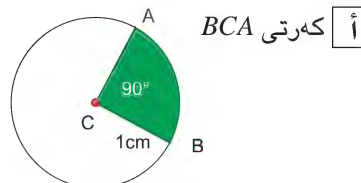
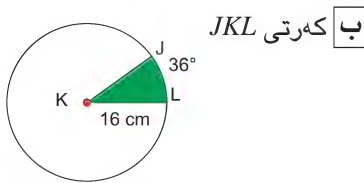
$$A = \pi (6)^2 \left(\frac{120^\circ}{360^\circ} \right)$$

$$A = 12\pi \text{ cm}^2$$

ئاگاداريـهـ!

هـيـماى پله لهـداى m له
ياساكهـدا بنووسه بو ئهـوهى
بـيرتـبـيـتهـوه كهـپـئوانهـى كهـوانهـكهـت
بهـكارهـيـئاوه نهـك دريژيهـكهـى.

1. پووبهري ئەم كهرته بازنه ييانه بدۆزهوه پاشان بۆ نزيكترين بهش له سههه نزيكيكه.



جیبه جیكردن له كشتوكاڤا

نمونه 2

تیره بازنه ی ئاودی پری دهگاته 120m پووبهري ئەو كهرته بازنه ییە ئامیره ئاودی پریه كه ئاوی دهگات كاتیك 50° دهسوپی ههژماربكه و وهلامهكه به نزيكترين مهتر دووجا بدۆزهوه.

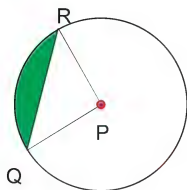
$$A = \pi r^2 \left(\frac{m^\circ}{360^\circ} \right) \quad \text{ياسای پووبهري كهرته بازنه یی}$$

$$r = 360 \text{ cm} \quad A = \pi (60)^2 \left(\frac{50^\circ}{360^\circ} \right)$$

$$A = 500\pi \quad \text{ساده بكه.}$$

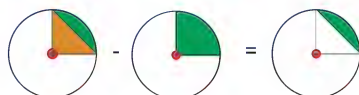
پووبهري كهرته دهگاته 1 571 m² به نزيكه یی.

2. ئەو پووبهريه چهنده كاتیك ئامیرهكه نیوخول بسوړیتهوه؟



پارچه ی بازنه یی segment of a Circle بریتیه له ناوچه یه کی دیاریکراو له بازنه كه به ژپی و ئەو كه وانه یی كه ههردوو سهري ژیهه كه ی گه یاندووه دیاریده كریت.

پووبهري پارچه بازنه یی



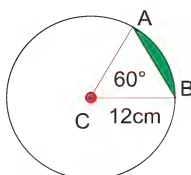
پووبهري پارچه بازنه یی = پووبهري كهرتی بازنه یی - پووبهري سیگۆشه



دۆزینهوه ی پووبهري پارچه ی بازنه یی

نمونه 3

پووبهري پارچه ی بازنه یی ACB بدۆزهوه، بۆ نزيكترين بهش له سههه نزيكرا بیتهوه. ههنگاوی 1 پووبهري كهرتی بازنه یی ACB بدۆزهوه.



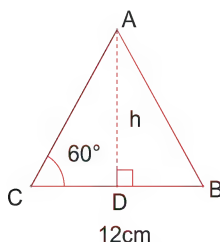
ياسای پووبهري كهرته بازنه یی

$$A_1 = \pi r^2 \left(\frac{m^\circ}{360^\circ} \right)$$

$$A_1 = \pi (12)^2 \left(\frac{60^\circ}{360^\circ} \right)$$

$$= 24\pi \text{ cm}^2 \quad \text{ساده بكه.}$$

ههنگاوی 2 پووبهري سیگۆشه ی ACB بدۆزهوه به رزی AD بکێشه.



$$A_2 = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(12)(6\sqrt{3})$$

$$A_2 = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

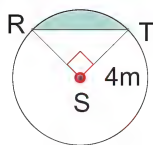
له بیرت بیټ

له سیگۆشه وهستاوی 90 - 60 - 30 دا درێژی لای بهرامبه رگۆشه ی 60° له لیکدانی لای تهنیشتی له $\sqrt{3}$ پهیدا بووه.

ههنگاوی 3 پووبه‌ری پارچه‌که = پووبه‌ری که‌رتکه - پووبه‌ری سیگۆشه

$$A = 24\pi - 36\sqrt{3} \approx 13.04$$

پووبه‌ری که‌رتکه 13.04 cm^2 به‌نزیکه‌یی.



3. پووبه‌ری پارچه بازنه‌یه‌که بۆ
نزیکتیرین به‌ش له‌سه‌د بدۆزه‌وه.



هه‌روه‌ک چۆن که‌رتی بازنه‌یی به‌شیکه له پووبه‌ری بازنه‌که، هه‌روه‌ها درێژی که‌وانه‌که‌شی به‌شیکه له‌چۆه‌که‌ی.

درێژی که‌وانه



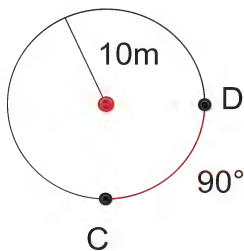
پیتاسه	وینه	درێژی
<p>درێژی که‌وانه Arc length</p> <p>بریتییه له درێژی ئه‌و داوه ده‌زوه‌ی نوساوه به‌که‌وانه‌که‌وه و هه‌ردوو لاکه‌ی ده‌گه‌یه‌نیت.</p>		$L = 2\pi r \left(\frac{m^\circ}{360^\circ} \right)$

* تییینی ئه‌وه بکه درێژی که‌وانه و نیوه‌تیره‌ی بازنه هه‌مان یه‌که‌ی درێژیان هه‌یه.

دۆزینه‌وه‌ی درێژی که‌وانه

4 نمونه

درێژی هه‌ر که‌وانه‌یه‌که به‌پیی π بدۆزه‌وه پاشان بۆ نزیکتیرین به‌ش له سه‌د نزیکیکه‌وه.



$$L = 2\pi r \left(\frac{m^\circ}{360^\circ} \right)$$

$$L = 2\pi(10) \left(\frac{90^\circ}{360^\circ} \right)$$

$$L = 5\pi \approx 15.71$$

درێژی که‌وانه‌که 15.71 m به‌نزیکه‌یی.

ب له‌بازنه‌یه‌که‌دا نیوه‌تیره‌که‌ی 3 m و پیاوه‌ی که‌وانه‌که‌ی 35° یه.

$$L = 2\pi r \left(\frac{m^\circ}{360^\circ} \right)$$

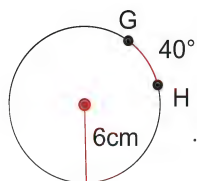
$$L = 2\pi(3) \left(\frac{35^\circ}{360^\circ} \right)$$

$$L = \frac{7}{12} \pi \approx 1.83$$

درێژی که‌وانه‌که ده‌گاته 1.83 m به‌نزیکه‌یی.

4. درێژی هه‌ر که‌وانه‌یه‌که به‌پیی π بدۆزه‌وه پاشان

بۆ نزیکتیرین به‌ش له سه‌د نزیکیکه‌وه.



ا له‌بازنه‌یه‌که‌دا پیاوه‌ی که‌وانه‌که‌ی 40° و نیوه‌تیره‌که‌ی 6 cm بێت.

ب له‌بازنه‌یه‌که‌دا پیاوه‌ی که‌وانه‌که‌ی 135° و نیوه‌تیره‌که‌ی 4 cm بێت.

بىرىكەۋە و تاوتۇيىكە

1. جىاۋازى لەنىۋان درىژى كەۋانە وپپوانەكەيدا چىيە؟
2. كاتىك پىتزاىەك بۇ چەند كەرتىكى بازىيە يەكسان دابەشەكەي ھەريەكەيان كەرتىكى بازىيە دەپت.
3. رېكخەريە ئەم خستەيەي خوارەۋە بنوسە و تەۋايىكە.

ياساكەي	ويئەكەي
پوۋبەري كەرتى بازىيە	
پوۋبەري پارچە بازىيە	
درىژى كەۋانە	

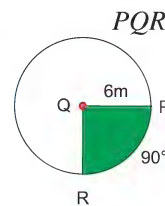
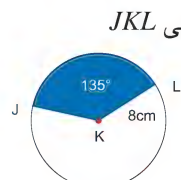
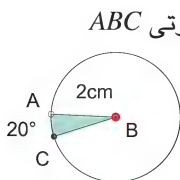


8-1 رايۇنلار

رايۇنلار ئاراستەكراۋ

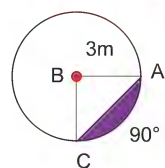
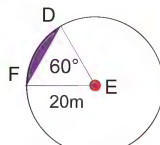
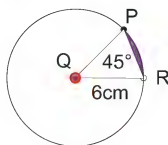
1. زاراۋەكان ئەو ناۋچەيەي بەدوۋ نيوەتيرە لەنيۋەتيرەكانى بازىيەك و ئەو كەۋانەيەي سنورىان دەدات برىتييە لە ؟ (كەرتى بازىيە يان پارچە بازىيە).

- پروۋبەري ھەركەرتىكى بازىيەي بەپىي π بدۆزەۋە، پاشان بۇ نىكتىن بەش لە سەد نىكتىكەۋە.

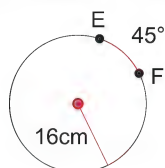
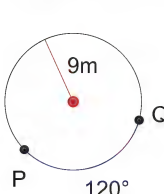


- دەريۋانى تىشكى منارەيەك بەگۆشەيەك پپوانەكەي 150° دەسورپتەۋە. تىشكەكەي تا دورى 3 km دەگات، ئەو پروۋبەري تىشكەكە بەسەريدا دەروات ھەژمارىكە بۇ نىكتىن كىلومەتر دوۋجا نىكتىكراپتەۋە.

- ھەنگاۋى جۇراۋجۇر پروۋبەري ھەپارچە بازىيەك بدۆزەۋە بۇ نىكتىن بەش لە سەد نىكتىكراپتەۋە.



- درىژى ھەر كەۋانەيەك بەپىي π بدۆزەۋە و بۇ نىكتىن بەش لە سەد نىكتىكراپتەۋە.

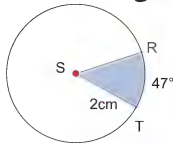


- درىژى كەۋانەيەك پپوانەكەي 20° بىت، لەو بازىيەدا نيوەتيرەكەي 6 m بىت.

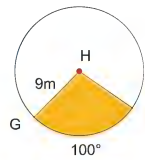
راهبندان وشيكاركردنې پرسپارهكان

پووبهري هر كه رته بازنه ييه كه به پيې π بدوژدوه و بو نزيكترين بهش له سهد نزيكبه كه وه.

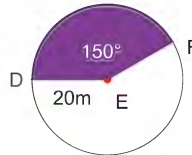
14 كه رتي RST



13 كه رتي GHJ



12 كه رتي DEF



15 ته لار ساسني تاقى (قمره) سهر په نجه ربه كه

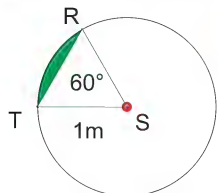
له شيوه ي نيوبازنه دايه، هه روك چو ن له سهر

دەرگای مالان هه يه، پووبهري ئه و تاقه

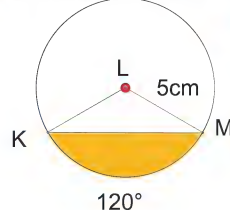
هه ژماري كه بو نزيكترين سانتيمه تر دوو جا

نزيك كرابي ته وه.

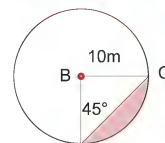
ههنگاوى جوړاوجوړ پووبهري هه پراچه بازنه ييه كه بدوژدوه و بو نزيكترين بهش له سهد نزيكبه كه وه.



18

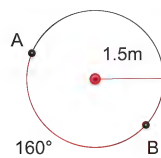


17

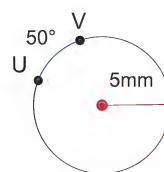


16

دريژي هر كه وانه ييه كه به پيې π بدوژدوه و بو نزيكترين بهش له سهد نزيكبه كه وه.



20



19

21 له بازنه يه كدا پيوانه ي كه وانه كه ي 9° وتيره كه ي 6 m بي ت.

22 ميژووي بيركارى زانايانى بيركارى گريكيه كان

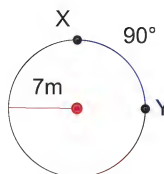
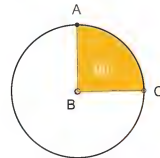
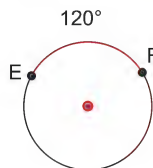
له شيوه ي بهرام بهر كه ناويان ناوه سالي نو ن كو ليونه ته وه

چيوه ي سالي نو نى بهرام بهر هه ژماري كه نزيكبه كه وه

له نزيكترين ده يه كه.

نيو دتيره ي هر بازنه ييه كه بدوژدوه.

23 پووبهري كه رتي ABC يه كسانه به 9π يه كه دوو جا 24 دريژي كه وانه ي EF يه كسانه به 8π



25 خه ملان دن كه رتي 22/7 به هاي نزيك يي ژماره π يه.

ا ئه و به هايه به كار بي نه بو دوژينه وه ي به هاي نزيك يي دريژي كه وانه ي XY

ب كليلى بژمي ر به كار بي نه بو دوژينه وه ي دريژي كه وانه ي XY له گه ل

وه رگرتنى 8 په نووس دواى فاريزه كه.

ج ناي ا ئه ويه ها نزيك ييه ي له لقي ا دا دوژينه وه گه وره تره

له وه ي له لقي ب دا دوژينه وه يان بچوو كتره؟

راهبندانى نازاد

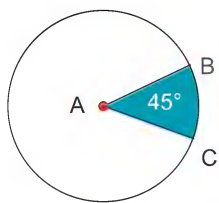
بو شيكارى ته ماشاي
پرسپاره كان نموونه

1 14-12

2 15

3 18-16

4 21-19

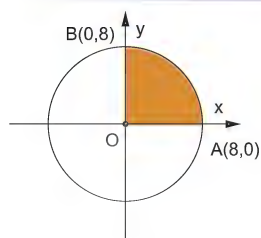


26 بیرکردنه‌وهی ره‌خنه‌گرانه نیو‌تیره‌ی بازنه‌یه‌ک بدۆزه‌وه ئه‌گهر بزانی پرویه‌ره‌که‌ی 24 cm^2 پاشان کاتێک پرویه‌ری که‌رته سه‌وزه‌که 3 m^2 بێت.

27 بننوسه چۆن نیو‌تیره‌ی بازنه‌یه‌ک هه‌ژمارده‌که‌ی ئه‌گهر درێژی که‌وانه‌و پێوانه‌که‌ی بزانیته؟



ناماده‌کردن بۆ تاقیکردنه‌وه



28 پرویه‌ری که‌رتی AOB چه‌نده؟

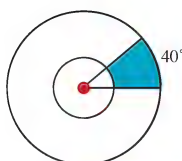
- (ا) 4π (ب) 16π (ج) 32π (د) 64π

29 درێژی که‌وانه‌ی AB چه‌نده؟

- (ا) 2π (ب) 4π (ج) 8π (د) 16π

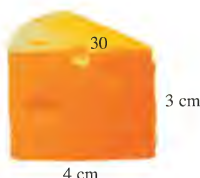
30 کورته وه‌لام پرویه‌ری که‌رتیکی بازنه‌یی چه‌نده که به‌که‌وانه‌یه‌ک پێوانه‌که‌ی 38° بێت سنوور دراوه له‌و بازنه‌یه‌دا نیو‌تیره‌که‌ی 12 cm بێت؟

به‌ره‌نگاری و فراوانکردن



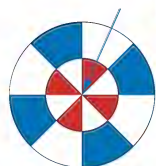
31 پرویه‌ری به‌شه شینه‌که چه‌نده؟ ئه‌گهر بزانی نیو‌تیره‌ی بازنه‌ گه‌وره‌که 5 cm و نیو‌تیره‌ی بچووکه‌که 2 cm ؟

32 پارچه‌ په‌نیری به‌رامبه‌ر که‌رتیکه له‌لوله‌ک.



(ا) قه‌باره‌ی ئه‌و پارچه‌یه چه‌نده؟ بۆ نزیکترین ده‌یه‌ک نزیکبکه‌وه.

(ب) پرویه‌ری پروی سه‌ره‌وه‌ی بدۆزه‌وه بۆ نزیکترین ده‌یه‌ک نزیکبکه‌وه.



33 ئه‌گهر پێوانه‌ی هه‌ر چه‌قه‌گۆشه‌یه‌کی له وێنه‌ی به‌رامبه‌ر 45° یه،

نیو‌تیره‌ی بازنه‌ بچووکه‌که یه‌ک گرێیه نیو‌تیره‌ی گه‌وره‌که دوو گرێیه ئه‌گهری ئه‌وه‌ی تیره‌که یه‌کێک له‌و ناوچانه‌ی خواره‌وه بپیکێ چه‌نده؟

- (ا) ناوچه‌ی سوور (ب) ناوچه‌ی شین (ج) ناوچه‌ی سوور یان شین؟

پیداچوونه‌وه‌ی لولپێچی

دیاریبکه ئایا هه‌ریه‌ک له‌م راسته‌هێلانه تهریبه به راسته‌هێلی $y = 4x - 5$ یان ئه‌ستوونه یان هه‌یچیان نییه. (پۆله‌کانی پێشوو)

34 $8x - 2y = 6$.

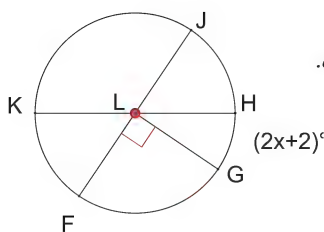
35 ئه‌و راسته‌هێلی به‌ دوو خالی $(\frac{1}{2}, 0)$ و $(1\frac{1}{2}, 2)$ دا ده‌روات.

36 ئه‌و راسته‌هێلی ته‌وه‌ری یه‌که‌م له (4) دا ته‌وه‌ری دووهم له (1) دا ده‌برێت.

به‌پێی π بدۆزه‌وه (وانه‌ی 1-7)

37 قه‌باره‌ی گۆیه‌ک نیو‌تیره‌که‌ی 3 cm بێت.

38 چۆیه‌ی (بازنه‌ی مه‌زن) ی گۆیه‌ک پرویه‌ری پروه‌که‌ی $4\pi \text{ m}^2$ بێت.



41 $m \widehat{JFH}$

40 $m \widehat{KJ}$

39 $m \widehat{KLJ}$

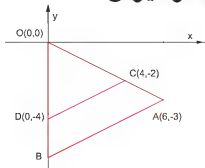
(پۆله‌کانی پێشوو) هه‌ژماربکه.

رېبەرى خويندن: پىداچوونەو

20 بېسەلمىنە دوو سىگوشەى RST و RUV ھاوشىوون
كاتىك $R(1, -3)$ و $S(-1, -1)$ و $T(2, 0)$
و $U(-3, 1)$ و $V(3, 3)$.

21 بېسەلمىنە دوو سىگوشەى JKL و JMN ھاوشىوون
كاتىك $J(4, 4)$ و $K(2, 3)$ و $L(4, 2)$
و $M(-4, 0)$ و $N(4, -4)$.

22 $O(0, 0)$ و $A(6, -3)$ و $C(4, -2)$ و $D(0, -4)$ پۇتوانى
خالى B بدۆزەو ئەگەر بزانىت دوو سىگوشەى
 AOB و COD ھاوشىوون.

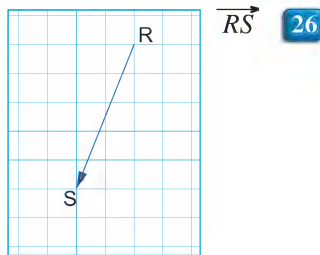


23 وىنەى سىگوشەى KLM كاتىك $K(0, 3)$ و $L(0, 0)$
و $M(4, 0)$ پاشان وىنە گەرەكراوئەكەى
بەرئىزەى 3 بكىشە پرونىبەكەو دوو سىگوشەكە
ھاوشىوون.

ھەر ئاراستەبىك بە دوو بىكئەرەكەى بنووسە.

24 \overrightarrow{AB} كاتىك $A(5, 1)$ و $B(2, 3)$.

25 \overrightarrow{MN} كاتىك $M(2, 4)$ و $N(1, 2)$.



وینەى ھەر ئاراستەبىك لە پروتەختى پۇتواندا بكىشە
ودىزىيەكەى بۇ نىكتىرىن دەيەك نىكبەكەو.

27 $\langle -5, -3 \rangle$

28 $\langle -2, 0 \rangle$

29 $\langle 4, -4 \rangle$

30 $\langle 4, 4 \rangle$

شوینى ھەر خالىك لەبۇشایى پۇتواندا دیاربیکە.

1 $(-1, 0, 3)$

2 $(2, -2, 1)$

3 $(0, -1, 1)$

4 $(3, 1, 0)$

وینەى ھەر پروتەختىك لەبۇشایى پۇتواندا بكىشە.

5 $x - 3y + 2z = 6$

6 $2x - 4y - 2z = 4$

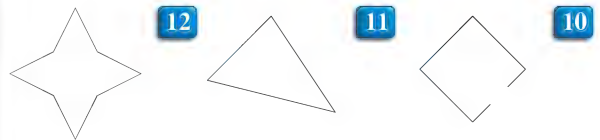
7 $-x + y - 5z = 5$

8 $3x + 2y + z = -6$

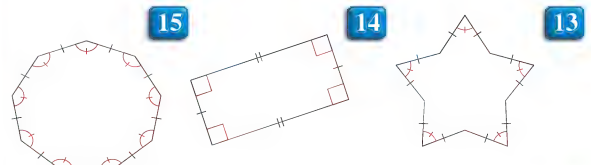
9 **ئابورى بەكاربەر** روناك 35 000 دینارى پىپە

دەيەوئ ساردەمەنى وپیتزاو شیرینی بکړېت نرخى
قوتویەك ساردەمەنى 2 000 دینارو کولیرەیکى
پیتزا 9 000 دینار وپاکەتیک شیرینی 4 000 دینارە
ھاوکیشەیک بەسى نەزانراو بۇ دەرەپىنى ئەوہى
سەرەو بنووسە.

ئەگەر ئەم شىوانە چەندلابوون بەپىي ژمارەى لایەکانى
ناویان بنى.



ئەگەر چەندلاکە ریکە یان ناریکە قۇپاوه یان قۇقرە
دیاربیکە.



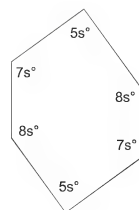
بدۆزەو.

16 كۆى پىوانەى گۆشەکانى ناوہوى دوازەلایەك.

17 پىوانەى ھەرگۆشەیکى ناوہو لەچەندلایەكى
رېكدا 20 لای ھەبىت.

18 پىوانەى ھەر گۆشەیکى
ناوہوى چەندلای بەرامبەر.

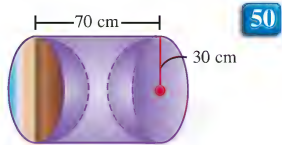
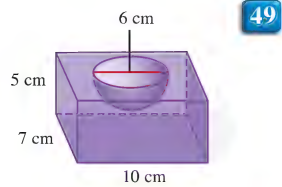
19 پىوانەى گۆشەکانى دەرەوى
چوارلایەكى رېك.



47 پووبەرى گۆيەك قەبارەكەى $288\pi \text{ cm}^3$ بىت.

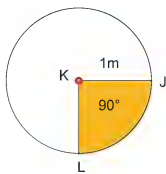
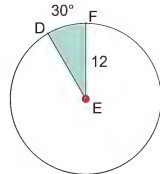
48 تىرەى گۆيەك پووبەرىكەى $256\pi \text{ cm}^2$ بىت.

پووبەرى پوو و قەبارەى ھەرىەك لەم تەنە ئاويتانە بدۆزەو.



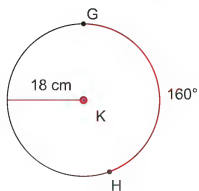
پووبەرى ھەر كەرتىكى بازىيەى بەپىي π بدۆزەو پاشان بۆ نىكتىرىن بەش لەسەد نىكتىكەو.

51 كەرتى DEF

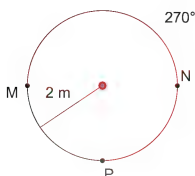


52 كەرتى LKJ

درىژى ھەر كەوانەيەك بەپىي π بدۆزەو پاشان بۆ نىكتىرىن بەش لەسەد نىكتىكەو.



53 \widehat{GH}



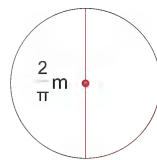
54 \widehat{MNP}

ويئەى ھەر ئاراستەبىرەك لە پروتەختى پۆتاندە بىكەشە لارىيەكەى بۆ نىكتىرىن پە نىكتىكەو.

31 خىرايى كۆپتەرىك بەئاراستەبىرى (4, 5) نوينرايىت.

32 فرۆكەيەك بەخىرايى 600 km/h بەئاراستەى باكور 55° . خۆرەلات دەفرىت، ئەمە لە كاتىكدا خىرايى بايەك 50 km/h بەئاراستەى خۆرەلات بىت خىرايى راستىنەى فرۆكەكە چەندە؟ لارىيە راستىنەكەى چەندە؟ خىرايەكە بۆ نىكتىرىن دەيەك ولارىيەكەى بۆ نىكتىرىن پە نىكتىكەو.

ھەر پىوانەيەك بدۆزەو، لەكاتى پىويستە وەلامەكەت بۆ نىكتىرىن دەيەك نىكتىكەو.



33 چىوەى بازىيەى بەرامبەر.

34 پووبەرى بازىيەك چىوەى $14\pi \text{ m}$

35 تىرەى بازىيەك پووبەرى $64x^2\pi \text{ cm}^2$ بىت.

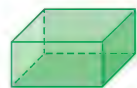
36 پووبەرى پىنجلايەكى رىك درىژى لايەكى 4 cm بىت.

37 پووبەرى سىگۆشەيەكى رىك لايەكى 4 km بىت.

38 پووبەرى ھەشتلايەكى رىك لايەكى 8 cm بىت.

39 پووبەرى چوارگۆشەيەك تىرەكەى 12 mm .

ژمارەى پووەكان ولايەكان و سەرەكان لەھەر چەند پوويەكدا بدۆزەو پاسادانى ياساى ئۆلەر بكة.



41



40

دوورى نيوان ھەردوو خالەكەو پۆتانی ناوەرەستى ئەو پارچە راستەھىلەى دووخالەكە سنوورىداو بدۆزەو بۆ نىكتىرىن دەيەك نىكتىكەو.

42 $(7, 1, 1), (2, 6, 4)$

43 $(5, 7, 8), (0, 3, 0)$

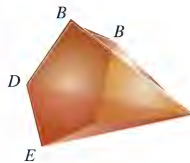
44 $(9, 1, 5), (7, 2, 6)$

45 $(2, 7, 4), (6, 2, 8)$

بەپىي π ئەمانە بدۆزەو.

46 قەبارەى گۆيەك پووبەرى پووەكەى $100\pi \text{ cm}^2$ بىت.

تاقىکردنەۋەى بەش

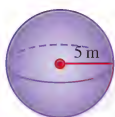


16 ژمارەى پوۋەكان ولايەكان
وسەرەكان لەم تەنە ئەندازەىيەى
بەرامبەر چەندە؟ ياساى ئۆلەر A
پاسادان بكە؟

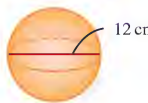
دوورى نيوان دووخال وپوۋتانى خالى ناوەرەستى ئەو
پارچە راستەھىلەى بە دوو خالەكە سنووردراۋە بدۆزەۋە.
ۋەلامەكەت بۇ نىكتىرىن دەيەك نىكتىكەۋە.

17 (0, 0, 0) (5, 5, 5) (6, 0, 9) (7, 1, 4)

18 (2, -5, 7) (-1, 4, 3)

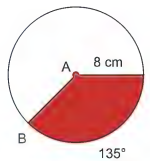


19 پوۋبەرى گۆى بەرامبەر بدۆزەۋە
بۇ نىكتىرىن دەيەك نىكتىكەۋە.



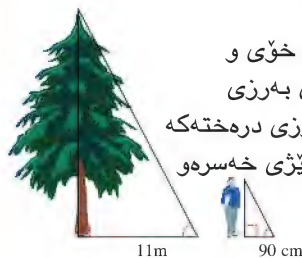
20 قەبارەى گۆ بەرامبەر بدۆزەۋە بۇ
نىكتىرىن دەيەك نىكتىكەۋە.

21 پوۋبەرى شەشلايەكى پىك درىژى لايەكى 4 m بىت
بۇ نىكتىرىن دەيەك نىكتىكەۋە.



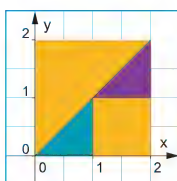
22 پوۋبەرى كەرتى بازەبى بەرامبەر
بەپىي π بدۆزەۋە بۇ نىكتىرىن
بەش لە سەد نىكتىكەۋە.

23 درىژى كەۋانەى BC بەپىي π بدۆزەۋە و نىكتىكەۋە
بۇ نىكتىرىن بەش لە سەد.



24 خەسرە درىژى سىپەرى خۆى و
درەختىكى پىۋا بۇ ئەۋەى بەرزى
درەختەكە بدۆزىتەۋە بەرزى درەختەكە
چەندە؟ ئەگەر بزەنيت درىژى خەسرە
175 cm

25 بىسەلمىنە دوو سىگۇشەى ABC و ADE ھاۋشۋەن
كاتىك A (6, 5) و B (3, 4) . C (6, 3) و D (-3, 2) و
E (6, -1)



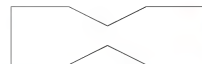
26 وىنەى دروشمى بەرامبەر
دروستىكە داۋى گەرەكردنى
بەرىژەى 3/2.

شۋىنى ھەرخالىك لەبۇشايى پوۋتاندە ديارىبەكە.

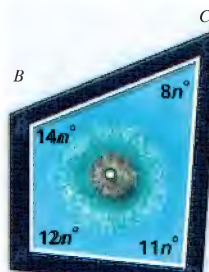
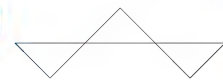
1 (2, -1, 3) 2 (0, -1, 3)

3 (-2, 1, -1)

شۋىۋەكە چەندلايە يان نا، ئەگەر وايە بەپىي ژمارەى
لايەكان ناۋى بنى.



4



5

6 گۆمەئاۋىك لەشۋىۋەى
چوارلادايە ھەرەك لەۋىنەى
بەرامبەر ديارە پىۋانەى ھەر
گۆشەيەكى ناوۋەى
ھەژمارىكە.

7 كۆى پىۋانەى گۆشەكانى
ناوۋەى نۆلايەكى قوقز بدۆزەۋە.

8 پىۋانەى گۆشەى درەۋەى چەندلايەكى پىك ژمارەى
لايەكانى 15 بىت بدۆزەۋە.

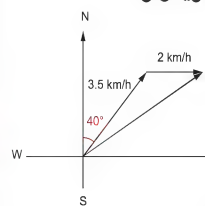
ۋىنەى ھەر ئاراستەبىرەك لە پوۋتەختى پوۋتەكاندا
بىكشە و درىژىيەكەى بۇ نىكتىرىن دەيەك ھەژمارىكە.

9 (1, 3) 10 (-4, 1) 11 (2, -3)

ۋىنەى ھەر ئاراستەبىرەك لە پوۋتەختى پوۋتەكاندا
بىكشە و درىژىيەكەى بۇ نىكتىرىن پلە ھەژمارىكە.

12 خىرايى فرۆكەيەك بەئاراستەبىرى (1, 3) نوينراۋە.

13 خىرايى با بەئاراستەبىرى (4, 1) نوينراۋە.



14 سەرچۈن بەسۋار پايسكىلەكەى

بە خىرايەكى نەگۆپ برەكەى

3.5 km/h بە

ئاراستەى باكور 40° خۆرەلات

كەۋتەرى لەۋكاتەدا خىرايى با 2 km/h بە

ئاراستەى خۆرەلات بو، خىرايى راستىنەى

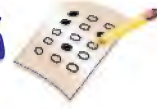
سەرچۈن بۇ نىكتىرىن دەيەك و ئاراستەكەى بۇ

نىكتىرىن پلە نىكتىكەۋە چەندە؟

15 چىۋە و پوۋبەرى ئەو بازەنەى تىرەكەى 12m

بەپىي π بدۆزەۋە.

تاقىردنەۋى كەلەكەبوو



بەھاي x لەوینەى بەرامبەردا كامەيە؟

- ☐ 22.5° ☐ 90°
☐ 45° ☐ 135°

شارەوانى باخچەيەكى لەسەر شىۋەى شەشلايەك بۇ چاندنى گول تەرخانكرد، رويەرى ئەو شوپنە بۇ نىكتىرەن دەيەك نىكرابىتەۋە چەندە ئەگەر بزانى درىژى لايەكى شەشلاكە 5 م بىت.

- ☐ 32.5 m² ☐ 75.0 m²
☐ 65.0 m² ☐ 129.9 m²

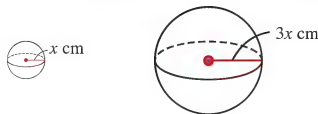
چۇن رىژەى قەبارەى گۆيەك بۇ رويەرەكەى دەگۇرپت ئەگەر نيوەتيرەكەى دووھىندكرا.

- ☐ رىژەكە ناگۇرپت. ☐ لە 4 دەدرىت.
☐ دوو ھىندە دەبىت. ☐ لە 8 دەدرىت.

10 $M(2, -6, 3)$ ناوەرەستى \overline{AB} كاتىك $A(x, y, z)$ و $B(-2, 6, 13)$ پۇتوانى خالى A چەندە؟

- ☐ $A(2, -6, 19)$ ☐ $A(-6, 18, 23)$
☐ $A(6, -18, -7)$ ☐ $A(0, 0, 8)$

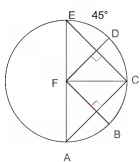
11 قەبارەى گۆيە گەۋرەكە چەندە؟ ئەگەر قەبارەى بچوكەكە 288 cm³ بىت.



- ☐ 864 cm³ ☐ 7776 cm³
☐ 2827 cm³ ☐ 23 328 cm³

12 كام لەم ئاراستەبىرەنى خوارەۋە درىژىيەكەى يەكسانە بە $3\sqrt{5}$

- ☐ $\langle -4, -5 \rangle$ ☐ $\langle 5, -4 \rangle$
☐ $\langle -3, 6 \rangle$ ☐ $\langle 5, 5 \rangle$



13 رويەرى كەرتە بازەنى EFD چەندە؟ ئەگەر پۇتوانەى \widehat{BC} 6π cm بىت؟

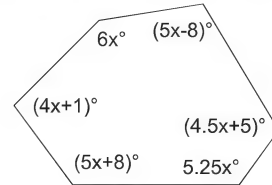
- ☐ 20π cm² ☐ 120π cm²
☐ 72π cm² ☐ 240π cm²

هەلبۇاردن لە ۋەلامى جۇراۋجۇر

1 كام لەمانەى خوارەۋە يەكتىرەينەكانى پووتەختى $2x + y - 5z = 20$ دەنوئىت.

- ☐ $x = 0, y = 0, z = 0$ ☐ $x = 10, y = 20, z = -4$
☐ $x = 2, y = 1, z = -5$ ☐ $x = 10, y = 20, z = 4$

2 بەھاي x لەم چەندلايەى خوارەۋەدا چەندە؟



- ☐ 12 ☐ 24
☐ 18 ☐ 36

3 پۇوانەى ھەر گۆشەيەكى ناوہەى دوازە لايەكى پىك چەندە؟

- ☐ 30° ☐ 150°
☐ 144° ☐ 162°

4 كام لەم ئاراستەبىرەنى خوارەۋە يەكسانە بە ئاراستەبىرى \overline{AB} كاتىك $A(2, -1)$ و $B(-2, 4)$ بىت؟

- ☐ $\langle -4, -5 \rangle$ ☐ $\langle 5, -4 \rangle$
☐ $\langle -4, 5 \rangle$ ☐ $\langle 5, 4 \rangle$

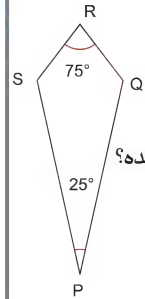
5 $\hat{D} \cong \hat{E}$, $\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C}$ قۇزە $ABCDE$ پىنجلايەكى قۇزە $\hat{A} = 2m$ پۇوانەى C چەندە؟

- ☐ 67.5° ☐ 154.2°
☐ 135° ☐ 225°

6 جۇرى ئەو سىگۇشەيە چىيە پۇوانەى گۆشەكانى ناوہەى $(2x)^\circ$ و $(3x-9)^\circ$ و $(x+27)^\circ$ بىت.

- ☐ دوولايەكسانى گۆشە تىژە.
☐ دوولايەكسانى ۋەستاۋە.
☐ جىلالى گۆشە تىژە.
☐ جىلالى گۆشەيەكى كراۋەيە.

تەنھا ۋە لَام



14 ژمارەى لايەكانى چەندلايەكى قۇقز

چەندە ئەگەر سەرجمى پېوانەى

گۆشەكانى ناوھەى 1260° بېت؟

15 پېوانەى \widehat{PQR} لەچەندلاى بەرامبەردا چەندە؟

16 درىژى لاوین 1.6 m و درىژى سېبەرەكەى

3.5 m بەرزى درەختىك چەندە؟ ئەگەر

سېبەرەكەى 17.5 m درىژبوويىتەو.

17 ژمارەى ئەو پارچە راستەھىلانەى لەئەنجامى

گەياندى دووخال لەنيوان 6 خالدا لە پروتەختىكدا

پەيدادەبن چەندە؟ ئەگەر زانیت هېچ سى خالىكيان

لەپىكى يەكترى نەبن.

18 نيوەتيرەى بازەنەيك چەندە؟ ئەگەر پىژەى

پووبەرەكەى بۇ چىوہەكەى يەكسان بېت بە 2.5

19 درىژى بەرەنجامى دوو ئاراستەبىرى $\vec{u} = \langle 3, -7 \rangle$

$\vec{v} = \langle -6, 5 \rangle$ چەندە؟ ۋە لَام بۇ نىكتىرىن دەيەك نىكتىكەو.

20 ژمارەى لايەكانى زۆر پوو چەندە؟ كە 12 سەر و 8

پووى ھەبېت؟

21 پووبەرى شەشلايەكى پىك كە درىژى لايەكى 2 cm

بېت چەندە؟ ۋە لَامەكەت بۇ نىكتىرىن دەيەك نىكتىكەو.

22 درىژى ئەو كەوانەيەى نيوە بازەنەيك لە بازەنەيكدا

نيوہتيرەكەى 5 mm بېت دروستى دەكات چەندە؟

كورنە ۋە لَام

23 بيسەلمېنە دوو سىگۆشەى ABC و DEC ھاوشېوون

كاتىك $A(-2, 0)$ و $B(2, 2)$ و $C(2, -2)$ و $D(0, -1)$

$E(2, 0)$ بېت.

24 نيوەتيرەى گۆيەك چەندە؟ ئەگەر پىژەى پووبەرى بۇ

چىوہەكەى يەكسان بېت بەپىژەى 2.5 بۇ 1 يەكەى درىژى.

25 ۋىنەى سىگۆشەى ABC بىكىشە كاتىك

$A(1, -2)$ و $B(-2, -3)$ و $C(-2, 2)$ بېت.

1 ۋىنەى $A'B'C'$ بۇ سىگۆشەى نمونەى پېشوو

بە گەورەكرىدىك پىژەكەى $\frac{3}{2}$ بېت بىكىشە.

ب بيسەلمېنە پىژەكانى

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'}$ و $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{B'C'}$ و $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{A'C'}$

يەكسانن بە بەكارھىنانى لارى.

26

سەرەكانى سىگۆشەيكە برىتېين لە $A(1, -2)$ و $B(-2, -3)$

سىگۆشەى $A'B'C'$ برىتېينە لە ۋىنەى سىگۆشەى

ABC بەھاوپىژەيەكى ئەندازەيى پىژەكەى $\frac{3}{2}$ بېت.

ا لەھەمان پروتەختى پووتاندا ۋىنەى دوو

سىگۆشەى ABC و $A'B'C'$ بىكىشە.

ب پرونىبىكەرەو $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'}$ و $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{A'C'}$ و $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{B'C'}$

يەكسانن بۇ پىشتىوانىكرىنى ۋە لَامەكەت لارى

بەكاربېنە.

27

دو وىستگەى سووتەمەنى لەسەر پىگايەكى خىران

دوورى نيوانيان 8 km بەھوۋى تەواوبوونى سووتەمەنى

ئۆتۆمبىلىك لەنيوان دوو وىستگەكەدا ۋەستا ئەگەرى

ئەوۋى ئەو خالەى ئۆتۆمبىلەكەتتىدا ۋەستاۋە بەلايەنى

كەمەوہ دوورىيەكەى لە 2 km كەمتر نەبېت لەھەردو

ۋىستگەكەوہ چەندە؟ ھىلكارىيەك بىكىشە باسى ئەوہ بكة

چۇن ۋە لَامەكەت دۆزيەوہ.

درىژە ۋە لَام

28

نەوزاد و سالار پىكەوہ دەژين برىارياندا لەگەل

سامانى ئامۇزاياندا سەردانى ناۋچەيەكى

گەشتىارى بكن. نەوزاد راستەوخۇ چوو بۇ ناۋچە

گەشتىارىيەكە بە لَام سالار چوو بۇ مالى ئامۇزاكەى

تا لەگەل خۇى بىبات. سالار 90 km بەئاراستەى

باكور 25°- خۇرھەلات بۇ مالى سامان برى پاشان

لەگەل كورەمامەكەيدا 50 km بەئاراستەى

خۇرھەلات برى تا گەيشتە ناۋچە گەشتىارەكە.

ا ئەو دوو ئاراستەبەرە بەپىكنەرەكانىيەوہ بنووسە

كە گەشتەكەى نەوزاد و سالار لە مالى

خۇيانەوہ بۇ مالى سامان ۋە لەمالى سامانەوہ

بۇ ناۋچە گەشتىارىيەكە دەنوئىت.

ب لارى ئەو ئاراستەبەرەى گەشتەكەى سالار لە

مالەكەيەوہ بۇ ناۋچەى گەشتىارىيەكە

دەنوئىت چەندە؟ درىژىيەكەى چەندە؟

ج نەوزاد و سالار لەھەمان كاتدا مالىان

بەجىھىشت لەھەمان كاتدا گەيشتنە ناۋچە

گەشتىارىيەكە نەوزاد بەخىرايىيەكى نەگۆر

50 km/h دەرويشت خىرايى سالار چەندبووہ؟

سیستمی هاوکیشهکان و لاسهنگه هیلییهکان

Systems of Linear Equations and Inequalities

بهشی دووهم

وانهکان

- 1-2 لاسهنگه هیلییه دوو نه زانراو
- 2-2 نموونه (سامپله) هیلییهکان
- 3-2 سیستمهکانی لاسهنگه هیلییهکان
- 4-2 پروگرامی هیلی.

تاقیکردنهوهی نیوهی بهش

- 5-2 شیکاری ئهوسستمه هیلییهکانی
- سی نه زانراویان ههیه
- 6-2 پیوانیه ئامارییهکان.
- لاپهپهی تهکنولۆژیا
- 7-2 بهشینهوهی دووانی (کراوهی دوو رادهدار)

دهنگت بهرزبکهوه

دهتوانیت سیستمهکانی هاوکیشه
هیلییهکان بهمهبهستی پلاندان بو
کوکردنهوهی پارهیهکی ئهوتو بو
پاریزگاریکردن لهو بالاندانهی مهترسی
له ناوچوونیان ههیه بهکاربێنیت
ئهویش لهپێگای فروشتنی سالنامهوه
که وینه جوانهکانی ئهو بالاندانهیان
لهسهربیت.

ئايا تۆ ئامادەيت؟

✓ زاراۋەكان

- ھەر زاراۋەيەك بەپېي پېئاسەكەي كە لەلای چەيدا ھاتوۋە بېسەستەۋە.
- 1 ھاۋكىشە **ا** ھاۋكىشەي دوو نەزانراۋ، ئەو خالانەي شىكارەكە دەنۆيىن راستەھىلەك پىكىدىن
- 2 لاسەنگە **ب** لىژى راستەھىل برىتييە لە پىژەي لای بەرامبەر بۆ بەردەمەكەي
- 3 كۆمەلەي شىكار **ج** نووسىنى دوو بېرى جەبرى كە يەككە لە ھىمايەكانى نايەكسانى
- 4 لارى **د** نووسىنى دوو بېرى جەبرى كە ھىماي يەكسانى پىكەۋەيان دەبەستىتەۋە
- 5 خالە **ه** كۆمەلە بەھايەكن، ھاۋكىشەكە يان لاسەنگەكە پاسەدان دەكەن.
- پوونكرىنەۋەيەكان **و** كۆمەلە خالەكن لە پووتەختى پۇتانەكاندا پەيۋەندى لە نۆۋان دوو كۆمەلە پىدراۋا دەنۆيىت.

✓ بچوكتىن چەند جارەي ھاۋبەش

- بۇ ھەر جووتىك لەم ژمارانە بچوكتىن چەند جارەي ھاۋبەش بدۆزەۋە.
- 6 3 و 18 **7** 8 و 28 **8** 8 و 36 **9** 15 و 27

✓ لارىيەكانى ئەو راستەھىلەنەي بەيەكتى تەرىپن ولەسەر يەكتى ئەستونن

- ئەم دوو راستەھىلەنە تەرىپن يان ئەستون يان پەيۋەندىەكى ترە.
- 10 $\begin{cases} y = 5x - 4 \\ y = -\frac{1}{5}x - 4 \end{cases}$ **11** $\begin{cases} 5x - 10y = 3 \\ y = \frac{1}{2}x - 6 \end{cases}$ **12** $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = -4 \end{cases}$ **13** $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 3y - x = 5 \end{cases}$

✓ ھەژماركرىنى بەھاكاني برە جەبرىيەكان بە لەجياتيدان.

- بە دانانى بەھاي ھەر گۇراۋىك برەكە ھەژمار بكە
- 14 $y = 14, x = 8; 1.5x + 3y$ **15** $y = -4, x = 6; 5x - \frac{3}{4}y$
- 16 $y = \sqrt{2}, x = 0.25; 4x - \sqrt{2}y$ **17** $y = \frac{1}{3}, x = 1; -\frac{75x}{3y}$

✓ شىكاركرىنى ھاۋكىشە فرە ھەنگاۋەكان

- ھەريەك لەم ھاۋكىشانە شىكارىكە.
- 18 $8x + 19 = -5$ **19** $5x + 4 = 25 - 2x$ **20** $9x - (x + 12) = -13$ **21** $-3(4x - 5) - 1 = 20$

✓ شىكاركرىنى ئەو ھاۋكىشانەي كەرتيان تىدايە

- ھەريەك لەم ھاۋكىشانە شىكارىكە.
- 22 $\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}x = 8$ **23** $\frac{2}{5}x + \frac{1}{6} = -4$ **24** $x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{5}$ **25** $-\frac{1}{2} = 3x - \frac{1}{3}x$

زاراوه کان

Constraint	مەرج
Elimination	لا بردن
Feasible region	ناوچەى بەسود (ناوچەى گونجاو)
Linear programming	پروگرامى ھيلى
Linear system	سيستەمى ھيلى
Substitution	لەجياتيدانان
System of equations	سيستەمى ھاوكتىشەكان
System of linear inequalities	سيستەمى لاسەنگە ھيلىيەكان
Correlation	پەيوەستى
Line of best fit	راستە ھيلى باشتىرىن نواندن
Regrssion	ليژبونەوہ (دابەزىن)

دەروازەيەك لەسەر زاراوەكان

بۆ ئۇ ۋەي لەگەل ھەندىك لەم زاراۋاندا رابىيى كە لەم بەشەدا
ھاتوۋە ئەم ھەنگاۋانە پەيرەۋىكە:

1. وشەى گەپانەو وەتای گەپانەو وە بۆ دواوئە، چۆن وەتای ئەم وشەى وە بۆ تیگەشتنى وەتای لیژوونەو وە لە بیرکاریدا بەکار دینیت؟
2. وشەى لا بردن چى دەگەینیت؟ کاریگەرى کردارى لا بردن لە شیکار کردنى هاوکێشە بیرکارییەکاندا چییە؟
3. وشەى مەرج ئاماژەى بۆ کورتکردنەو یان دیاریکردنى سنووردارکردن، پۆلى کورتکردنەو هەکان لە بیرکاریدا چییە؟ بە نمونە پوونبکەو.
4. وشەى بەسوود مانای بونی شتایکى بەسوود دەگەینیت، نمونە لە سەرەتای پستەدا بەینەو کە ئەم وشەى تێدا یی، دواى ئەوێ گفوتگۆ لەسەر ئەوێ کە ناوچەى بەسوود ئاماژەى بۆ دەکات دیاریکە.

له رابردودا

ئەمانەت خویندوۋە

- نه‌خشه هیلاییه کانت به پوونکردنه وهی نواند.
- لاسه‌نگه هیلاییه یه‌ک نه‌زانراوه کانت به پوونکردنه وهی شیکارکرد.
- سیستمه هیلاییه‌کانی 2×2 ت شیکارکرد.
- ته‌نه ئە‌ندان‌ده‌یه‌یه‌کانی وه‌ک شه‌شپالو و پوازکت خو‌پ‌ندووه.

لهم بهشودا

نہمانہ فیردہ بیت

- لاسەنگەى ھېللى بە دوو نەزانراو بە
- پوونكردنه وهىي شيكارىكەيت.
- سىستىمى لاسەنگە ھېللىيەكان بە پوونكردنه وهىي
- شيكارىكەيت .
- پىرسارى پىرۆگرامى ھېللى شيكارىكەيت.
- سىستىمى ھاوكىشە ھېللىيەكانى 3×3 شيكارىكەيت
- نمونە ھېللىيەكان بۆ نواندى كۆمەلەى
- پىدراوكان.
- پىوانە ئامارىيەكان بۆ كۆمەلەى پىدراوكان
- بەشىنەو ئامارىيە دووانىيەكان

له داهاتوودا

دهتوانیت کارامه‌ییه‌کانی ئەم بەشە بەکاربێنیت بۆ

- شیکارکردنی سیستمی نه و هاوکیشانه‌ی ئالۆزبان زۆرتره.
- تیگ‌یشتنی نمونه هیللیه‌کان له بابته‌کانی تردا، وهک: کیمیا و فیزیا و ئابووری.
- پلاندانی کرداره‌کان له ژبانی پوژانه‌دا، وهک کوکرنه‌وه‌ی پاره و مال یان هه‌ڵسان به‌گشتوگوزار یان که‌مکرنه‌وه‌ی خهر حبیبه‌کان.

بىركارى

بە خويىندەۋە

و نووسىن



ستراتېيەتى ۋانە: نووسىنى پۇژانەى بىركارى

نووسىنى پۇژانەى بىركارى يارمەتيدەرە بۇ چاككردىنى كارامەيىھەكانى نووسىن و دەرەنجامهينانى، كاتىك بە نووسىن پۇژانەىكە دەرەبپىت، بۇت دەرەكەۋىت كە ھەندىك بابەت ھەيە لە بىركارى باش نايزانى، يان بەلاتەۋە شاراۋەن دەتوانىت ئەۋ پۇژانەى ھە پەنگدانەۋەى ئەۋ ۋانەى لە بىركارىدا فېريان بوۋى بەكاربېنىت. خالەكانى ئەۋ ۋانەى ئەۋ ئاستەنگت بۇ دروست دەكات، كورتكراۋەى ئەۋ چەمك و زاراۋانەى، دەرېپىنى پايەكەت پەيۋەندى بەۋانەكەۋەى ۋ ئەۋەى لەۋەش گرنگترە لە پۇژانەى بىركارىدا، پەنگدانەۋەى لەسەر پېشكەۋتنت لە فېربوۋنى بىركارىدا دەبېت.

لاپەرەيەك لە پۇژانەكانى خويىندكار: ئەم لاپەرەيە لە خوارەۋە ھاتوۋە لە پۇژانەكانى خويىندكارىكە، بىخويىنەۋە.



پۇژانەكە

پوۋبەپوۋى ئاستەنگ دەبمەۋە بەتابىيەتى لەۋانەى 1-2 ھەمبىشە ئەۋەم لە بىر دەچۋەكە ھىماى لاسەنگە پېچەۋانەبەكەمەۋە كاتىك ھەردوۋ لاي لاسەنگەكەم لە ژمارەيەكى سالب دەدا، يان دابەشى ژمارەيەكى 1- سالبم دەكرد بەپاي من ئەۋە دەگەپىتەۋە بۇ ئەۋەى كە باش لە ھۆى ئەمە تېنەگەيشتىبوم پىرسىارم لە مامۇستا كرە بەم شىۋەيە بۇى پوۋنكرەمەۋە بىر لە لاسەنگەى 3 < 4 بىكەۋە. ئەگەر ھەردوۋ لاي لاسەنگەكەت لېكدانى ژمارە 1- كرە بېئەۋەى ھىماى لاسەنگەكە بگۇرپىت 3 < 4- ت دەستدەكەۋىت ئەمەش ھەلەيە. ئەگەر ھىماى لاسەنگەكەت ھەلگىرايەۋە 4 > 3- دەستدەكەۋىت كە ئەمە پاستىيەكەيەتى ئەمە بەسەر ئەم لاسەنگەشدا جىبەجى دەكرپت كە نەزانراۋيان تىدايە. لەمەۋدا ئاگام لەۋە دەبېت كە ئەم ھەلەيە نەكەمەۋە.

ھەۋلېدە

بە نووسىنى پۇژانەكانى بىركارى دەستپىكە، ئەۋ بىرۋەكانەى لە خوارەۋە ھاتوۋن بۇ نووسىنى پۇژانەكانت بەكاربېتە، لەم ھەفتەيەۋە پۇژ دواى پۇژ پۇژانەكانت بنووسەۋە، دىلنابە لەنووسىنى بەرۋار و لاپەرە ۋ ژمارەكەى.

- ئەۋەى لەۋانەى ئەمپۇ دەمزانى.
 - ئەۋەى نا دىلنابوۋنم لە تېگەيشتىنى ۋانەى ئەمپۇ.
 - بۇ كۇتايى پېھىنانى ۋانەى ئەمپۇ پېۋىستىم بەم كارامەيىھەكانى خوارەۋەيە.
- (1) ئەۋ ئاستەنگانەى ھاتوۋنەتە پىگام چىن؟ چۆن دەتوانم بەسەرياندا زالىم؟
(2) چى لەۋانەى ئەمپۇ سەرەنجى پاكىشام؟ چىم بەلاۋە پەسەند نەبوۋ؟



لاسهنگه هیلپیه دوو

نه زانراوه کان

Linear inequalities in two unknowns

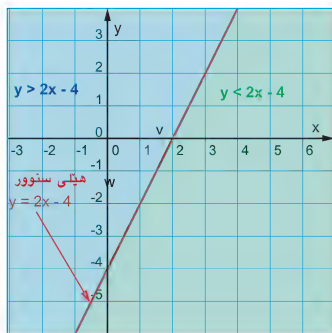
ئامانجه كان

- شىكار كړنى لاسهنگه هیلپى دوو نه زانراو به روونكړنه وهى
- پرسپاره كان به به كار هیلپانى لاسهنگه هیلپیه كان كه دوو نه زانراو يان تېدايه شىكار دهكان.

كى نهمه به كار دهیلپى؟

به روو به رانى ناوه نه كانى شانؤ لاسهنگه هیلپیه كان بؤ ديار يكر دنى ژماره ي بليت هكانى چوونه ژووره وه كه به نرخى جيا جيا ده يان فرؤشن بؤ ده سكه وتنى قازانچ به كار دپنن (نمونه ى 3)

نه خسه هیلپیه كان بنچينه لاسهنگه هیلپیه دوو نه زانراوه كان پېك دپنن. لاسهنگه هیلپى دوو نه زانراو په يو هندی نيوان دوو گوړاو دهره برېت كه هيمايه كه له هيمايه كانى لاسهنگه تېدايه وه $y > 2x - 4$ كومه له شىكارى لاسهنگه هیلپى دوو نه زانراو له هه مو ئه جووته رېكخراوانه (x, y) پېك دپنن كه پاسادانى لاسهنگه دهكان. و ئه خالانه شىكاره جيا جيا كانى لاسهنگه كه دهنو پنن به شىكن له رووته ختى پوتانه كان ئه ویش راسته هیلپكه و رووته خته دهكان به دوو به شه وه بؤ نمونه راسته هیلپى $y = 2x - 4$ رووته ختى پوتانه كان دهكان به دوو به شه وه.



هه روه كه له وینه به رامبه ردا دياره. پوتانه كانى خاله كانى يه كېك له به شه كان پاسادانى لاسهنگه $y > 2x - 4$ دهكان. له هه مان كاتدا پوتانه كانى خاله كانى به شه كه تر پاسادانى لاسهنگه $y < 2x - 4$ دهكان. به شى يه كه كومه له شىكارى لاسهنگه $y > 2x - 4$ به روونكړنه وهى دهنو پنن ئه ویش ناوچه شىكارى ئه لاسهنگه يه راسته هیلپى $y = 2x - 4$ هیلپى سنورى ناوچه شىكار پېك دپنن. وینه هیلپه سنورى كه به خالخال بكېشه. ئه ویش ماناى وايه خالخال كان ناكه و نه ناوچه شىكار وه.

بؤ شىكارى لاسهنگه $y > 2x - 4$ هیلپى سنور به خالخال بكېشه و ناوچه سهره وهى په رنگ بكه.

زاراوه كان

Vocabulary

لاسهنگه هیلپیه كان
Linear inequality

هیلپى سنور
Boundary line

روشنایى

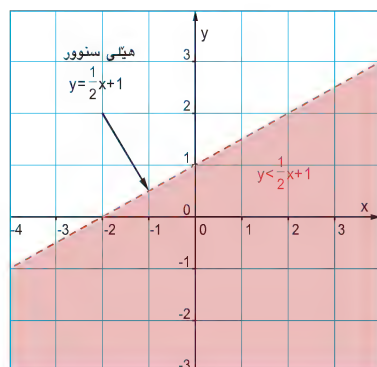
بیرت بېته وه كه ئه هیلپى دهكه وېته ژېر هه ريه كه له دوو هيماي \geq و \leq نيشانه ئه وه وه كه هیلپى سنور هیلپكى نه سپاوه وه و خالخال نيه.

شىكار كړنى لاسهنگه هیلپیه كانى دوو نه زانراو به روونكړنه وهى.

به روونكړنه وهى هه ريه كه له لاسهنگه شىكار بكه.

$$y < \frac{1}{2}x + 1$$

هیلپى سنور بریتیه له $y = \frac{1}{2}x + 1$ كه لاریه كه $\frac{1}{2}$ و ته وهى y له 1 داده برېت. هیلپى سنور به خالخال بكېشه، چونكه ناكه وېته ناوچه شىكار وه. ناوچه ژېر هیلپى سنور په رنگ بكه.



ساغكرنه وه خالخال كه ناوچه شىكار هه لېژېر، بؤ نمونه $(0, 0)$ تاقیبكه وه، نایا شىكارى لاسهنگه كه دهنو پنن.

$$y < \frac{1}{2}x + 1$$

$$0 < \frac{1}{2} \cdot 0 + 1$$

$$0 < 1$$

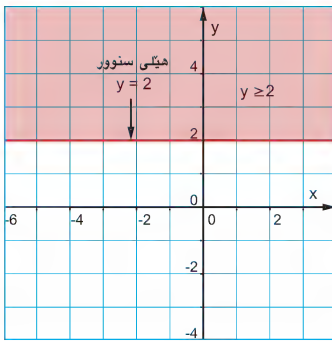
له بهر ئه وهى خالى

تاقیبكرنه وه پاسه دانى

لاسهنگه كه دهكان ئه و

ناوچه په رنگ كراوه كه شىكاره.

نمونه 1



ب $y \geq 2$

بیرت بێتەوێه که راستەهێڵی $y=2$ راستەهێڵیکی ئاسۆییە
 هەنگاوی 1 راستەهێڵێک بکێشە بەبەکارهێنانی هێڵیکی
 نەپساوێ چونکە هێڵی سنوور بەشێکە لە ناوچەی شیکار.
 هەنگاوی 2 ناوچەی سەرۆو هێڵی سنوور ڕەنگ بکە بۆ
 دیارکردنی خاڵەکان کاتێک $y > 2$.
 ساغکردنەوێه خاڵی (0,4) دەرکەوتە ناوچەی شیکاردوێه چونکە
 $4 \geq 2$ ، سەرەنج بدە هەر خاڵێک بکەوێتە سەر هێڵی سنوور یان
 سەرەوێ شیکاری لاسەنگەکە دەنۆینێت، بەهەڵی x هەرچەندبێت.

1. هەر لاسەنگەیهک بە ڕوونکردنەوێه شیکاریکە.

ب $y < -3$

ا $y \geq 3x - 2$



ئەگەر هاوکێشەی هێڵی سنوور بە شێوێ لاری - یەکتەرپین نەنوسرابوو، دەتوانیت خاڵێک
 هەڵبژێری نەکەوێتە سەر هێڵی سنوور بۆ دیارکردنی هەر ناوچەیهک کەدەبێ ڕەنگی بکەیت.
 ئەگەر خاڵەکە پاسەدانی لاسەنگەکە کرد، ئەو ناوچەیهی خاڵەکە تێدەکەوێت ڕەنگی بکە،
 ئەگەر نا، ناوچەکە تر ڕەنگ بکە.

2 **نمونه**
 شیکارکردنی لاسەنگە هێڵیهکان بە دوو نەزانراو بە ڕوونکردنەوێه
 بەبەکارهێنانی یەکتەرپینەکان لەگەڵ دوو تەوهری پۆتانهکان.

لاسەنگە $2x + 3y \geq 6$ بە بەکارهێنانی یەکتەرپینی لەگەڵ هەریەک لە دوو تەوهری
 پۆتانهکان شیکار بکە.

هەنگاوی 1 دوو یەکتەرپینەکان بدۆزەوێه.

بۆ دۆزینەوێه یەکتەرپینی هێڵی سنوور لەگەڵ هەریەک لە دوو تەوهری پۆتانهکان، لە
 جیاتی x سفردا بنێ، پاشان لە جیاتی y سفر دابنێ

یەکتەرپین لەگەڵ تەوهری دووهم

(ئاسۆیی) x

(ستوونی) y

$2x + 3y = 6$

$2x + 3y = 6$

$2x + 3 \times 0 = 6$

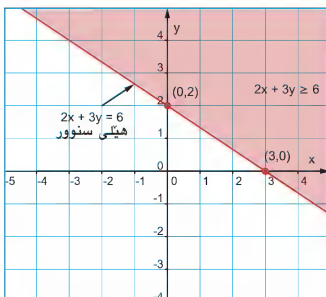
$2 \times 0 + 3y = 6$

$2x = 6$

$3y = 6$

$x = 3$

$y = 2$



هەنگاوی 2 هێڵی سنووری بکێشە

هێڵی سنوور ئەو راستەهێڵیه بە دوو خاڵی (0,2) و
 (3,0) دادەرپوات، ئەم راستەهێڵه بە هێڵیکی نەپساو
 بکێشە، چونکە بەشێکە لە ناوچەی شیکار.

هەنگاوی 3 ئەم ناوچەیه دیاریکە کە پێویستە ڕەنگی بکەیت.

خاڵی (0,0) لە لاسەنگەکەدا دابنێوێه. لەبەر ئەوێه لاسەنگە

$0 + 0 \geq 6$ هەڵەیه، واتە خاڵەکە ناکەوێتە ناوچەی شیکاردوێه، بۆیه

دەبێت ئەو ناوچەیهی دەرکەوێتە سەرۆوی هێڵی سنوور ڕەنگ بکەیت.

ڕۆشنایی

(0,0) وەک خاڵی
 تاقیکردنەوێه بەکاربێنە،
 تەنها ئەو کاتەنەبێت کە
 دەرکەوێتە سەر هێڵی
 سنوور.

2. لاسەنگە $3x - 4y > 12$ بەبەکارهێنانی دوو یەکتەرپینەکانی (ئاسۆیی و ستوونی)

بە ڕوونکردنەوێه شیکاریکە.



نمونه 3



جیبه جیکردنی بازگانی

له شانۆگهریه کدا بلیتی چوونه ژووره وهی گه وره کان به 8000 دیناره و بلیتی مندا لان 5000 دیناره بهر پۆده بهری شانۆگهریه که هه موو جارێ له هه ر ناهه نگی کدا 240 000 دینار خه رجه دکات، ده بی بهر پۆده بهر چه ند بلیتی جوونه ژووره وه له هه رجوړیک بفرو شیت تا قازانچ بکات؟ بهر پۆده بهر ده که 20 بلیتی مندا لانه ی فروشت، ده بی ت چه ند بلیتی گه وره کان بفرو شیت تا قازانچ بکات؟

1. له پرسیاره که تیبه گه

شیکارکردنی ئه م پرسیاره له دوو به ش پیکدیت: 1. نووسینی لاسه نگی که و شیکارکردنی به پوونکردنه وهی وه لامی پرسیار ی یه که مه. 2. دۆزینه وهی ژماره ی بلیته کانی گه وره کان که ده بی بفرو شیرین، کاتی ک 20 بلیت له بلیتی مندا لان فرو شراوه. پێدراوه گرنگه کان بنووسه:

- دوو جوړه بلیت هه یه: بلیتی گه وره کان به 8000 دیناره و بلیتی مندا لان به 5000 دیناره.
- پێویسته نرخ ی بلیته فرو شراوه کان له 240 000 دینار که متر نه بی ت.

2. پیلاندانی

هیمای x بو ژماره ی بلیتی گه وره کان و y بو ژماره ی پلیتی مندا لان به کاربینه، لاسه نگیه که بنووسه پرسیاره که بنوینیت.

نرخ ی بلیتی گه وره کان	×	ژماره ی بلیته کانی گه وره کان	+	نرخ ی بلیتی مندا لان	×	ژماره ی بلیته کانی مندا لان	≥	سه رجه م
8000	×	x	+	5000	×	y	≥	240 000

ده توانین پرسیاره که به لاسه نگیه $8000x + 5000y \geq 240\,000$ یان $8x + 5y \geq 240$ بنوینین.

3. شیکاری بکه

یه کتر برینه کانی هیلی سنوور له گه ل هه ردووته وه ره کان دیاریکه.

$$8x + 5 \times 0 = 240 \quad 8 \times 0 + 5y = 240$$

$$x = 30 \quad y = 48$$

هیلی سنوور بکیشه ئه و راسته هیله که به دوو خالی $(0, 48)$ و $(30, 0)$ دا ده روات، ئه و ناوچه یه ی هه موو ئه و خالانه ی تپدایه ده که ویتته چاره کی یه که م و سه رووی هیلی سنوور ده نوینن ره نگ بکه، له بهر ئه وه ی ژماره ی بلیته کان سالب نییه.

ژماره ی بلیته کانی مندا لان که فرو شراوه 20 له بو یه:

$$8x + 5 \times 20 \geq 240 \quad 8x + 100 \geq 240$$

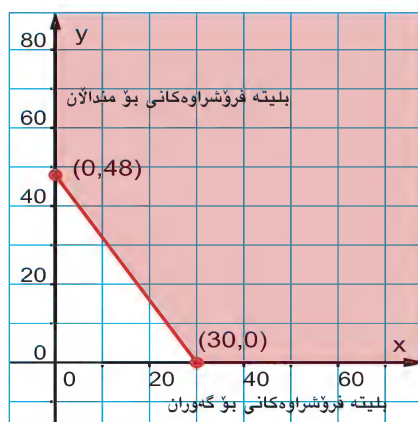
له جیات ی دانان ساده که $8x \geq 140$ و له دوایدا $x \geq 17.5$ پێویسته ژماره ی بلیته کان ژماره ی ته واوین. ده بی ژماره ی بلیته کانی فرو شراو بو گه وره کان له 18 که متر نه بی ت.

4. ساغبکه وه

$$18 \times 8000 + 20 \times 5000 = 244000$$

ئاگاداریه!

بیرت نه چیتته هیمای هه ر نه زانراوێک چیده که یه نی ت



3. بەرپۆھبەپرى مەلۇمەندى پۇشنىرى برىارىدا دوو جۇر دىارى بەسەر ئەندامەكانىدا دابەشېكات. نرخی ھەردىارىيەك لە جۇرى يەكەم 125 000 دىنارە و نرخیكەى لە جۇرى دوووم 40 000 دىنارە، بەرپۆھبەرەكە 1 500 000 دىنارى لەبەردەستايە، چەند دىارى لە ھەر جۇرىك دەتوانىت پېشكەش بكات؟ ئەگەر 4 دىارى لە جۇرى يەكەم بىت، لە جۇرى دوووم دەتوانىت چەند دىارى پېشكەش بكات؟



سەرۋە پەنگ بكة
زېرۋە پەنگ بكة

دەتوانىت بژمىرى پوونكردنهوھى بۇ شىكاركردى لاسەنگەى ھىلى دوو نەزانراو بە پوونكردنهوھى بەكاربىنىت. **Y1** دابگرە، و بەھوى دووگمەى جولان بۇ ئەو پەرى لای چەپ بچولیت **ENTER** دابگرە لە لای چەپ جۇرىك لە جۇرەكانى و وینە دەبىنى. ھەرەك لە وینەكەدا پوونكرادەتەو.

شىكاركردى لاسەنگە ھىلىيە دوو نەزانراوكان بەپوونكردنهوھى بەبەكارھىنانى پژمىرى پوونكردنهوھى

لە لاسەنگەى $2 < (2x - y) < \frac{2}{3}$ بۇ لایە پىى بنووسە و لاسەنگە دەستەوتووەكە بە پوونكردنهوھى شىكارىكە.

$$\frac{3}{2} \times 2 < (2x - y) < \frac{3}{2} \times \frac{2}{3}$$

ھەردو لایكەدانى $\frac{3}{2}$ بكة

$2x$ لە ھەر لایەك دەرىكە

ھەردو لای لایكەدانى -1 بكة و

ھىماى لاسەنگەكە ھەلگىزەو

$$2x - y < 3$$

$$-y < -2x + 3$$

$$y > 2x - 3$$



Y1 دابگرە. $2x - 3$ بنووسە، بە ھوى دوگمەى جولان بۇ

لای چەپ پېر **ENTER** دابگرە وینەكە لە لای چەپ

دەردەكەوئىت **GRAPH** دابگرە وینەكە بەرامبەرت دەست دەكەوئىت

(تېبىنى: نمونەكە بەبى بژمىرى پوونكردنهوھى شىكارى بكة).

رۇشناىى

بىرت بېتەو كە لىكەدانى
لاسەنگە لە ژمارەى سالب. يان
دابەشكردن بەسەرىدا ھىماى
لاسەنگەكە ھەلگىزەتەو.

4. بەپوونكردنهوھى لاسەنگەى $2(3x - 4y) > 24$ شىكارىكە بەبەكارھىنانى بژمىرى پوونكردنهوھى يان بە پىگای ئاساىى.



بىرىكەو و تاوتوبىكە

- بەروردبەكە لە نىوان دووبازنەى داخراووكراو. لە شىكارى لاسەنگەى ھىلى يەك نەزانراو بە پوونكردنهوھى وە لە نىوان دوو ھىلى سنورى خالخال و نەپساو لە شىكارى لاسەنگەى ھىلى دوو نەزانراو بە پوونكردنهوھى بكة.
- ناوچەى شىكار بۇ لاسەنگە $x \geq 4$ باس بكة.
- پوونىكەو ئايا دەتوانىت خالى $(0, 0)$ وەك خالى تاقىكردنهوھى بۇ دىارىكردى ناوچەى پىويست بۇ رەنگكردن لە كاتى شىكارى لاسەنگە $3x + 5y \leq 0$ بەكار بىنىت.
- پىكخەر بە خشتەكەى خواروۋە بنووسەو و تەواوى بكة. لە ھەر چوارچىوھىكە نمونەكە لەسەر دوو لاسەنگە بنووسە كە ناوچەى شىكارى لە سەرووى سنورەكە باسكراى: يەكەمیان بە شىوھى $y < \dots$ ، كاتىك $y < \dots$ ھىمايەك بىت لە ھىماكانى بەراوردكردن، و دووهمیان لە شىوازىكى ترى جىاوازدا بىت.



ھىلى سنورى خالخال	ھىلى سنورى خالخال	ھىلى سنورى نەپساو	ھىلى سنورى نەپساو
رەنگەكە لەسەر ھىلەكەيە	رەنگەكە لەسەر ھىلەكەيە	رەنگەكە لەسەر ھىلەكەيە	رەنگەكە لەسەر ھىلەكەيە

راهیټانی ناراسته‌کړاو

1 زارواوه‌کان پروونیکه‌وه چوڼ له توانادایه راسته‌هیلې $y = 3x - 4$ بېټه هیلې سنوور.

ههریه‌ک له‌م لاسه‌نگه به‌پروونکړنه‌وه‌ی شیکاریکه.

2 $y > -4$ 3 $y \leq 2$ 4 $y \geq x - 3$ 5 $y < -\frac{1}{3}x + 2$

2 هریه‌ک له‌م لاسه‌نگانه به به‌کاره‌یټانی یه‌کترپړنه‌کانی ناسووی و ستوونی شیکار بکه.

6 $3x + 2y > 12$ 7 $5x - 2y \leq 20$ 8 $-4x + 5y < -20$

9 به‌کاربردن قیان 17 000 دیناری پیپه، ده‌یوټ دووچور له قاوه‌ی نه‌هارپاوه (دهنک) که ناماده کړدنه‌که‌ی ناسانه بکړیت. دهنکوله‌کانی جوړی یه‌که‌م پهن و نرخی هر پاکه‌تیک 2290 دیناره و دهنکوله‌کانی جوړی دووهم ناسکترن و نرخی هرپاکه‌تیک 3750 دیناره.

ا هی‌مای x بۆ جوړی یه‌که‌م و y بۆ جوړی دووهم دابنې. لاسه‌نگه‌یه‌ک بنووسه پرسیاره‌که بنوینیت، و به‌پروونکړنه‌وه‌ی شیکاریکه، بۆ دیارکړدنې ژماره‌ی ئه‌و پاکه‌تانه‌ی که قیان له هرچوړیک بیان کړیت.

ب چهند دانه له جوړی یه‌که‌م ده‌توانیت بکړیت ئه‌گهر بزانیث که 3 پاکه‌تی له جوړی دووهم کړیوه؟

10 خویندنگاکان خویندکارانی پو‌لی یانزه‌هم دوو جوړ له تابلو هونه‌ریه‌کانیان دفرۆشن بۆ کوکړدنه‌وه‌ی بریک پاره له 280 000 دینار که‌متر نه‌یت، کاری یه‌که‌میان بری 1750 دینار قازانج دابینده‌کات ده‌کات له‌کاتی‌کدا کاری دووهمیان بری 1250 دینار قازانج دابینده‌کات.

ا هی‌مای x بۆ کاره‌کانی جوړی یه‌که‌م و هی‌مای y بۆ کاره‌کانی جوړی دووهم دابنې، لاسه‌نگه‌یه‌ک بنووسه پرسیاره‌که بنوینیت، و پروونکړنه‌وه‌ی شیکاری بکه بۆ دیارکړدنې ژماره‌ی ئه‌و کارتانه‌ی که خویندکاره‌کان پیوسته له‌هر جوړیک بیفرۆشن.

ب خویندکاره‌کان 100 کاریان له جوړی دووهم و 50 کاریان له جوړی یه‌که‌م فرۆشت. ئایا خویندکاره‌کان ئامانجه‌کیان پیکاه؟

4 هریه‌ک له‌م لاسه‌نگانه به‌پپی y شیکار بکه پاشان به پروونکړنه‌وه‌ی شیکاریکه.

11 $\frac{1}{2}(6x - 2y) \geq 4$ 12 $-\frac{3}{5}x + y \geq 2$ 13 $3(3x - y) > -12$

راهیټان و شیکارکړدنې پرسیاره‌کان

هریه‌ک له‌م لاسه‌نگانه به پروونکړنه‌وه‌ی شیکاریکه.

14 $y \geq 6$ 15 $y < x + 4$ 16 $y > -\frac{2}{5}x - 3$

هریه‌ک له‌م لاسه‌نگانه به به‌کاره‌یټانی دوو یه‌کترپړنه‌کان ناسووی و ستوونی شیکاریکه.

17 $4x + 2y \geq 8$ 18 $3x - 6y < 12$

راهیټانی نازاد

سهری	بۆ شیکاری
راهیټانه‌کان	نموونه بکه
1	16-14
2	18-17
3	21-19
4	24-22

19 بازار تېچوونى پىكلام لە پوژنامەيەكى ناوخۆ لە پوژىكدا 20 000 دىنارە، و تېچوونى لە ئىستەگەيەكى ناوخۆ لە ھەر خولەكەكدا 50 000 دىنارە، بوجەى تەرخانكراو بۇ پىكلام، لە يەككە لە دامەزراوەكاندا يەك مليون دىنارە. ھىماى نەزانراوى x بۇ ژمارەى پوژانى پىكلام لە پوژنامەكەدا و ھىماى نەزانراوى y بۇ ژمارەى خولەكانى پىكلام لە ئىستەگەكەدا دابنى. لاسەنگەيەكى ھىلى بۇ نواندى پىسپارەكە بنووسە، پاشان لاسەنگەكە بەروونكردنەويى شىكارىكە.

20 گەردوون ئەو پۇككەتى شاخى ھەستىار بۇ مەريخ ھەلدەگرېت پېويستى بە ئوكسىجىنە بۇ ئەوى لە ھىزى كېشكردن دەردەچېت، واى دابنى ئەو شاخە ھەستىارە 0.78L لە ئوكسىجىن بۇ ھەر كىلوگرامىك لە ئا، و 0.32L لە ئوكسىجىن بۇ ھەر كىلوگرامىك لە دووم ئوكسىدى كاربۇن بەرھەمدىنيت، بەلايەنيكەمەو شاخە ھەستىارەكە پېويستى بە 56L ئوكسىجىنە. ھىماى نەزانراوى x بۇ ژمارەى كىلوگرامە ئاوەكان و نەزانراوى y بۇ ژمارەى كىلوگرامەكانى دووم ئوكسىدى كاربۇن كە لەبەردەستايە دابنى.

أ لاسەنگەيەكى ھىلى بنووسە پىسپارەكە بنوینيت، و لاسەنگەكە بەروونكردنەويى شىكارىكە.

ب شاخە ھەستىارەكە 36kg لە ئا و 88kg دووم ئوكسىدى كاربۇنى كۆكرەو. ئايا بەم كارە گەشتە كە دەكرېت؟



21 مۇبايل مەريوان دوو جۆر لە كارتى تەلەفون، كارتى 8000 دىنارى و كارتى 12 000 دىنارى دەفروشت. ئەو كارتانەى لايتى بەھاكەى 200 000 دىنارە. ھىماى x بۇ ژمارەى كارتەكانى جۆرى يەكەم و ھىماى y بۇ ژمارەى كارتەكانى جۆرى دووم دابنى. لاسەنگەيەكى ھىلى بنووسە پىسپارەكە بنوینيت، پاشان لاسەنگەكە بەروونكردنەويى شىكارىكە.

ب مەريوان 10 كارتى لە جۆرى 8000 دىنارى فروشت، چەند كارت لەجۆرى دووم دەتوانيت بفروشت.

x بە پىي y ھەژمارىكە، پاشان لاسەنگەكە بەروونكردنەويى شىكارىكە.

$$-4y < 4(3x - 5) \quad 22 \quad -3(-10x + 2y) \geq 24 \quad 23 \quad -\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y \leq -1 \quad 24$$

ھەر يەك لەم لاسەنگەكە بەروونكردنەويى شىكارىكە.

$$6x + 3y < 0 \quad 27 \quad y - 5 \geq 4(x - 2) \quad 26 \quad -4y > 10x - 20 \quad 25$$

$$x \leq 4 \quad 30 \quad \frac{9-3y}{2} \geq 6x \quad 29 \quad y + \frac{3}{4} \leq \frac{5}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad 28$$

$$x > -2 \quad 33 \quad 2x - 5y \leq -4x + 15 \quad 32 \quad 4x - 5y < 7x - 3y \quad 31$$

34 خويندنگاكان يانەى بىركارى لە ئامادەيى كوردستان ئاھەنگىكى گۆرانى سازكر بۇ كۆكردنەويى كەمترنەبىت لە برى 600 000 دىنار، بۇ ئەوى كۆمپيوترىكى بۇ يانەكە پى بكرېت. سەرۆكى يانەكە برىارىدا، نرخى بلىتى چوونە ژورەو 5000 دىنار بىت ئەگەر پوژىك پېش ئاھەنگەكە كراپىت و 6000 دىنار بىت ئەگەر لەبەر دەرگا كراپىت.

أ ھىماى x بۇ ژمارەى بلىتە فروشاراوەكانى پوژى پېش ئاھەنگەكە، y بۇ ژمارەى بلىتە فروشاراوەكانى بەردەرگا دابنى. لاسەنگەيەكى ھىلى بنووسە پىسپارەكە بنوینيت. پاشان ئەو لاسەنگەكە بەروونكردنەويى شىكارىكە.

ب ئەگەر ژمارەى بلىتە فروشاراوەكانى پېش ئاھەنگەكە 30 بلىت بىت، چەند بلىت پېويستە لە بەردەرگا بفروشرېت تا يانەكە ئامانجەكەى بىتەدى؟

35 پیتاک (کۆکردنەوێ پارە) خوێندکارانی پۆلی یازدەهەم لەکاتی یاری تۆپی سبەتدا کۆلیڤە پیتزا و ساردی دەفرۆشن بۆ ئەوێ برێک پارە کۆیکەنەوێ لە 150 000 دینار کەمتر نەبێت، ئەویش بۆ کڕینی دیاریەکی جوان تابە بۆنە کۆتایی سالتوێ پێشەکشێ مامۆستای بیرکاریان بکەن. لە فرۆشتنی هەر کۆلیڤەیکە پیتزا 1250 دینار و لە هەر قووتوێیکە ساردی 500 دیناریان قازانج کرد.

ا هێمای x بۆ ژمارە کۆلیڤە و پیتزاکان و y بۆ ژمارە قووتوێ ساردیەکان دابنێ. لاسەنگەیکە هێلی بنووسە پرسیارە بنبوینێت.

ب خوێندکارەکان 75 کۆلیڤە پیتزا و 150 قووتو ساردیان فرۆشت. ئایا دەتوانن دیاریەکە بکڕن؟

36 بیرکردنەوێ رەخنەگرانە بلیتی چوونە ژووری باخچە ئاژەلان بۆ گەورە بە 5000 دینار و بۆ منداڵان بە 2000 دینار، نرخ بلیتە فرۆشراوەکان لە یەکیکە لە پۆژەکانی هەفتەدا لە 300 000 دینار پتر بوو، بۆ نواندنی پرسیارەکە و شیکارکردنی بە پوونکردنەوێ، هەریەکە لە دڵشاد و کاوێ لاسەنگەیکە هێلیان نووسی، دڵشاد هێمای x ی بۆ ژمارە بلیتەکانی گەورەکان دانا، کەچی کاوێ هێمای x ی بۆ ژمارە بلیتەکانی منداڵان دانا. ئایا دوو وێنە پوونکردنەوێیکە دوو خوێندکارە دروستیان کردوون لە چیدا جیاوازن؟ ئایا یەکیکیان هەڵە کردووە؟ ئەگەر وەلامەکەت بەلێ یە، کامەیانە؟

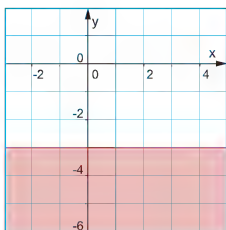
37 پاپۆرێک 500 میلی دەریای لە بەندەرێکەوێ دوورە. پاپۆرەکە بە خێرای یەک لە 27 گری (یان میلیکی دەریای لە کاتژمێرێکدا، میلیکی دەریای 1852 مەتر) کەمترنەبێت کەوتەپێ.

ا پاپۆرەکە چەند کاتی پێویستە تا دەگاتە بەندەرەکە؟

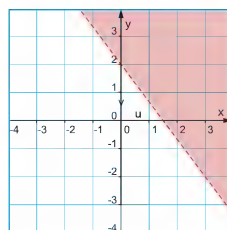
ب وێنەیکە پوونکردنەوێ بکێشە کە تیایدا گۆڕانی دووری نۆوان پاپۆر و بەندەرەکە بە تێپەربوونی کات پوونکرا بێت. ئەو خالانەیی دەکەوێت سەر هێلی سنوور چی دەنویست؟

ج **چی دەبێت ئەگەر ...** وای دابنێ خێرای پاپۆرەکە لە ماوێ گەشتەکەدا لە 10 گری کەمتر نەبێت. دووری پاپۆرەکە لە بەندەرەکەوێ دوای تێپەربوونی 12 کاتژمێر لە دەرچوونی چەندە؟

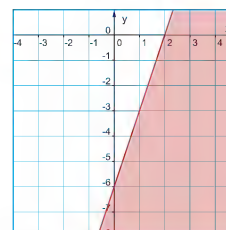
لاسەنگەیکە هێلی دوونەزانراو بنووسە. بەمەرجێک وێنە پوونکردنەوێیکە شیکارەکە بنبوینێت.



40



39



38

41 بیرکردنەوێ رەخنەگرانە بەراوردی لەنۆوان شیکاری پوونکردنەوێ بۆ لاسەنگە $30y < 90 + x$ و شیکاری پوونکردنەوێ بۆ لاسەنگە $30y + x < 90$ بکە لەچیدا هاوشیوێ و لەچیدا جیاوازن؟

42 مالداری دلسۆز بادەم و مپۆژ بۆ دروستکردنی تیکەلەیکە پڕ لە پێشال بەکار دینێت، هەر گرامیک لە بادەم $0.115g$ پێشالی و هەر گرامیک لە مپۆژ $0.095g$ ی تێدایە. دلسۆز دەیهوێت تیکەلەیکە $5g$ ی لە پێشال بەلایەنی کەمەوێ دروستبکات.



ا هێمای x بۆ ژمارە گرامەکانی بادەم، و y بۆ ژمارە گرامەکانی مپۆژ دابنێ. لاسەنگەیکە هێلی بۆ نواندنی پرسیارەکە بنووسە، پاشان لاسەنگەکە بە پوونکردنەوێ شیکارەکە.

ب) ئەگەر دۇسۇن 15 گرام بەكار بېنىت پۈستە چەند گرام لە مېۋى بەكار بېنىت بۇ ئەۋەدى

ئامانچەكەي بېتەدى؟

ج) دەبىت ئەگەر... وا دابنى دۇسۇن 60g بادامى بەكار بېنىت. لە لاسەنگەكەدا چى لەبارەدى

بەھاي y دەسەكەۋىت؟ لەم پىرسىارەدا ئەمە چى دەگەيەنىت؟

43 يانەي ھاۋكارى ئىۋارە ئاھەنگىكى سالانەي لە ھۆلى ئاھەنگەكان پىكخست، بەرازاندەۋەدى چەند

مىزىكى بازەنەيى و ئەۋانى تىران لاكىشەيى بن. لە توانادايە 8 كورسى لە دەۋرى ھەرمىزىكى

بازەنەي و 6 كورسى لە دەۋرى مىزىكى لاكىشەي دابنىت.

ھىماي x بۇ ژمارەي مىزە بازەنەيەكان و y بۇ ژمارەي مىزە لاكىشەيەكان دابنى.

ا) لاسەنگەكەي ھۆلى بۇ نواندى پىرسىارەكە بنۈسە، ئەگەر ژمارەي كورسىيە داۋا كراۋەكان لە

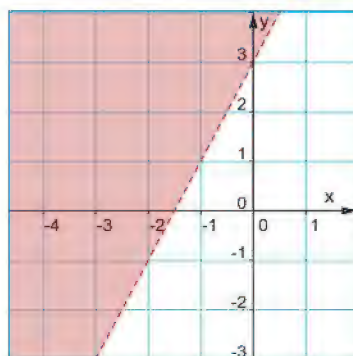
220 كورسى كەمتر نەبىت، پاشان ئەم لاسەنگەيە پوونكرەنەۋەيى شىكارىكە.

ب) بارودۇخى ھىمىنى وا دەخۋازىت كە ژمارەي كورسىيەكان لە 300 كورسى زىاتر نەبىت.

لاسەنگەكە بۇ نواندى ئەۋ مەرچە بنۈسە و لە داۋىدا بە پوونكرەنەۋەيى شىكارىكە.

ج) بەراۋرد لە نۆۋان دوو وىنە پوونكرەنەۋەكانياندا بكة. لە چىدا جىاۋازن؟

ئامادەكردن بۇ تاقىكرەنەۋە



44 كام لاسەنگە وىنەي پوونكرەنەۋەيى بەرامبەر دەنۋىنىت؟

ج) $y \geq 2x + 3$

ا) $y < 2x + 3$

د) $4x + 2y > 6$

ب) $4x - 2y < -6$

45 كام خا ناكەۋىتە ناۋچەي شىكارى لاسەنگەي $5x - 3y < 30$

ج) $(-5, 3)$

ا) $(0, 0)$

د) $(-3, 5)$

ب) $(3, -5)$

46 كام لاسەنگە ھاۋتاي لاسەنگە $7x - 3y \geq 4$ دەبىت؟ (واتا ھەمان ناۋچە شىكارىان ھەبىت).

ج) $y \geq -\frac{7}{3}x - \frac{4}{3}$

ا) $y \leq \frac{7}{3}x - \frac{4}{3}$

د) $y \geq \frac{7}{3}x + \frac{4}{3}$

ب) $y \leq -\frac{7}{3}x + \frac{4}{3}$

47 كام دوو خال خالى يەكترىپىنى ئاسۋىي و ستوۋنى ھۆلى سنوۋرى لاسەنگە $y \leq 3x - 9$ دەنۋىنىت؟

ج) $(-3, 0)$ و $(0, 9)$

ا) $(3, 0)$ و $(0, 9)$

د) $(3, 0)$ و $(0, -9)$

ب) $(-9, 0)$ و $(0, 3)$

48 بۇ ۋەستاندى ئۆتۈمبىل لە شوپنى تايبەت بۇ ماۋەي 8 خولەك پۈيۈستى بە 250 دىنارى و بۇ

ماۋەي 20 خولەك. پۈيۈستى بە 500 دىنارى ھەيە. زۆرتىن ماۋە بۇ ۋەستاندى ئۆتۈمبىل 3

كاترۋىرە. شۋان ئۆتۈمبىلەكەي ۋە ستاندۋە سەيرى كرد ژمىركارى و يىستگەكە 37 خولەك بە خۇرايىە.

دەبى چەند جۆر لە دوو پارچە پارەكە بەكار بېنىت بۇ ۋەستاندى ئۆتۈمبىلەكە بۇ ماۋەي 3 كاترۋىر؟

ا) 3 پارچەي 250 دىنارى و 9 پارچەي 500 دىنارى.

ب) 13 پارچەي 250 دىنارى و دوو پارچەي 500 دىنارى.

ج) 8 پارچەي 250 دىنارى و 4 پارچەي 500 دىنارى.

د) 5 پارچەي 250 دىنارى و 5 پارچەي 500 دىنارى.

49 كورنە ۋەلام بارىك باسبەكە لاسەنگە ھۆلىەكانى تىداپىت، و تىايدا بەھا سالبەكان

بۇ نەزانراۋى x يان نەزانراۋى y ماناي ھەبىت.

بەرەنگارى و فراوانکردن

بەرەنگارى و فراوانکردن ههريهك له لاسهنگانه شيكارىكه.

$$\frac{4+3y-2x}{6} \geq \frac{3x-2-3y}{-4} \quad 51$$

$$4(4x-3y) < 5(2+3x)-10y \quad 50$$

52 **چى دهبيت ئهگهر ...** وايداينى لاسهنگيهكى هيليت به بهكارهينانى بژمىرى
پوونکردنهوهى شيكارکردوه. شاشيهكى تهواو سيپهت دهسكهووتوه، ئه مه له باره
لاسهنگه وه چى دهنوئينت؟ چى دهكەيت بۆ پوونکردنهوهى ناوچهى شيكار؟



53 دواى دروستکردنى پوونکردنهوهى راسته هيلى $y = 500(x-1)$

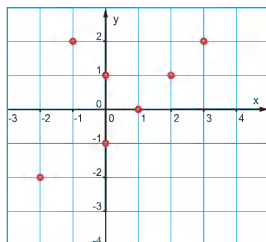
به بهكارهينانى په نچه دهى decimal وئنهى بهرامبه له
شاشيهى بژمىره پوونکردنهوهيهكه دهردكهووت.

ا ئايا راسته هيلهكه له راستيدا ئهستونه؟ پوونيكه رهوه.

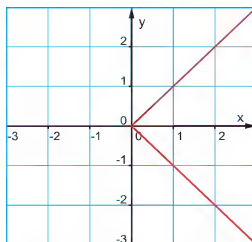
ب كام لايهى راسته هيلهكه رهنگ دهكرت بۆ ئهوهى به
پوونکردنهوهى لاسهنگهى $y \leq 500(x-1)$ شيكار بكهيت،
به لگهى وه لامه كهت ديارىكه.

پیداچوونهوهى لولپىچى

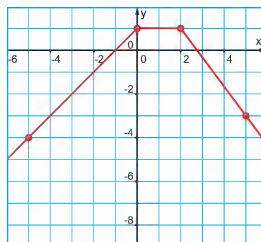
تاقىکردنهوهى راسته هيلى ستوونى بهكارينه بۆ برپاردان له سه ر ئه وهى پوونکردنهوهكه نهخشه
دهنوئينت يان نا. (پولهكانى پيشوو)



56



55



54

پوتانى وئنهى خالى $(-4, 3)$ به هه موو جيگوركىكانى خواره وه بنووسه.

57 پاكيشانى ئاسويى يه كه بۆ لاي چه پ. 58 وئنه دانه وه له دورى ته وه رهى دووهم.

59 پاكيشانى ستوونى 3 يه كه بۆ سه ره وه. 60 $(x+7, y-5)$

شيوهى لارى - يه كتر برين هاوكيشهى ئه و راسته هيله بنووسه كه به خالى $(1, -7)$ دا ده پوات و.

61 به خالى $(1, 3)$ دا ده پوات. 62 به راسته هيل $y = \frac{1}{2}x - 5$ ته ري به.

63 لاريه كهى ده كاته 0.25 64 له گه ل راسته هيل $3x - y = -4$ ئه ستوون ده بيت.

مۆدیلە ھێلیەکان

Linear models

2-2



کى ئەمە بەکار دەهێنێت؟

زاناکانی ڕەگەزە مەروپەکان نموونە ھێلی بۆ خەملاندنی درێژیەکانی تاکەکانی گەلانی دێرین بەکار دێنن، ئەویش بە ھۆی ئەو پەیکەرە ئێسکیانە دەیاندرۆزن.

ئامانجەکان

- دۆزینەوی نموونە ھێلی بۆ نواندنی پێدراوەکان بە بەکارھێنانی تەکنەلۆجیا یان بەبێ بەکارھێنانی
- سامپلە ھێلیەکان بۆ ئەنجامدانای پێشبینیەکان

زاراوەکان Vocabulary

لێژبوونەو

Regression

پەيوەستبوون

Correlation

ھێلی زۆرترین نواند

Line of best fit

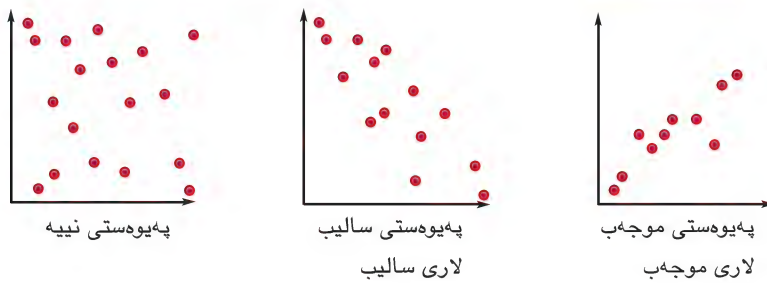
ھاوکۆلکە ھێلی پەيوەست

Correlation coefficient

بە زۆری زانایانی ڕەگەزە مەروپەکان گرنگی بەو پەيوەندیانە دەدەن کە دووجۆر پێوانە بەیەکەو دەبەستێت، ئامارکارەکان لە توێژینەو و ئامارەکانیاندا و لە پەيوەندی نیوان دوو گۆراودا، بە لێژبوونەو **Regression** ناوی دەبەن.

خاڵە پروونکردنەو پەيوەستەکان Scatter plot بۆ ھەولدان لە تیگەشتن و شێوی پەيوەندی نیوان دوو گۆراو و ئاراستەیان و مەودای ھێزیان بەکار دێنن.

پەيوەست بوون **Correlation** بریتیە لە ھیزی پەيوەندی ھێلی نیوان دوو گۆراو و ئاراستەکیان.



ئەگەر دوو گۆراو بە پەيوەندی ھێلی بەھێز پێکەو بەسترا بن، دەرئەنجامی بۆ ئەنجامدانی پێشبینیەکان راستە ھێلی باشترین نواند **Line of best fit** بەکار دێنێت.

جێبەجێکردن لەسەر زەپۆش (الاحوال الجوية)

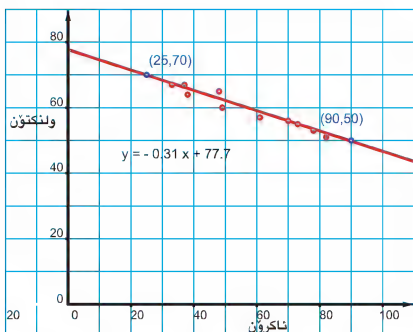
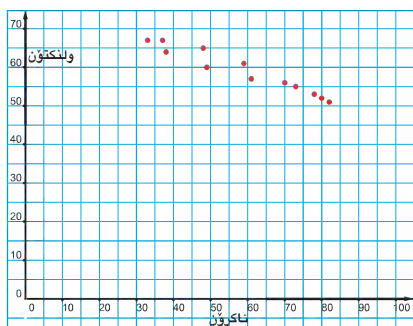
شاری ئاکرۆن لە ئەمریکا و شاری لنگتۆن لە نیوزلەندا دەکەوێتە سەر ھەمان دووری لە ھێلی یەكسان (خط الاستواء)؛ یەكەمیان لە نیووی باکووری گۆی زەوی، و دووەمیان لە نیووی باشووری. ئەم خشتەیی خوارەو ناوەندە ژمیری پلە ھەرما لە دوو شاری ناوبراودا لە ماوەی 12 مانگدا دەنوێنێت. خاڵە پروونکردنەو پەيوەستەکان بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە دا بنی، پەيوەستبوونی نیوان ئەو دوو کۆمەلە پێدراوە دیاریکەر، راستە ھێلی باشترین نواند بکێشە و ھاوکێشەکی بدۆزەو.

ناوەندە ژمیریاریەکانی بەرزترین پلەکانی گەرما (بە پلە ھەرزات)

مانگ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ئاکرۆن	33	37	48	59	70	78	82	80	73	61	49	38
لنگتۆن	67	67	65	61	56	53	51	52	55	57	60	64

روشنایی

ههولبده با ژماره‌ی ئەو
خالانە‌ی دۆکۆنە سەر
راسته‌هێڵی باشت‌ترین نواندن
یه‌کسان بێتبه ژماره‌ی ئەوانه‌ی
ده‌کۆنە ژێره‌وه.



1 هه‌نگاوی پێدراوه‌کانی خشته‌که به‌ خالە

پوونکراوه‌یه‌کان بنوێنه.

2 هه‌نگاوی به‌دوای په‌یوه‌ستی دا بگه‌ڕێ.

سه‌رنج له‌بوونی په‌یوه‌ست بوونی

سالب له‌ نۆوان دوو کۆمه‌له‌

پێدراوه‌که‌دا بده. کاتی‌ک پله‌ی

گه‌رما له‌ ئاکۆن به‌رزبێته‌وه‌ له‌

ولنکۆن نزمده‌بێته‌وه‌.

3 هه‌نگاوی راسته‌هێڵی باشت‌ترین نواندن بکێشه

راسته‌هێڵێک خالەکان به‌یه‌کسانی له‌

سه‌روه‌ و خواره‌وه‌ دابه‌شیکات.

4 هه‌نگاوی دووخال بدۆزه‌وه‌ که‌وتبێته‌ سه‌ر ئەو

راسته‌هێڵه‌، ده‌توانیت دوو خالی

(25, 70) و (90, 50) هه‌لبژێریت.

5 هه‌نگاوی لاری ئەو راسته‌هێڵه‌ بدۆزه‌وه‌

$$m = \frac{70-50}{25-90} = \frac{20}{-65} \approx -0.31$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 70 = -0.31(x - 25)$$

$$y = -0.31x + 77.7$$

هاوکێشه‌ی نمونه‌ی هێڵی بۆ په‌یوه‌ستبوونی نۆوان ئەو دوو کۆمه‌له‌ پێدراوه‌

$$y = -0.31x + 77.7$$

1. **تۆپی سه‌به‌ته** بۆ نواندن پێدراوه‌کانی خشته‌که خالە

پوونکردنه‌وه‌یه‌یه‌کان دابنێ. په‌یوه‌ستی نۆوان ئەو دوو کۆمه‌له‌ پێدراوه‌

دیاریکه‌ راسته‌هێڵی باشت‌ترین نواندن بکێشه‌ و هاوکێشه‌که‌ی بدۆزه‌وه‌.



نه‌جامة‌کانی ده‌ یاری									
30	15	27	19	23	39	20	8	35	28
19	4	15	9	10	31	12	2	13	16

هاوکۆلکه‌ی په‌یوه‌ست **Correlation coefficient** بریتیه‌ له‌ ژماره‌ r که‌ مه‌ودای ووردبینی

نواندن نمونه‌ی هێڵی کۆمه‌له‌ پێدراوه‌کان ده‌پۆیت.

سیفاته‌کانی هاوکۆلکه‌ی په‌یوه‌ست

هاوکۆلکه‌ی په‌یوه‌ست ژماره‌یه‌که‌ سه‌ر به‌ماوه‌ی $[-1, 1]$ ده‌بێت، واته‌ $-1 \leq r \leq 1$

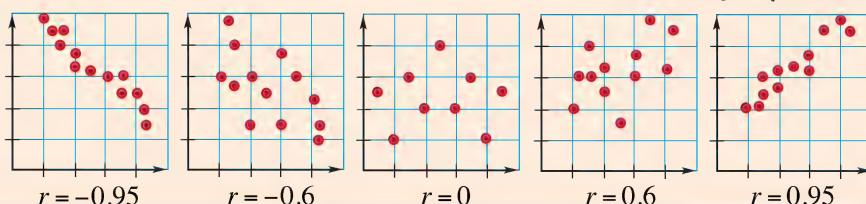
ئه‌گه‌ر $r = 1$ ، ئەوا ئەو خالە پوونکردنه‌وه‌یه‌یه‌کانی کۆمه‌له‌ی پێدراوه‌کان ده‌نویێت، راسته‌هێڵیکی

لاری موجه‌ب دروستده‌کات.

ئه‌گه‌ر $r = 0$ ، ئەوا هیچ په‌یوه‌ستێک له‌ نۆوان دوو گۆراوه‌که‌دا نییه‌.

ئه‌گه‌ر $r = -1$ ، ئەوا ئەو خالە پوونکردنه‌وه‌یه‌یه‌کانی کۆمه‌له‌ی پێدراوه‌کان ده‌نویێت، راسته‌هێڵیکی

لاری سالب دروستده‌کات.



ئاگاداریه‌!

لاری و به‌های r تیکه‌ل

مه‌که، ده‌گونجیت لاری

راسته‌هێڵ 10 یان $\frac{1}{10}$ بێت

ده‌گونجیت $r = 1$ له‌ کاتی‌که‌دا

لاری و به‌های r هه‌مان

نیشانه‌یان هه‌بێت.

CATALOG ■
DesendAuto
det(
DiagnosticOff
DiagnosticOn
dinc(
DISP
DispGraph

CATALOG

2 نمونہ

دریژنی نافره نهکته

$y \sim 2.75x + 71.97$

دریژنی ئینسکی بازو

ب

LinReg
 $y = ax + b$
 $a = 2.753883892$
 $b = 71.97383483$
 $r^2 = .9825297615$
 $r = .9912263927$

روستایی

بۆ دابه زاندنی پیډراوه کان
 بۆ بژمیروی پروونکر دنه وهی
 Stat دابگر و Edit: 1
 هه لېژیره به هایه کانی x له
 ستونی $L1$ به هایه کانی y
 له ستونی $L2$ دا دابه زینه.



$$y = 159.97$$

دریژی ئه و ئافره ته 160cm به نزیکه یی،

2. خشتەكە پېدراوى ئەو ئۆتۆمبېلانى بە غاز كاردەكەن بەھەرەمەكى ھەلبەزىراون، خشتەكە ھىزى ھەر ئۆتۆمبېلىك بە (ئەسپ) و ئەو دورىيە بەھەر لىترىك لە غاز دەيىرپىت نىشانەدات.



ھىزى ئۆتۆمبېلەكان و ئەو دورىيە بەھەر لىترىك دەيىرپىت									
125	110	180	190	120	115	165	140	255	175
4.92	5.75	3.45	2.46	4.6	5.25	2.95	4.1	2.13	3.61
ھىزى (بەئەسپ)									
دورىى بىراو بەھەر									
لىترىك (كم / ل)									

ا. خالە پرونكردنەويەيەكان بۇ نواندى پېدراوہكانى خشتەكە دابنى، بەكارىردن وەك گۇراوى نازاد بەكارىپىت.

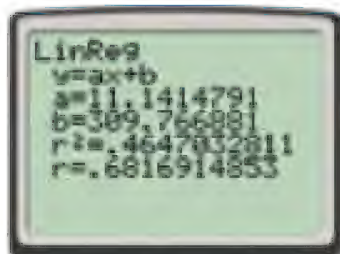
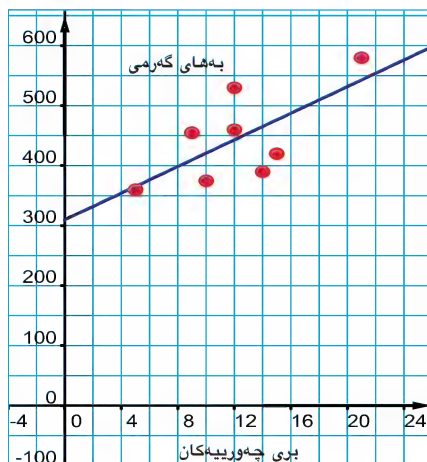
ب. ھاوگۇلكەى پەيوەستى و ھاوگىشەى راستەھىلى باشتىن نواندن بدۆزەو. ئەم راستەھىلە چى دەگەينەيت؟

ج. ئۆتۆمبېلىك ھىزى بزوينەرەكەى 210 ئەسپە، ئەو دورىيە بەھەر لىترىك دەيىرپىت ديارىبەكە.

جىيەجىكردن لەسەر خواردن

خشتەكەى خوارەو پېدراوہكان لە بى ئەو چەورىيەى يەككە لە جۆرەكانى بابۇلە تىيىدايە و بەھاگەرمىيەكەى نىشان دەدات.

پېدراوہ خۇراكيەكان بۇ ھەندىك لە جۆرەكانى بابۇلە									
14	21	10	12	15	12	9	5	بىرى چەورىيەكان (g)	
390	580	375	530	420	460	455	360	بەھاي گەرمى (بە گەرمۇكە)	



ا. ھىلە پرونكردنەويەيەكان بۇ نواندى پېدراوہكانى نەخشەكە دابنى. بىرى چەورىيەكە وەك گۇراوى سەرەخۇ بەكارىپىنە.

ب. ھاوگۇلكەى پەيوەست و ھاوگىشەى باشتىن نواندن بدۆزەو. وىتەى ئەو راستەھىلە بكىشە. ھاوگۇلكەى پەيوەست برىتپىيە لە

$r = 0.682$ بە نىزىكەى ھاوگىشەى راستەھىلى باشتىن نواندن برىتپىيە لە $y = 11.1x + 309.8$ گۇراوى پەيوەستى (متغير تابع) ژمارەى گەرمۇكە.

ج. بىرى چەورىيەكان لەو بابۇلەيەكە كە بىرە گەرمىەكەى 500 گەرمۇكەيە بخەملىنە ووردىنى

خەملىنەنەكەت چەندە؟ $500 = 11.1x + 309.8$
 $190.2 = 11.1x \Rightarrow x \approx 17.1$

سوود لە راستەھىلى باشتىن نواندن وەردەگىپت بەوہى بىرى چەورىيەكان لەو بابۇلەيەكە بىرەگەرمىيەكەى 500 گەرمۇكەيە برىتپىيە لە $g = 17.1$ بەنەزىكەى. خالە پرونكردنەويەيەكان و بەھاي ھاوگۇلكەى پەيوەستى وای دەرەخەن كە بىرى چەورىيەكان لە ژمارەى گەرمۇكە لەم جۆرە بابۇلانەدا نىشانەدەرىكى باشى نىيە.

نمونە 3

پۇشنايى

ھەندى جار بە راستەھىلى باشتىن نواندن دىگوترى ھىلى پولىكردن.

3. چى دەيىت ئەگەر...؟ ھاوگىشەى راستەھىلى باشتىن نواندن بۇ خەملىنە بىرى چەورىيەكان لە بابۇلەيەكە بىرە گەرمىيەكەى 420 گەرمۇكە بىت بەكارىپىنە، ئەو بەھايەى لە وەلامەكەتدا دەستكەوتووە چەند لە و بەھايەى كە بەرامبەر 420 گەرمۇكە لە خشتەكەدايە دورە؟



بیربکه‌وه و تاوتویبکه

1. پرونیبکه‌وه که‌ی هاوکۆلکه‌ی په‌یوه‌ست (معامل الارتباط) له نیوان دوو گۆراودا موجهب یان سالب ده‌بیت ئەگەر بزانیته هاوکۆشه‌ی راسته‌هێلێ باشترین نواندن بریتییه له $y = 3.2x - 12.5$.
2. ئەمه‌ی خواره‌وه پرونیبکه‌وه: کام له‌م دوو هاوکۆلکه‌ په‌یوه‌سته $r = 0.65$: $r = -0.75$ به‌هێزترین په‌یوه‌ستی له نیوان دوو گۆراودا ده‌گه‌یه‌نیت؟ به‌لگه‌ بۆ وه‌لامه‌که‌ت بێنه‌وه.
3. پێکخه‌ربه ئەم خشته‌یه‌ی خواره‌وه بنوسه‌وه و ته‌واوی بکه. خاله‌ پرونکردنه‌وه‌یه‌یه‌کان بۆ هه‌ر جوړه‌ په‌یوه‌ستێک دابنێ و به‌های هاوکۆلکه‌ی په‌یوه‌ستی r بخه‌ملێنه.



په‌یوه‌ست بوون	خاله‌ پرونکردنه‌وه‌یه‌یه‌کان	به‌های پێشبێنکراوی هاوکۆلکه‌ی په‌یوه‌ستبوون
به‌هێزی موجهب		
لاوازی موجهب		
بوونی نییه		
لاوازی سالب		
به‌هێزی سالب		

2-2 راهینانه‌کان

راهینانی ئاراسته‌کراو

1. زاراوه‌کان هه‌ریه‌ک له هاوکۆلکه‌ی په‌یوه‌ست له نیوان دوو کۆمه‌له‌ی پێدراودا چ ده‌گه‌یه‌نیت پرونیبکه‌وه.

ا $r = 0.4$ ب $r = -0.96$ ج $r = -0.02$

2. ئۆتۆمبێله‌کان خاله‌ پرونکردنه‌وه‌یه‌یه‌کان بۆ پێدراوه‌کانی خشته‌که‌ دابنێ، ژماره‌ی گالۆنه‌کان وه‌ک گۆراوی سه‌ربه‌خۆ به‌کاربینه. به‌دوای په‌یوه‌ستی بگه‌ڕێ. وێنه‌ی راسته‌هێلێ باشترین نواندن بکۆشه‌ و هاوکۆشه‌که‌ی بدۆزه‌وه.

دووری بپاو							
10.1	8.7	12.3	10.1	10.6	9.8	11.2	ژماره‌ی گالۆنه‌کان
305	263	368	324	332	296	338	دووری بپاو (km)

3. مالداری ئەم خشته‌یه‌ی خواره‌وه پێدراوه‌کان له ناوه‌نده‌ ژمێره‌ی پله‌ی گه‌رما له ماوه‌ی چه‌وت مانگدا و پسوله‌ی نرخێ فێنک کردنه‌وه له مالدی ئالان دا نیشان ده‌دات.

فێنکه‌ره‌وه له مالدی ئالان							
38	49	42	36	44	42	38	ناوه‌نده‌ ژمێری پله‌ی گه‌رما
86 000	67 000	74 000	83 000	75 000	79 000	93 000	پسوله‌ی نرخ

ا خاله‌ پرونکردنه‌وه‌یه‌یه‌کان بۆ نواندنی پێدراوی خشته‌که‌ دابنێ، ناوه‌ندی ژمێره‌ی پله‌ی گه‌رما به‌گۆراوی ئازاد دابنێ

ب هاوکۆلکه‌ی په‌یوه‌ست و هاوکۆشه‌ی راسته‌هێلێ باشترین نواندن بدۆزه‌وه، وێنه‌ی ئەو راسته‌هێله‌ بکۆشه.

ج پسوله‌ی نرخێ فێنکه‌ره‌وه بۆ ئەو مانگه‌ی ناوه‌نده‌ ژمێره‌ی پله‌ی گه‌رما تیايدا 40 پله‌یه

بخه‌ملێنه. ووردبینی ئەو خه‌ملاندنه‌ چه‌نده‌؟

4 **خویندنگاگان** خشتهكه پیدراوهكان له ژماره‌ی مامۆستایه‌كان و ژماره‌ی خویندكاره‌كان له نمونه‌ی هه‌رمه‌كه‌ی خویندگاگان نیشانده‌دات.

ژماره‌ی مامۆستایه‌كان و ژماره‌ی خویندكاران								
84	76	62	110	49	114	52	92	ژماره‌ی مامۆستاكان
910	496	813	1312	381	753	653	1050	ژماره‌ی خویندكاران

ا خاله‌ پوونكرده‌وه‌یه‌یه‌كانی خشته‌كه‌ دابنێ، ژماره‌ی مامۆستاكان وه‌ك گۆراوی ئازاد به‌كاربه‌ێنه‌.

ب هاوكۆلكه‌ی په‌یوه‌ستی و هاوكێشه‌ی راسته‌هێڵی باشت‌ترین نواندن بدۆزه‌وه‌، وێنه‌ی ئه‌و راسته‌هێڵه‌ بكێشه‌.

ج ژماره‌ی مامۆستایه‌كان له‌ خویندنگایه‌كه‌دا به‌ 600 خویندكارێ تێدا‌بێت خه‌ملێندرا. ووردبێنی ئه‌و خه‌ملاندنه‌ چه‌نده‌؟

راهینانی و شیکارکردنی پرسیاره‌كان

5 **کیمیا** خاله‌ پوونكرده‌وه‌یه‌یه‌كان بۆ نواندنی پیدراوه‌كان خشته‌كه‌ی خواره‌وه‌ به‌كاربه‌ێنه‌. گهریله‌ ژماره‌ وه‌ك گۆراوی ئازاد به‌كاربه‌ێنه‌.

هه‌ندیک توخمی کیمیایی														
35	5	107	83	4	97	56	85	33	18	51	95	13	89	گهردیله ژماره
80	11	264	209	9	247	137	210	75	40	122	243	27	227	بارستایی گهردیله

راهینانی ئازاد	
بۆ شیکاری	سه‌یری
راهینانه‌كان	نمونه‌ بکه‌
1	5
2	6
3	7

6 **زینده‌زانی** تیکرایی لیکدانی باله‌کانی بالنده‌ی له‌رزه‌ (الطنان) له‌ چاو تیکرایی لیکدانی باله‌کانی بالنده‌ی تردا زیاتره‌. خشته‌كه‌ی خواره‌وه‌ پیدراوه‌كان له‌و تیکراییانه‌ و بارستایی له‌ ژماره‌یه‌ك بالنده‌ له‌م جووره‌دا نیشانده‌دات.



لیكدانی بالی بالنده‌ الطنان							
4.5	1.9	3.7	4.0	3.2	2.0	3.1	بارستهی (g)
40	90	55	45	50	85	60	تیکرایی لیکدانه‌كان (به‌چرکه‌)

ا خاله‌ پوونكرده‌وه‌یه‌یه‌كان بۆ نواندنی پیدراوه‌كان نه‌خشه‌كه‌ دابنێ. بارستایی وه‌ك گۆراوی ئازاد به‌كاربه‌ێنه‌.

ب هاوكۆلكه‌ی په‌یوه‌ستی و هاوكێشه‌ی راسته‌هێڵی باشت‌ترین نواندن بدۆزه‌وه‌، ئه‌و راسته‌هێڵه‌ بكێشه‌.

ج تیکرایی لیکدانه‌کانی بالی بالنده‌یه‌ك له‌م جووره‌كه‌ بارستاییه‌كه‌ی 19 g بێت بخه‌ملێنه‌. ووردبێنی خه‌ملاندنه‌كه‌ت چه‌نده‌؟

7 **نرخاندنی بلیته‌كان** به‌رپۆه‌به‌ری یه‌كێك له‌ تیمه‌ میوزیکیه‌یه‌كان نرخ‌ی بلیته‌کانی چوونه‌ ژووره‌وه‌ی بۆ ئاهه‌نگه‌كه‌و ژماره‌ی ئاماده‌بوونی تۆمارکرد.

ئاماده‌بوون به‌ پێی نرخه‌کانی بلیته‌کانی چوونه‌ ژووره‌وه‌									
8000	7500	7000	5500	10000	8000	8500	5000	6000	نرخ
235	210	258	267	160	194	155	256	213	ئاماده‌بوون

ا خاله‌ پوونكرده‌وه‌یه‌یه‌كان بۆ نواندنی پیدراوه‌كانی خشته‌كه‌ دابنێ، نرخ وه‌ك گۆراوی ئازاد به‌كاربه‌ێنه‌.

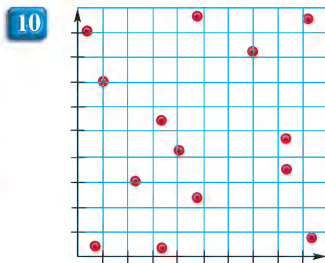
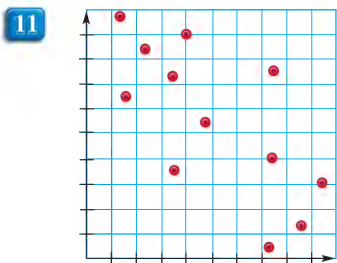
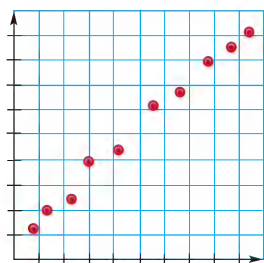
ب هاوكۆلكه‌ی په‌یوه‌ستی و هاوكێشه‌ی راسته‌هێڵی باشت‌ترین نواندن بدۆزه‌وه‌ وێنه‌ی ئه‌و راسته‌هێڵه‌ بكێشه‌.

ج ژماره‌ی ئاماده‌بوونی ئاهه‌نگێك نرخ‌ی بلیتی چوونه‌ ژووره‌وه‌كه‌ی 9000 دینار بێت بخه‌ملێنه‌. ووردبێنی خه‌ملاندنه‌كه‌ چه‌نده‌؟

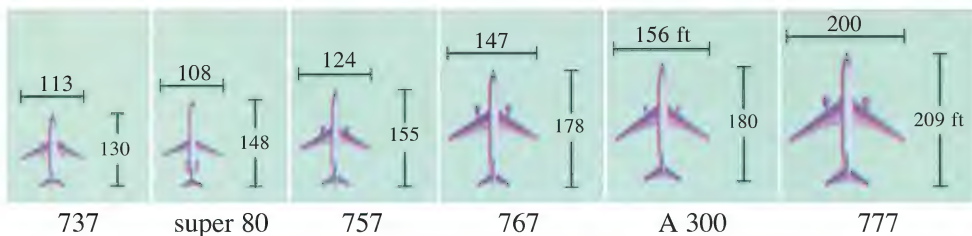
x	2	8	15	21	24	30	33	37
y	71	63	64	194	160	267	258	210

8 خالە پروونکردنە وەھییەکانی پیدراوەکانی خشتەکە دابنێ ھاوکیڤشەى راستەھێلێ باشترین نواندن بخەمڵێنە.

خەمڵاندن ھاوکیڤلکەى پەییوەستى لە ھەربارێکدا بخەمڵێنە.



12 فرین خشتەکەى خوارەوہ درێژى ژمارەىەک لە فرۆکە وپانى بەلەکانیان نیشانەدات. خالە پروونکردنە وەھییەکان بۆ نواندن پیدراوەکانی خشتەکە دابنێ، درێژى وەک گۆراوى ئازاد بەکاربێنە وینەى راستەھێلێ باشترین نواندن بکێشە و ھاوکیڤشەکەى بدۆزەوہ.



نمرەکانى یەکەمەکان لە بیرکاری			
نمرە	بنکە	نمرە	بنکە
90	6	95	1
89	7	93	2
87	8	92	3
86	9	91	4
85	10	90	5

13 خشتەى بەرامبەر نمرەى دەیەکەمەکان لە تاقیکردنەوہى بیرکاری نیشانەدات.

أ کام ھاوکیڤشە بۆ دۆزینەوہى نمرە بەزانینی بنکە بەکار دێت.

ب وای دابنێ مامۆستای بیرکاری بۆ ھەر نمرەىەک 5 نمرەى زیادکرد؟ کاریگەرى ئەمە لەسەر ھاوکیڤشەکەو پروونکردنە وەھییەکانى چییە؟

14 وەرزش خشتەى خوارەوہ پیدراوەکان لەسەر خێرایى ژمارەىەک لە پیشبڕکى کەرانی پاکردن و ژمارەى ھەنگاوەکانیان لە چرکە یەکدا نیشانەدات.

ژمارەى ھەنگاوەکان لە چرکە یەکدا و خێرایى							
22.11	21.06	19.97	18.62	17.5	16.88	15.86	خێرایى (پى / چر)
3.55	3.46	3.36	3.25	3.17	3.12	3.05	ژمارەى ھەنگاوەکان لە چرکە یەکدا

أ خالە پروونکردنە وەھییەکان دیاریبکە بۆ نواندن پیدراوەکانى خشتەکە بەبەکارھێنانى خێرایى وەک گۆراوى ئازاد، باشترین نواندن بدۆزەوہ و پاشان وینەکەى بکێشە [ب] ھاوکیڤلکەى پەییوەستى و ھاوکیڤشە و وینەى راستەھێلێ باشترین نواندن بکێشە. [ج] ھاوکیڤشەى راستەھێلێ باشترین نواندن بەکاربێنە بۆ دۆزینەوہى ژمارەى ھەنگاوەکان لە چرکە یەکدا بۆ پاکەرێک خێرایىەکەى 18 پێیە لە چرکە یەکدا ووردبێنى ئەو خەمڵاندنە چەندە؟ پروونیکەوہ.



15 بەردىن زانى گياندارو (زانستىكە لە شىۋەكانى ژيان دەكۆلئىتەوۋە
 ۋەك بوون بە بەرد گياندارو پۈۋەكەكان) خىشتەكەى خواروۋە درىژى
 ئىسكى پان و درىژى ئىسكى بازوۋى تىدايە كە لە پىنچ نموونەيەى
 بەبەردبوون لە ئەركىو پىترىكس، كە گيانلەبەرىكە و لەناوچوۋە،
 پوالەتى خشۆك و تايبەتمەندىيەكانى ئەۋى ھەيە زاناكان واى بۇ دەچن
 لە ئالقەكانى يەكەم بىت و بالندەى لىپەيداۋوۋە.

درىژىيەكانى ئىسكى پان ئىسكى بازوۋ					
74	64	59	56	38	درىژى ئىسكى پان (cm)
84	72	70	63	41	درىژى ئىسكى بازوۋ (cm)

ا خالە پۈۋەكەندەۋەيەكان بۇ نواندى پىدراۋەكانى خىشتەكە دابنى
 درىژى ئىسكى پان ۋەك گۆپاۋى ئازاد بەكاربىنە. ھاۋكۆلگەى پەيۋەستبوون و ھاۋكۆشەى
 راستەھىللى باشتىن نواندىن بدۆزۋە و وىنە بۇ راستەھىلگە بىكىشە.

ب لارى ئەۋ راستەھىلگە تايبەتە بە گياندارەكە چى دىگەيەنئىت؟

ج ئەۋ ھاۋكۆشەيەى دۆزىتەۋە بۇ خەملاندى درىژى ئىسكى پان بۇ خەملاندى درىژى ئىسكى پانى
 گياندارى ئەۋ جۆرە بەكارى بىنە كە درىژى ئىسكى بازوۋەكەى 50cm بىت. ووردىبىنى
 خەملاندە چەندە؟

16 بىر كەردنەۋەى رەخەنگرانە دوو گۆپاۋ بەھاكانى يەككىيان بەھاكانى ئەۋەى تىران دىارى
 دىكات، ئايا ماناى وايە كە پەيۋەستىيەكى بە ھىز لە نىۋان ئەۋ دوو گۆپاۋە دا ھەيە؟ (بۇ نموۋە:
 ئايا زىاد بوۋنى پىۋەدانى ھەنگ دەبىتە ھۆى زىدە فرۆشى بەستەنىيەكان)؟ پۈۋىيەكەۋە.

17 بنوۋسە كىردارى دۆزىنەۋەى راستەھىللى باشتىن نواندىن بە درىژى باسبەكە؟

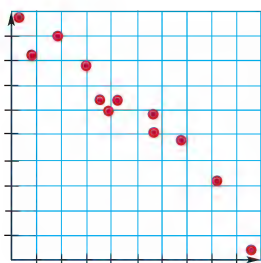
ئامادە كەردن بۇ تاقىكەردنەۋە

18 ھاۋكۆشەى راستەھىللى باشتىن نواندىن بۇ كۆمەلەى پىدراۋەكان برىتبيە لە $y = 1.05x - 1.3$ ، كام لە
 مانەى خواروۋە دەبىتە ھاۋكۆلگەى پەيۋەست r ؟

ا $r = -1.3$ **ب** $r = -0.7$ **ج** $r = 0.8$ **د** $r = 1.05$

19 كام لەمانەى خواروۋە ئەۋ پەيۋەستبوۋنەى خالە پۈۋەكەندەۋەيە
 بەرامبەرەكان نىشان دەدەن باسەكەت.

ا بەھىزى مۇجەب **ج** بەھىزى سالب
ب لاۋازى مۇجەب **د** لاۋازى سالب



20 كام لەم پەيۋەندىيانەى خواروۋە ھاۋكۆلگەى پەيۋەستى لاۋازى
 تايبەت بە ئۆتۆمبىللى ھەيە؟

ا تەمەنى ئۆتۆمبىل و ژمارەى ئەۋ كىلۆمەترانەى برىۋەيەتى.

ب تەمەنى ئۆتۆمبىل و نرخەكانى لەكاتى فرۆشتىنى وا كە بەكارھاتىت.

ج درىژى ئۆتۆمبىل و پانىيەكەى.

د ژمارەى ئەۋ كىلۆمەترانەى لە ناو شارو ژمارەى ئەۋ كىلۆمەترانەى لە سەر پىگاي خىرا برىۋەيەتى.

بهره‌نگاری و فراوانکردن

له خشته‌ی پێدراوه‌کاندا، ئایا پێدراوه‌کان په‌یوه‌ندییه‌که‌یان هه‌ڵیه؟ ئایا پێدراوه‌کان پیکه‌وه به‌ستراون؟
پرونیکه‌وه.

x	35	45	55	65	75
y	30	34	36	34	30

22

x	2	7	13	15	22
y	4	4	4	4	4

21

23 ئهم دوو خشته‌یه‌ی خواره‌وه ئه‌و پێدراوانه‌ی په‌کێک له ئامارکاره‌کان نوسیویانه نیشانداده‌ت، بۆ ههر خشته‌یه‌ک خاله‌ پرونکردنه‌وه‌یه‌یه‌کان دابنێ که ده‌ینوینێت و هاوکۆکه‌ی په‌یوه‌ست و هاوکێشه‌ی راسته‌هه‌ڵی باشتترین نواندن بدۆزه‌وه، چی گرنگی به‌ نواندن پێدراوان به‌ پرونکردنه‌وه‌ی ده‌ت پێش ئه‌وه‌ی نمونه‌ی هه‌ڵی بۆ ئه‌نجامدانی پێشبینیه‌یه‌کانی به‌کاربه‌نینێت؟

x	10	8	13	9	11	14	6	4	12	7	5
y	9.14	8.14	8.74	8.77	9.29	8.1	6.13	3.1	9.13	7.26	4.74

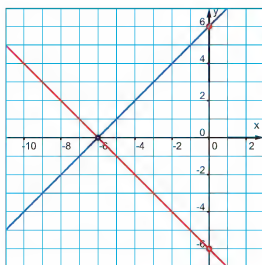
x	10	8	13	9	11	14	6	4	12	7	5
y	7.46	6.77	12.74	7.11	7.81	8.84	6.08	5.39	8.15	6.42	5.73

پێداجوونه‌وه‌ی لولپێچی

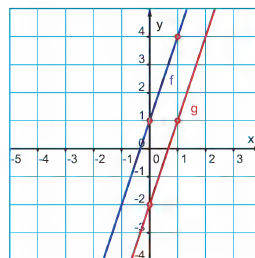
ههر بره‌یه‌ک به‌سه‌اده‌ترین شیوه‌ بنووسه (پۆله‌کانی پێشو)

$$\begin{aligned} -a^4 + 3ab + (2a^2)^2 & \quad 25 & 3(x^2 - 2) + 4xy - 10x^2y + 5x^2 & \quad 24 \\ n(4t^2 - t) - 10nt^2 + nt & \quad 27 & -3g^2 + 3(g - 4) - 2(g - g^2) & \quad 26 \end{aligned}$$

هاوکێشه‌ی ههریه‌ک له‌م نه‌خشانه‌ که به‌پرونیکردنه‌وه‌ی نوێنراون بنووسه ئه‌و جیگۆپکیانه‌ی $f(x)$ بۆ $g(x)$ ده‌گۆرن چین؟ (پۆله‌کانی پێشو)



29



28

ههریه‌که له‌م لاسه‌نگانه به‌ پرونیکردنه‌وه‌ی شیکاریکه. (پۆله‌کانی پێشو)

$$\begin{aligned} -2(q - 4) + 3q & \leq 1 + q & 29 & \quad 44 + 6x > -5x & 31 & \quad 3x < x - 12 & 30 \end{aligned}$$

سیستمه‌کانی لاسه‌نگه هیلییه‌کان

System of Linear Inequalities



کی نهمه به‌کارده‌هینیت؟

دۆزهره‌وانی جه‌مسهری باکوور سیستمه‌کانی لاسه‌نگه هیلییه‌کان بۆ دیاریکردنی ئەو خێراییهی که پێویسته پێی برۆن به‌کارده‌هینن ئەگەر نا پووبه‌پووی کهش و هه‌وایه‌کی بێزارکەر ده‌بنه‌وه (نموونه‌ی 2).

ئامانجه‌کان

شیکارکردنی سیستمه‌کانی لاسه‌نگه هیلییه‌کان به‌پوونکردنه‌وه‌یی.

زاراوه‌کان
Vocabulary

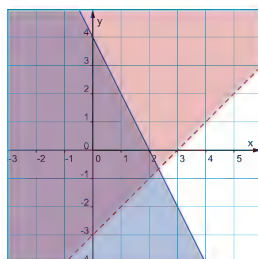
سیستمی لاسه‌نگه هیلییه‌کان
System of linear inequalities

کاتی‌ک له پرسیاریکدا ده‌برینێک وەک «گه‌ره‌تر له» یان «پترنیه‌ له» به‌کار دینیت ده‌توانیت ئەو باره به به‌کاره‌ینانی لاسه‌نگه یان سیستمی لاسه‌نگه هیلییه‌کان بنوێنیت.

سیستمی لاسه‌نگه هیلییه‌کان **System of linear inequalities** بریتیه له کۆمه‌له‌ی دوو لاسه‌نگه‌ی هیلی یان زیاتر، که هه‌مان نه‌زانراویان تێدا یه. به زۆری کۆمه‌له‌ شیکاری سیستمی لاسه‌نگه هیلییه‌کان له ژماره‌یه‌کی نا‌کۆتا خاڵ پێکدێت که ده‌توانرێت به‌پوونکردنه‌وه‌ی به‌په‌نگکردنی ناوچه‌که له پووته‌ختی پوونکردنه‌وه‌دا بنوێنرێت. کاتی‌ک هه‌ردوو لاسه‌نگه هیلییه‌که، له هه‌مان پووته‌ختی پۆتاندا دنوێنرێت، ناوچه‌ په‌نگ کراوه‌کان یه‌کتر ده‌پن و ناوچه‌یه‌کی هاوبه‌ش دروستده‌کهن، ناوچه‌ی شیکاری سیستمه‌که ئەو ناوچه هاوبه‌شه‌یه.

شیکارکردنی سیستمی لاسه‌نگه هیلییه‌کان به پوونکردنه‌وه‌ی

به‌پوونکردنه‌وه‌ی سیستمی نهم دوو لاسه‌نگه هیلییه‌ شیکاربکه.



$$\begin{cases} y \leq -2x + 4 \\ y > x - 3 \end{cases}$$

له لاسه‌نگه‌ی یه‌که‌مدا. وێنه‌ی راسته‌هێڵ $y = -2x + 4$ به هیلیکی نه‌پساو بکێشه، و ناوچه‌ی ژێری په‌نگبکه. و له لاسه‌نگه‌ی دوهمدا وێنه‌ی راسته‌هێڵ $y = x - 3$ به هیلیکی خاڵخال بکێشه، و ناوچه‌یه‌کی سه‌ره‌وه‌ی په‌نگ بکه. یه‌کتر بری دوو ناوچه‌ په‌نگ کراوه‌که ناوچه‌ی شیکاری سیستمی دوو لاسه‌نگه هیلییه‌که ده‌بێت.

ساغکردنه‌وه: خاڵێک له خاڵه‌کانی هه‌ر ناوچه‌یه‌ک له سه‌ر پووته‌ختی پۆتانه‌که تاقیبکه‌وه.

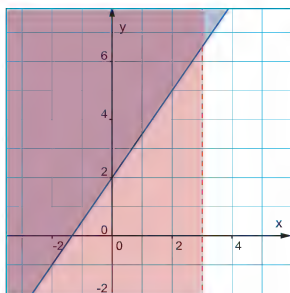
ناوچه	خاڵ	$y \leq -2x + 4$	$y > x - 4$
چه‌پ	(0,0)	$0 \leq -2(0) + 4$ $0 \leq 4$ ✓	$0 > 0 - 3$ $0 > -3$ ✓
راست	(4,0)	$0 \leq -2(4) + 4$ $0 \leq -4$ ✗	$0 > 4 - 3$ $0 > 1$ ✗
سه‌ره‌وه	(2,2)	$2 \leq -2(2) + 4$ $2 \leq 0$ ✗	$2 > 2 - 3$ $2 > -1$ ✓
خواره‌وه	(2,-2)	$-2 \leq -2(2) + 4$ $-2 \leq 0$ ✓	$-2 > 2 - 3$ $-2 > -1$ ✗

خاڵی یه‌که‌م تاکه خاڵ بوو
له نێوان ئەو خاڵانه‌دا که
بۆ پۆتانه‌کانی سیستمی دوو
لاسه‌نگه‌که یان شیکارکرد.

نموونه 1

یارمه‌تی

ئه‌گەر دلنایانیت له‌و ناوچه‌یه‌ی که ده‌بێ سێهه‌ری بکه‌ی، خاڵی (0, 0) وەک خاڵی تاقیکردنه‌وه به‌کاربه‌ینه.



بەپروونکردنەوادی سیستمی ئەم دوو لاسەنگە هێڵییە شیکاریکە.

$$\begin{cases} y \geq \frac{3}{2}x + 2 \\ x < 3 \end{cases} \quad \text{ب}$$

لە لاسەنگە یەکەمدا، وێنەی راستەهێڵ $y = \frac{3}{2}x + 2$ بە هێڵی نەپساو بکێشە و ناوچەکەی سەرەوادی ڕەنگ بکە. و لە لاسەنگە دووەمدا، وێنەی راستەهێڵ $x = 3$ بە هێڵی خاڵخال بکێشە و ئەو ناوچەی دەرکەوتە لای چەپەوادی ڕەنگ بکە. یەکتەرپری دوو ناوچە ڕەنگ

کراوەکە ناوچەی شیکاری سیستمی دوو لاسەنگە هێڵییەکە دەنۆینێت.

ساغکردنەوادی خاڵێک لە خاڵەکانی ناوچە یەکتەرپرەکە تاقیکەو،

بۆ نموونە $(-4, 0)$ تاقیکەو، بۆ ئەوادی دەرکەوتە وێنە پۆتانی

ئەو خاڵە شیکارە بۆ سیستمەکە لەبەرئەوادی خاڵەکە سەرەوادی ناوچە شیکاریە کە ناوچەی

شیکاری سیستمی دوو لاسەنگەکە یە. ئەو ناوچەی یەکتەرپری ناوچەی شیکارە.

1. بەپروونکردنەوادی هەریەک لەم سیستمی لاسەنگە هێڵییانە شیکاریکە.

$$\begin{cases} y \leq 4 \\ 2x + y < 1 \end{cases} \quad \text{ب}$$

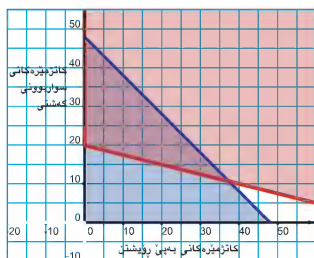
$$\begin{cases} x - 3y < 6 \\ 2x + y > 1.5 \end{cases} \quad \text{ا}$$



جێبەجێکردن لەسەر هەلمەتەکانی دۆزینەوادی

نموونە 2

هەلمەتی دۆزینەوادی جەمسەرکە لە دووری 240 km لە بنکەکە یەوادی بوو. و پێشبینی دەکرا لە ماوادی 48 کاتژمێردا با هۆزی بەفر هەلکات. دەستە ی هەلمەتەکە پێویستە لەسەریان بەخێرای سوازی پاپۆرە سەهۆل ڕەکە ببن و بجولین پاشان بەپێی ڕۆن تابگەنەوادی بنکەکەیان. ئەوادی خێرای پاپۆرەکە 12 km/h یە. بەلام ئەوادی خێرای بەپێی ڕۆشتن و ڕاکێشانی کەلوپەلەکانیان لە 3 km/h تێناپەرێت. سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان بنووسە بە پروونکردنەوادی شیکاریان بکە بۆ ئەوادی ماوادی سواربوونی پاپۆرەکە و ماوادی بەپێی ڕۆشتن پێش گەشتن بە بنکەکە دیاری بکەیت.



x بۆ ژمارە کاتژمێرەکانی بەپێی ڕۆشتن، y بۆ ژمارە کاتژمێرەکانی سواربوونی کەشتیەکە بەکاربێنە. پێویستە سەرچەمی دوو نەزانراوەکە لە 48 کاتژمێرە مەتر بێت. ئەمەش لاسەنگە $x + y \leq 48$ مان دەدات. لە لایەکی ترەوادی پێویستە ئەو دووریە هەلمەتەکە دەبێت لە 240 km کە مەترنەبێت، ئەمەش لاسەنگە دوو مان دەدات $3x + 12y \geq 240$ سیستمی دوو لاسەنگەکە بریتیە لە

$$\begin{cases} x + y \leq 48 \\ 3x + 12y \geq 240 \end{cases}$$

وێنەی راستەهێڵ $3x + 12y = 240$ بە هێڵی نەپساو بکێشە و ناوچەکەی سەرەوادی ڕەنگبە پاشان وێنەی راستەهێڵ $x + y = 48$ بە هێڵی نەپساو بکێشە و ناوچەکەی ژێرەوادی ڕەنگ بکە. ناوچەی شیکاری سیستمەکە ئەوادی ناوچەی یەکتەرپری ڕەنگراوەکان.

ساغیکەوادی: خالی $(15, 25)$ لە ناوچەی یەکتەرپری هەلێژرە.

پۆتانی ئەم خاڵە شیکاری هەردوو لاسەنگەکە و سیستمەکە دەکات.

$$\begin{array}{ll} 3x + 12y \geq 240 & x + y \leq 48 \\ 3(15) + 12(25) \geq 240 & 15 + 25 \leq 48 \\ 345 \geq 240 \quad \checkmark & 40 \leq 48 \quad \checkmark \end{array}$$





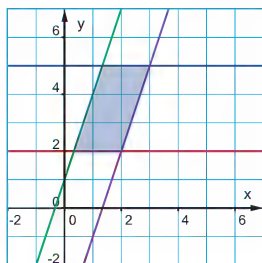
2. سۆلاف بابۆلهی گوشت و بابۆلهی مریشك دهرۆشی. 40 نانی پێیه واته ناتوانیت له 40 بابۆله زیاتر له ههردوو جۆرهكه پێكهوه بفرۆشیت. له بابۆلهیهکی گوشت 2 000 دینار قازانج دهكات، و له بابۆلهیهکی مریشك 2500 دینار قازانج دهكات، ئهوه دهیهوێت 90 000 دینار قازانج بکات. سیستمی لاسهنگه هێلییهکان بۆ نوێاندنی پرسپارعه بنوسه، پاشان به پروونکردنهوهی شیکاریهکه.

دهگونجیت سیستمی لاسهنگه هێلییهکان له دوو لاسهنگهی زیاتر تێدا بێت.

نموونه 3

جیهه جیکردنی نه اندازهی

سیستمی ئهه لاسهنگه هێلییهکان به پروونکردنهوهی شیکاریهکه و جۆری ناوچه شیکارهکه دیاریهکه



$$\begin{cases} y \leq 5 \\ y \geq 2 \\ y \leq 3x + 1 \\ y \geq 3x - 4 \end{cases}$$

به هێلی نهپساو وێنه پاسته هێل $y = 5$ و پاسته هێل $y = 3x - 4$ بکێشه، ئهوه ناوچهیهی دهکهوێته ژێر ههریهکهیان رهنگی بکه.

به هێلی نهپساو وێنه پاسته هێل $y = 2$ و پاسته هێل $y = 3x + 1$ بکێشه، و ئهوه ناوچهیهی دهکهوێته سهه ههریهکهیان رهنگی بکه. ناوچهی شیکاری سیستمهکه ناوچه یهکتر برهکهیه. ناوچهی شیکار شپۆه چوار لایه، تێبینی ئهوه بکه که دوو پاسته هێل $y = 5$ ، $y = 2$ بهیهکتری تهریبن له بهر ئهوهی دوو پاسته هێل ئاسۆیین، و دوو پاسته هێل $y = 3x + 1$ ، $y = 3x - 4$ بهیهکتری تهریبین چونکه ههمان لاریان ههیه.

ناوچهی شیکار چوار لایه تیایدا دوو لای بهرامبهر بهیهکتری تهریبن. بهمهش چوار لایه تهریبه.



3. به پروونکردنهوهی سیستمی دوو لاسهنگه هێلییهکه شیکاریهکه، و جۆری ناوچهی شیکار دیاری بکه.

$$\begin{cases} y \leq 4 \\ y \geq -1 \\ y \leq -x + 8 \\ y \leq 2x + 2 \end{cases} \quad \text{ب} \quad \begin{cases} x \leq 6 \\ y \leq \frac{1}{2}x + 1 \\ y \geq -2x + 4 \end{cases} \quad \text{ا}$$

بیریکهوه و تاوتوییکه

1. پروونیکهوه چۆن ناوچهی شیکار بۆ سیستمی دوو لاسهنگه هێلییهکان دهوێتیهوه.

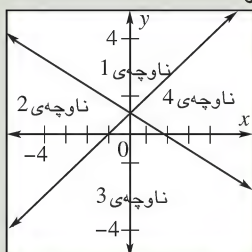
2. کهترین ژماره لاسهنگهکان دهییت چهن دێیت، تا ناوچهی شیکار

سیگۆشه؟ چوارگۆشه؟ بێت. نمونه بۆ وهلامه کهت بێنهوه.

3. پیکههر به هێلکارییهکه بنوسهوه و تهواوی بکه، بۆ ههر

ناوچهیهک سیستمی لاسهنگه هێلییهکان بنوسه که شیکارهکی،

ناوچهی شیکار له رووتهختی پۆتانهکه دا بنوێنیت.



راھىنەكانى ئاراستەكراۋ

1 زاراۋەكان بەراۋرد لە نۆۋان سىستىمى لاسەنگە ھىلىيەكان و سىستىمى ھاۋكىشە ھىلىيەكاندا بکە.

1 پروانە غورونە

بە پروونكردنەۋەى ھەريەك لەم لاسەنگە ھىلىيەكانە شىكارىكە.

$$\begin{cases} 2x+2y \leq 4 \\ 3x-y > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 7x < y-16 \\ y \leq -5x-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y > 5 \\ x-y < -3 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq 4x-4 \\ y \geq 3x-3 \end{cases}$$

2 پروانە غورونە

6 كۆكردنەۋەى پىتاك بەككە لە كۆمەلەكانى خىرخواۋى پىتاكى كۆكردەۋە بە فرۆشتنى كراسى لۆكە. نرخی كراسى گەرە 15 000 دىنار و مندا لان 10 000 دىنارە. ژمارەى كراسەكان 250 كراسە لە دوو جۆر. كۆمەلەكە پىي واپو بەلانى كەمەۋە 3 ملېون دىنارى دەستدەكەۋىت. سىستىمى لاسەنگە ھىلىيەكان بۆ نواندى بارەكە بنووسە، پاشان بە پروونكردنەۋەى شىكارى بکە بۆ ديارىكردى ژمارەى كراسەكان كە لەھەر جۆرىك پىيوستە بفرۆشړن.

3 پروانە غورونە

بە پروونكردنەۋەى ھەريەك لە سىستىمى لاسەنگە ھىلىيەكان شىكارىكە و جۆرى ناوچەى شىكارىكە ديارىكە.

$$\begin{cases} y \geq x \\ y \leq x+6 \\ x \leq 6 \\ x \geq -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -1 \\ y \leq 3x+2 \\ y \geq -3x-10 \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq 7 \\ 2x-y \leq 3 \\ x+2y \geq -6 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 9 \\ y \geq -18 \\ x \leq 13 \\ y \leq -4 \end{cases}$$

راھىنەكان و شىكارىكردى پرسىارەكان

بە پروونكردنەۋەى ھەريەك لەم لاسەنگە ھىلىيەكانە شىكارىكە.

$$\begin{cases} y > 4 \\ x+4y \geq 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y > 5 \\ -2x+y \leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y \geq 2x-3 \\ y \geq 3x+8 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x-y > 0 \\ y < x \end{cases}$$

15 مېوزىك كۆمپانىيەك دەيەۋىت 10 000 پەپكى پەستىزاۋ بۆ كۆمەلە گۆرانىيەك بەرھەم بەھىننيت. ژمارەيەك لەم پەپكانەى تەرخان كرى بۆ ئەۋەى بە خۇرايى دابەشى بكات بەسەر ئىسگەكانى رادىوۋ تەلەفزيۇن، ژمارەيەكى تر بۆ فرۆشتن، بەمەرچىك ژمارەى ئەۋ پەپكانەى دەيەخشىت لە رېژەى 20% تىپەر نەكات لە كۆى گشتى. سىستەمى لاسەنگە ھىلىيەكان بنووسە، كە ئەم بارە بنۆيننيت. لەگەل ديارىكردى ئەۋ ژمارانەى كە لە توانادايە بۆ پەپكە بەخشاۋەكان و پەپكانەى نامادەكراۋە بۆ فرۆشتن.

بە پروونكردنەۋەى ھەريەك لەم سىستەمى لاسەنگە ھىلىيەكانە شىكارىكە. جۆرى ناوچە شىكارىكە ديارىكە.

$$\begin{cases} y \leq x \\ y \leq -x+2 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq x+6 \\ y \geq x+1 \\ y \leq -x+6 \\ y \geq -x-1 \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq 2.5 \\ y \geq -0.5 \\ y \leq -x+8 \\ y \leq 2x+4 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ -\frac{1}{3}x+y \geq -4 \\ \frac{1}{3}x+y \leq -1 \end{cases}$$

20 مۆبايل ژمارەى قسەكردنە تەلەفۇنىەكانى ھەژار لە مانگى رابردودا گەيشتە 2370 قسەكردىن، 1645 لە كەسانى ترەۋە بۆى ھاتبون، لە كاتىكدا ژمارەى قسەكردنەكانى ھۆزان لە ژمارەى قسەكردنەكانى ھەژار كەمترە، بەلام ژمارەى ئەۋ قسەكردنە تەلەفۇنىانەى ھۆزان بۆى ھاتوون، لە ژمارەى ئەۋانەى ھەژار بۆى ھاتوون زياترە. سىستەمى لاسەنگە ھىلىيەكان بنووسە بارەكە بنۆيننيت، پاشان سىستەمەكە شىكارىكە بۆ ئەۋەى ژمارەى ئەۋ تەلەفۇنانەى ھەژار بۆى ھاتوون و ژمارەى ئەۋ تەلەفۇنانەى لىۋەى دەرچوون ديارىكات.

ئەندازە سىستىمى ئۇ لاسەنگە ھېلىيانە بنووسە كە شىۋەكە ناۋچە شىكارەكەيەتى

21 لاكىشە 22 چوارگۆشە 23 سىگۆشە وەستاۋ 24 نىمچە لاتەرىب

25 ئۆتۈمبېلەكانى پېشپىركى لەژىر چەند مەرجىكدان، لەبارەى قەبارە و بارستايىيەو، بەپىي بۆلۈنكردىن بىر دەپى بارستايى ئۆتۈمبېلى فورمولا بە بارستايى شۆفېرەكەو لە 600 kg كەمتر نەپىت، لە كاتىكدا ئۆتۈمبېلى تىرى پېشپىركى، دەپى بارستايىيەكە بەپى بارستايى شۆفېر لە 710 kg كەمتر نەپىت.

ا سىستەمىكى لاسەنگە ھېلىيانەكان بنووسە بۇ بەكارەپىنانى بەراوردى بارستايى دوو ئۆتۈمبېلەكە بە بى شۆفېرەكان

ب بوارو مەوداى گونجاۋ بۇ سىستەمەكە دىارىكە.

ج دوو لاسەنگەكە بەروونكردنەو شىكارىكە.

پېژەى باجى دەرامەت بە پىي بەشەكان	
داھات (بەملىۋن دىنار)	پېژەكە
لە 14 000 تا 56.800	15%
لە 56.801 تا 114.650	25%
لە 114.651 تا 174.700	28%

26 **باجى دەرامەت** خىشتەكەى بەرامبەر پېژەى باج لەسەر داھات بە پىي نىرخى داھاتى خىزانىك نىشانىدەدات. پېژەى باجى داھاتى سەرچۈن و ژنەكەى 25% داھاتى ژنەكە بەلايەنى كەمەو دوو ملىۋن دىنارە زىاترە لە داھاتى پىاۋەكە سىستەمىكى لاسەنگە ھېلىيانەكان بنووسە پىرسىيارەكە بنوئىت، پاشان سىستەمەكە بەروونكردنەو شىكارىكە.

ھەريەك لەم سىستەمە لاسەنگە ھېلىيانە بەروونكردنەو شىكارىكە، سى خال لە ناۋچەى شىكارەكەدا دىارىكە.

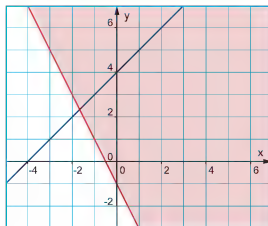
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3y \leq 2 \\ x - y > 3 \end{cases} \quad 30 \quad \begin{cases} y \geq -8 \\ x + 2y < 4 \\ x > -6 \end{cases} \quad 29 \quad \begin{cases} y + 7 > 0 \\ y < 2x + 5 \\ y < -3x + 4 \end{cases} \quad 28 \quad \begin{cases} -5y < 2x \\ 5y \geq 2x - 20 \end{cases} \quad 27$$

31 **بىر كىردنەو شىكارەكە** ئەگەر ئەو دوو راستەھىلەى ناۋچەى شىكارى سىستىمى دوو لاسەنگە كە دىارى دەكەن بەيەكتىرى تەرىب بن، ناۋچە شىكارى گونجاۋ چىيە؟

32 **بنووسە** ئاىا دەگونجى سىستىمىكى دوو لاسەنگەى ھىلى شىكارى نەپىت؟ ئەمە پرونكەرەو.

نامادە كىردن بۇ تاھى كىردنەو

33 كام لەم سىستەمە لاسەنگە ھېلىيانە شىكارە پروونكردنەو ھىيەكەى شىۋەيەكەى بەرامبەر دەنوئىت؟



$$\begin{cases} y \leq x + 4 \\ y \geq -2x - 1 \end{cases} \quad \text{ج} \quad \begin{cases} y > x + 4 \\ y < -2x - 1 \end{cases} \quad \text{ا} \\ \begin{cases} y \geq x + 4 \\ y \geq -2x - 1 \end{cases} \quad \text{د} \quad \begin{cases} y > x + 4 \\ y > -2x - 1 \end{cases} \quad \text{ب}$$

34 بىرى تىچوونى بىرىك لە كالا بۇ بەرھەمەپىنان 300 000 دىنارە و 1250 دىنار زىادە دەچىتە سەر ھەر كالا يەك كە دىتە بەرھەم. كۇمپانىياكە ئەو كالا يە بە نىرخىك كە لە 2500 دىنار بۇ ھەر كالا يەك تىيەپ ناكات دەفرۆشىت، كام لەم لاسەنگە ھېلىيانەى خوارەو دەگونجىت بۇ ناۋچە شىكارەكە بەكارىت بۇ نواندى قازانجى گونجاۋ كۇمپانىياكە؟ ھىماى c بۇ تىچوونى گشتى، و n بۇ ژمارەى يەكە بەرھەمەتوۋەكان دادەنرىت.

$$\begin{cases} c \leq 2500n \\ c \geq 300000 + 1250n \end{cases} \quad \text{ج} \quad \begin{cases} c \leq 300000n \\ c \leq 300000 + 1250n \end{cases} \quad \text{ا} \\ \begin{cases} c \geq 2500n \\ c \geq 300000 + 1250n \end{cases} \quad \text{د} \quad \begin{cases} c \geq 2500n \\ c \leq 300000 + 1250n \end{cases} \quad \text{ب}$$

35 کام لہم خشتانہی خواروہ شیکاری ئەم سیستمی تێدایە $\begin{cases} 3x - 12y > 8 \\ x + 5y > -5 \end{cases}$

د

x	y
1	-2
2	-2
3	-1
4	-1

ج

x	y
1	-1
2	-1
3	0
4	0

ب

x	y
1	-2
2	1
3	1
4	-2

ا

x	y
1	-2
2	0
3	0
4	-2

بەرەنگاری و فراوانکردن

36 سیستمیکی لاسەنگە هێڵیەکان بنووسە کە ناوچە شیکارەکە ی پێنجلابێت.

37 ئایا نەزانراوی m بەهایەکی هەیه کەوا لە سیستمی لاسەنگە هێڵیەکان بکات شیکاری نەبێت؟ ئەگەر وەلامەکەت بەلێ بوو ئەو بەهایە کامەیه، و ئەگەر بەنەخێر بوو هۆیهکە ی پوونیکەوه.

38 سەردار دەیهوێت 30 ملیۆن دینار لە بازاری پارەدا (سوق الاوراق المالیه) وەگرێت، بانکەکە دوو جوړه کاری خستە پێش. یەکەمیان کەم مەترسییه و قازانجەکە ی سالانە بە پێژە ی 5% بێت. دووهمیان پێ مەترسییه و قازانجەکە ی سالانە بە پێژە ی 7% بێت. کەمترین بڕ پارەکە دەبی وەکاربخات بە پێژە ی قازانجی 7% تا قازانجەکە ی سالانە لە 1 900 000 دینار کە مەترنەبێت چەندە؟

پێداچوونەوهی لولپێچی

دژە کوژدەنهوهی هەریهک لەم ژمارانه و هەلگەراوهکە ی بنووسە (پۆلەکانی پێشوو).

42 -1

41 2.48

40 $-\frac{3}{4}$

39 7

هاوکێشەیهک بو ئەو راستەهێڵە بنووسە (پۆلەکانی پێشوو)

43 بە دوو خالی (2, -7) و (1, 1) دا دەپوات. 44 بە خالی (3, -3) دادەپوات و لارییهکە ی سفرییت.

45 بە دوو خالی (1, -1) و (0, 0) دا دەپوات. 46 بە خالی (9, 6) دادەپوات و لارییهکە ی $-\frac{1}{3}$ بێت.

47 بە خالی (-2, 4.5) دادەپوات و لەگەڵ راستەهێڵی $y = 4x - 1$ ئەستوون دەبێت

48 بە خالی (3, 2) دادەپوات و بە راستەهێڵ $y = -x - 7$ تەریب بێت.

پروگرامی هیلی

Linear Programming



کی نهمه به کارده هیئت؟

ئەندازیارەکانی باخچەکان پڕۆگرامە هیلییەکان بۆ دیاریکردنی ئەو پووەکانە لە سەر پووە سەوزەکان دەیانپوین بە کاردێن.

ئامانجەکان

شیکارکردنی پڕۆگرامی هیلی.

زاراوەکان Vocabulary

پڕۆگرامی هیلی
Linear programming

مەرج
Constraint

ناوچەی گونجاو
Feasible Region

نەخشەی بەسوود
Objective Function

پووە سەوزەکان، ئەو پووانەن کە لە جیاتى مەودای تری وەك چیمەنتۆ یان قرمید بە پووەکە سەوزەکان داپۆشراون، بۆ ئەوەی یارمەتی دابەزاندنی پلەى گەرما بدات. و جۆرى هەواکە باش بکات. هەلپژاردنەکانی ئەندازیارانی باخچەکان کاردەکات لە نرخى پووەکەکان و برى ئاوى پۆیست و برى دووهم ئۆکسیدی کاربۆن کە دەیمژێت.

پڕۆگرامی هیلی **Linear programming** رێگایەکە بۆ دیاریکردنی گەورەترین یان بچوکتەین بەها بۆ ئەو نەخشەییە پاسادانی کۆمەڵە مەرجێک دەکات. کە پێی دەوترێت مەرجەکانی پرسیارەکە. مەرج **Constraint** یەکیەک لە لاسەنگەکانە لە پرسیارى پڕۆگرامی هیلی.

دەگونجێت ئەو کۆمەڵە شیکارانی هەموو مەرجەکان جیبەجێ دەکات بتوانرێت، کە ناوچەیک لە پووتەختی پۆوتانەکاندا پەیدا دەکات پێی دەوترێت ناوچەى بەسوود (الجدوى) **Feasible Region**.

نموونه 1 نواندى ناوچەى گونجاو بە پوونکردنەوهی

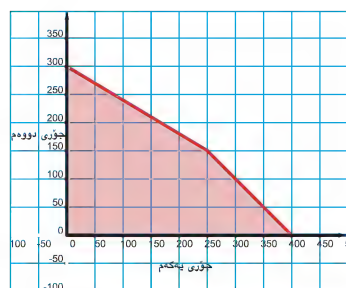
سیروان نەخشەى ئەندازەى باخچەیک دەکێشێت پووبەرەکەى لە 600m^2 تێناپەرێت، دوو جۆر پووەک بەکاردێت، پووەکی جۆرى یەكەم پووبەرێكى 1.2m^2 دادەپۆشێت، و پووەکی جۆرى دووهم پووبەرێكى 2m^2 دادەپۆشێت، نرخى هەر پووەکێک لە دوو جۆرەکە 2500 دینار، دەبێ تێچوونى پووەکەکان لەیەك ملیۆن دینار تێپەرێت، مەرجەکان بنووسە و ناوچەى گونجاو بەپوونکردنەوهی بنوێتە.

هێمای گۆرپای x بۆ ژمارەى پووەکەکانى جۆرى یەكەم، و گۆرپای y بۆ ژمارەکان لە جۆرى دووهم دابنێ. مەرجەکانى بنووسە.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 1.2x + 2y \leq 600 \\ 2500x + 2500y \leq 1000000 \end{cases}$$

ژمارەکانى پووەکەکان بەسالیب نەبێت
پووبەرى داپۆشراو لە 600m^2 پتر نەبێت
تێچوونى پووەکەکان لە 100 0000 دینار پتر نەبێت.

بەپوونکردنەوهی هەریەك لە مەرجەکانى پرسیارەکە شیکاربکە، ئەو ناوچەییە یەکتەربى ناوچە شیکارە جیاوازهکان پێکدێنێت رەنگبکە. ناوچەى بەسوود ئەو ناوچەیدەبێت کە دەستمان دەکەوێت، چوار لایەکە خالی سەرەکانى بریتین لە $(0, 0)$ ؛ $(400, 0)$ ؛ $(250, 150)$ ؛ $(0, 300)$

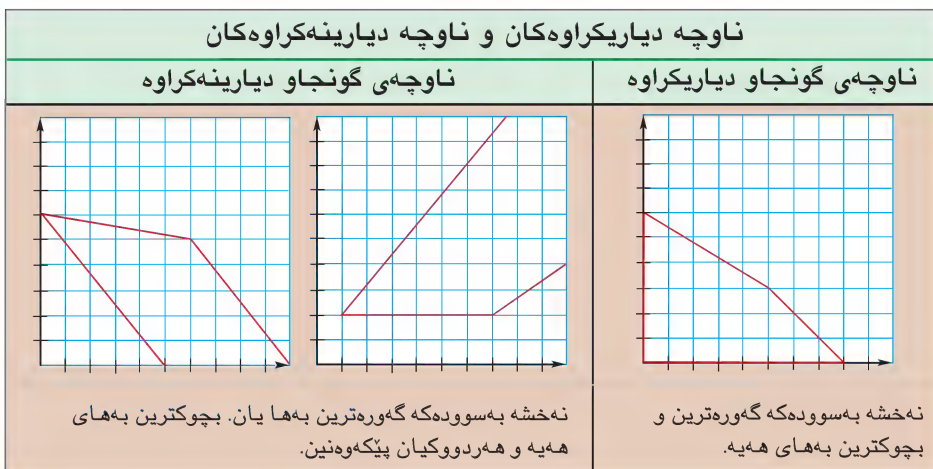


ساغکردنەوه ئەگەر خالێک وەك $(100, 100)$ هەلپژارد دەبینى کە پۆوتانەکەى هەموو مەرجەکان دێنێتەدى. ✓

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1.5 \\ 2.5x + 5y \leq 20 \\ 3x + 2y \leq 12 \end{cases}$$



1. به پروونکردنه وهی ناوچهی گونجاو بۆ ئەم پرسیاره بنویته. کاتێک پرسیارێکی پرۆگرامی هێڵی شیکاردەکە، تەنها نواندنی ناوچهی گونجاو له پرووتەختی پۆتاندا بەس نییە، زۆریەکی کات لەسەرت پێویستە بەهای ئەو گۆراوانەیی نەخشەکە بدۆزیتەوه. بە ھۆی ئەو گۆراوانەوه کەوا لە نەخشەکە دەکەن بەھاکی بگاتە گەورەترین یان بچووکتەترین بەم جوۆرە نەخشانەش دەوترێت نەخشەیی بەسوود (دالە منفعة) **Objective Function** بە ھێ ناوچهی گونجاو، دەکرێ نەخشە بەسوودکە بەھاکی گەورەترین یان بچووکتەترین یان ھەردووکیان پێکەوه یان ھیچیان نەبێت.



دەتوانرێت بە ھۆی بیرکاری بالائەترەوه، ئەمەیی خوارەوه بەسەلمینرێت.

لووتکەیی سەرەتا لە پرۆگرامی هێڵیدا

ئەگەر نەخشەیی بەسوود (ئامانج) لە پرسیارێکی پرۆگرامی هێڵیدا گەورەترین یان بچووکتەترین بەهای ھەبێت، ئەوا ئەو نەخشەیی بەھاکی دەگاتە سەرێک لە سەرەکانی ناوچهی گونجاو.



شیکارکردنی پرسیارى هێلى

2 نمونە

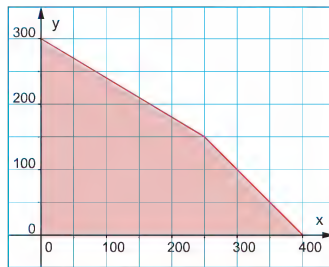
رۆشنایی

بژمیری پروونکردنەوهی بەکاربەێنە بۆ ساغکردنەوهی ئەو ناوچهی گونجاو دەستکەوتوووە. بیرت نەچێت گۆراوەکان بە x و y بگۆرە



سیروان ئەندازیاری باخچەکانە ئەوپەڕی گرنگی بە ڤاگرتنی پارسەنگی پێسبوونی ھەوا دەدات. بۆ گەیشتن بەو مەبەستە، سیروان کار بۆ ئەو دەکات ژمارەیی ئەو پرووەکانەیی زۆرتەین دووھم ئۆکسیدی کاربۆن ھەلەمژن گەورەترین بێت. تیکراییەکانی ھەلەمژنی دووھم ئۆکسیدی کاربۆن و پیدراوەکانی نموونەیی 1 بەکاربەێنە بۆ دۆزینەوهی ژمارەیی پرووەکەکان لەو دوو جوۆرە.

هەنگاوی 1 ھیمای گۆراوی C بۆ بۆ دووھم ئۆكسىدى کاربۆنى ھەمژراو دابنى. x بۆ ژمارەى پرووھەکان لە جۆرى يەكەم و y بۆ ژمارەى جۆرى دووھم بەکاربىنە.



نەخشەى بەسوود بنووسە: $C = 0.7x + 1.05y$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 1.2x + 2y \leq 600 \\ 2500x + 2500y \leq 1000000 \end{cases}$$

و ناوچەى گونجاو بنوینە

هەنگاوی 3 بەھای نەخشەى بەسوود لە ھەرسەرێك لە سەرەكانى ناوچەى گونجاو ھەژماربە.

(x, y)	$0.7x + 1.05y$	C
$(0, 0)$	$0.7(0) + 1.05(0)$	0
$(0, 300)$	$0.7(0) + 1.05(300)$	315
$(250, 150)$	$0.7(250) + 1.05(150)$	332.5
$(400, 0)$	$0.7(400) + 1.05(0)$	280

نەخشە بەسوودەكە دەكاتە گەورەترین
بەھا لە $(250, 150)$

سێروانى ئەندازيار پيوستە لەسەرى 250 پرووھك جۆرى يەكەم و 150 پرووھك لە جۆرى دووھم بپوینى (بچینی). بۆ ئەوێ ئەو برە دووھم ئۆكسىدە کاربۆنەى، رووھەكانى باخچەكە ھەلیدەمژن بگاتە ئەوپەرى بەھا.

2. گەورەترین بەھا بۆ نەخشەى بەسوودى $p = 25x + 30y$ دیاریبەكە لە ژێر ئەم

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1.5 \\ 2.5x + 5y \leq 20 \\ 3x + 2y \leq 12 \end{cases}$$

مەرجانەى خوارەو.



جیبه جیکردنەکان

نموونه 3



لە قیستىفالى ئەسپ سواری دا، دەبیئت بیستون پۆژانە ژەمە خواردنەکان لە قووتو دابینت بۆ ئەو مەبەستەش کریکارى پسپۆرى بەکارھێنا کریی پۆژانەى یەکیکیان 60 000 دینارە. و کریکارى تر پسپۆرى نین کریی یەك پۆژى 40 000 دینارە پيوستە ئەو کرییەى دەیانداى ئەو پەرى 1 440 000 دینار بیئت. بیستون لە بەرامبەر ھەر کریکارىکى پسپۆرىدا 3 کریکارى نا پسپۆرى پيوستە، تەنھا 16 کریکارى پسپۆرى دەستکەوتوو. کریکارە پسپۆرەكە 25 قووتو لە کاتژمیریکدا و نا پسپۆرەكە 18 قووتو لە کاتژمیریکدا بەرھەم دینت ژمارەى کریکارەکان لە ھەر جۆرێك بدۆزەو. بۆ ئەوێ ژمارەى ئەو قووتوانەى بەرھەمدیئ گەورەترین بیئت.

1- پرسیارە كە تیبگە

وئلامەكە لە دوو بەش پیکدیت: ژمارەى پسپۆرەکان و ژمارەى ناپسپۆرەکان. لیستێك بۆ زانیاریە گرنگەکان دابنى.

- کریی پسپۆر 60 000 دینارە لە پۆژیکدا، کریی ناپسپۆرێك 40 000 دینارە لە پۆژیکدا.
- بیستون 1 440 000 دینارى بۆ ئەوپەرى کریی کریکارەکان دانەو.
- پسپۆرەكە 25 قووتو لە کاتژمیریکدا و ناپسپۆرەكەش 18 قووتو لە کاتژمیریکدا بەرھەمدینت.
- بیستون بۆ ھەر پسپۆرێك 3 نا پسپۆرى پيوستە.
- تەنھا 16 کریکارى پسپۆرى ھەیە.

2 پلانى شيكار کردن دابنى

هيماي گوراي x بۇ ژماره كرىكاره نا پسپورهكان و گوراي y بۇ ژماره كرىكاره پسپوريهكان دابنى. مهرجهكانى پرسيارهكه و نهخشه به سود بنووسه. پالپشت بهو زانياريه گرنگانهى نووسيوته.

ژماره كرىكارهكان سالب نييه.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 40000x + 60000y \leq 1440000 \\ y \geq \frac{1}{3}x \\ y \leq 16 \end{cases}$$

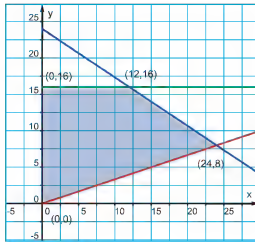
كرى كرىكارهكان له 1 440 000 دينار تيناپهريت.

كرىكارىكى پسپوره بهلايهنى كه مهوه بوه 3 كرىكارى ناپسپورى ژماره كرىكاره پسپوره ئامادهبووهكان 16 كرىكاره.

هيماي گوراي p بۇ ژماره قوتوه بهرهمهاتوووهكان له كاتزميريكدا دابنى نهخشه به سود برىتيه له $p = 18x + 25y$

3 شيكارىكه

به پوونكردنهوهي ناوچهى گونجاو و سهرهكان ديارىبكه پاشان بهاي نهخشه به سودهكه له هر سهرىكدا ههژمارىكه.



$$p(0, 0) = 18(0) + 25(0) = 0$$

$$p(0, 16) = 18(0) + 25(16) = 400$$

$$p(12, 16) = 18(12) + 25(16) = 616$$

$$p(24, 8) = 18(24) + 25(8) = 632$$

نهخشه به سود گهورهترين بهاي دهبيت له سهرى (24, 8) دا. پيوسته بيستون 8 كرىكارى پسپور و 42 كرىكارى نا پسپور بهكاربينيت.

4 روانيتىك بؤدواوه

دلنبايه لهوهى جووته پىكخراوى (24, 8) ههموو مهرجهكانى پرسيارهكه پاسادان دهكات.

$$y \leq 16$$

$$y \geq 0 \quad x \geq 0$$

$$8 \leq 16 \checkmark$$

$$8 \geq 0 \checkmark \quad 24 \geq 0 \checkmark$$

$$40000x + 60000y \leq 1440000$$

$$y \geq \frac{1}{3}x$$

$$40000 \times 24 + 60000 \times 8 \leq 1440000 \quad y \geq \frac{1}{3}(24)$$

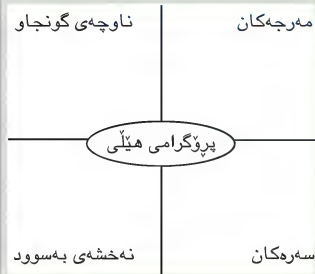
$$1440000 \leq 1440000 \checkmark$$

$$8 \geq 8 \checkmark$$

3. بهرپوهبهرى كتيبخانهيك دهيهويت دولاى كتيب بكرىت. كتيبخانهكه پيوستى به دو جور رهف ههيه به دريژى 320 m. تىچوونى دولاى له جورى يهكه كه 32 m رهفهى ههيه 200 000 ديناره. تىچوونى دولاى له جورى دوهم كه 16 m رهفهى ههيه 125 000 ديناره. به پي پيوانهكانى هولى كتيبخانه بهلايهنى زورهوه 8 دولاى له جورى يهكه و 12 دولاى له جورى دوهم دهگريت. بهرپوهبهرى كتيبخانهكه پيوسته چهند دولاى له هر جورى بكرىت بؤ لهوهى كه مترين پاره بدات.



بیریکه وه و تاوتویبکه



1. چی وا له مهرجهکانی پرسپاری پروگرامی هیلی دهکات به زۆری دوو مهرجی $x \geq 0$ و $y \geq 0$ ی تیدا بیت؟
2. چی وا له نهخشەیی بهسوود دهکات له پرسپاری پروگرامی هیلیدا دوو مهرجهکانی $\begin{cases} x+y > 0 \\ y \leq 4 \end{cases}$ گهورهترین بهها یان بچووکترین بههای هه بیت و ههردووکیان پیکه وه نه بن؟
3. چۆن دهزانیت که زانیارییه که له پرسپاری پروگرامی هیلیدا هی مهرجهکیه یان هی نهخشه به سوودهکیه؟
4. ریکخه به خسته که بنووسه وه، پاشان تهواوی بکه، له هههه خانییه کهدا نمونهیه که بنووسه، پیدراوهکانی دوو نمونه 1 و 2 بهکار بیینه.



4-2 راهینانهکان

راهینانی ئاراستهکراو

1 **زاراوهکان** له پرسپاری پروگرامی هیلیدا به لاسهنگهکان دهوتریت ؟ (مهرجهکان یان نهخشەیی بهسوود)

ههه ناوچهیهکی گونجاو بهروونکردنه وه بی دیاریبکه.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 3x+3 \\ y \leq -x+7 \end{cases} \quad \text{2} \\ & \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -1 \\ y \leq x+1 \\ y \leq -\frac{1}{4}x+6 \end{cases} \quad \text{3} \\ & \begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq 1 \\ y \geq 0.5x-2 \\ y \leq -2x+3 \end{cases} \quad \text{4} \end{aligned}$$

1 پروانه نمونه

2 بههاکانی x و y بدۆزه وه که گهورهترین بهها یان بچووکترین بهها دهکات به نهخشه به سووده که.

2 پروانه نمونه

مهرجهکان	نەخشەیی بەسوود	گهورهترین یان بچووکترین بهها
مهرجهکانی پرسپاری 2	$p = 10x + 16y$	گهورهترین بهها
مهرجهکانی پرسپاری 3	$p = 3x + 5y$	بچووکترین بهها
مهرجهکانی پرسپاری 4	$p = 2.4x + 1.5y$	گهورهترین بهها

5

6

7

8 **پزیشکی ددان** پېبوار پزیشکی ددانه پۆژانه 7 کاتژمیر کار دهکات، نیو کاتژمیر بۆ ئه وه نهخۆشه دانهنیت که دهیهوئیت ددانی پاک بکاته وه، 40 000 دیناری لئ وهردهگریت، و کاتژمیریک بۆ ئه وه نهخۆشه ی چارهسهری پووکی دهکات و 95 000 دیناری لئ وهردهگریت. پزیشکه که دهتوانیت به لایهنی زۆره وه 4 نهخۆش له پۆژیکدا ببینیت که چارهسهری پووکیان دهکن. ژماره ی بارهکانی پاککردنه وه ی ددان و ژماره ی ئهوانه ی چارهسهری پووکیان دهکن، بۆ ئه وه ی زۆرتین داها ت بۆ پزیشکه که دابین بکات بدۆزه وه؟

3 پروانه نمونه

پاھىنان و شىكارکردنى پرسىارەكان

بە روونکردنەوھى ھەرىكە لە ناوچەى گونجاو بنوێتە.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 5 \\ y \geq \frac{1}{5}x - 3 \\ y \leq -x + 4 \end{cases}$$

11

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 9 \\ y \geq -2x - 7 \end{cases}$$

10

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \geq 4x - 4 \\ y \leq x + 5 \end{cases}$$

9

پاھىنانەكان	
سەيرى	بۇ شىكارى
1	11 - 9
2	14 - 12
3	15

بەھاكانى x و y بدۆزەوھەكە گەورەترین يان بچوكترين بەھا دەدات بە نەخشەى بەسوود.

مەرجەكان	نەخشەى بەسوود	گەورەترین بەھا يان بچوكترين بەھا
12	$p = -21x + 11y$	گەورەترین بەھا
13	$p = -2x - 4y$	بچوكترين بەھا
14	$p = x + 3y$	گەورەترین بەھا

15 رېكلامەكان كۆمپانىيايەك 60 مليون

دینارى تەرخانکرد بۆ رېكخستنى ھەلمەتى پروپاگەندە بۆ بەرھەمەكانى لە تەلەفزیۆن لە ماوە ئیوارانەكەى و ژمارەيەك لەرادىۆكانیش. بەرپرسی ھەلمەتەكە بریاریدا لە ئیوان 30 تا 60 جاردە پەخشى ئیگەكە بەكاربێنیت. ئەم خشتەيە بەكاربێنەكە ژمارەيەك رېكلامى ماوەى ئیوارانى تەلەفزیۆن و ئیگەدا كە درێژترین كاتى گونجاو لە رېكلام، لە سنوورى بووجەكەیدا دابین دەكات.



تێچوون (دینار)	ماوە (چرکە)	جۆر
400 000	20	ئىگە
1 500 000	30	تەلەفزیۆن (ماوەى ئیواران)
1 200 000	30	تەلەفزیۆن (ماوەى شەو)
300 000		پۆژنامەكان

16 بلیتەكانى پېشبرکێى خۆر ھەلات بۆ ئۆتۆمبیلەكان بە دوو نرخ دەفروشرێن 25 000 دینار بۆ کورسییەكانى سەرەو و 45 000 دینار بۆ کورسییەكانى خوارەو. رېكخەرى پېشبرکێكە بریاردارا ژمارەى تەماشاکەرەان 160 000 كەس زیاتر نەبێت.

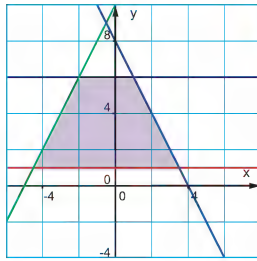
ا ژمارەى ئەو بلیتانەى لە ھەر جۆرێك پێویستە بفروشرێت بۆ دەستكەوتنى زۆرترین قازانجى گونجاو بدۆزەو ئەگەر بزانیات ژمارەى کورسییەكانى سەرەو لە 120 000 کورسى تێناپەرێت و ژمارەى کورسییەكانى خوارەو لە 60 000 کورسى تێناپەرێت.

ب سستەم و شىكارەكە چۆن دەگۆرێت، ئەگەر بەرپۆبەرایەتى پېشبرکێكە پېشبینى ئەو بەكات داھاتى ھەر کورسیەك لە کورسییەكانى سەرەو 60 000 دینار و ھەریەك لە کورسییەكانى خوارەو 30 000 دینار بێت. بەكرینى بابۆلە و ساردەمەنییەكانیشەو؟

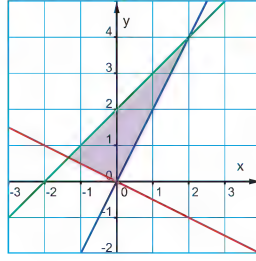


17 پېشەسازی دەزگای ال- (سەباح) دوو جۆر پانكە بەرھەم دێنێت. دروستکردنى پانكە لە جۆرى یەكەم 4 كاتژمێر دەخایەنێت و 40 000 دینار قازانج دەكات، پانكەى جۆرى دووھەم 6 كاتژمێر دەخایەنێت و قازانجەكەى 80 000 دینارە. ھێزى بەرھەمھێنان دامەزراوەكە پۆژانە 15 پانكە لە جۆرى یەكەم و 4 پانكە لە جۆرى دووھەم تێپەر ناكات. ژمارەى كەمترین كاتژمێرەكانى كارکردنى لەم دامەزراوەیەدا بۆ ئەوھى برى قازانجى پۆژانە لە 400 000 دینار كەمتر نەبێت چەندە؟

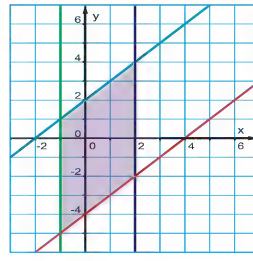
ئەندازە لە خوارووە نواندەکانی پروتئورنەوایی ناوچە گونجاوکانە لە پرسیارەکانی پرۆگرامی ھێڵیدا، بۆ ھەریەکەیان سیستمی لاسەنگەکان بنووسە.



20



19



18

ھاتوو چۆ بەپۆڵەبەرایەتی پێگا خێراکان بریاریدا ئیشتگاری تایبەت لە سەر پێگاکان بۆ یارمەتی ئەو کەموکۆریانە لە سووتەمەنیدا ھەیە، یان ئەو ئۆتۆمۆبیلانە یەكێك لە تایەکانی لە کاردەکەوێت دەربەت، سووتەمەنی پێدانى ئۆتۆمۆبیلێك 15 خولەکی پێویستە، چاککردنەوی تایەى ئۆتۆمۆبیل 45 خولەکی پێویستە، زۆرتەین ژمارەى ئەو ئۆتۆمۆبیلانە ئیشتگاریک دەتوانێت لە ماوی 8 کاتژمێردا یارمەتیا بەدات چەندە؟ ئەگەر بزانی ئە 28 گالۆن زیاتر ناتوانێت ھەلبژێت.

بیری پەخنەگرانە ئایا دەبێت پرسیارێکی پرۆگرامی ھێلی شیکاری نەبێت؟ بە نموونەیک پالێشتی وەلامەکەت بکە.

خواردن یەكێك لە کارگەکانی خۆراکی تەندروستی دوو جۆر خۆراک بە زیادکردنی پرۆتین صویا و فیتامینەکان بەرھەمەدینێت. جۆری یەكەم پێویستی بە دوو ئونس لە پرۆتین صویا و یەك ئونس لە فیتامینەکان ھەیە، و 25 000 دینار قازانج دەکات، جۆری دووھم پێویستی بە 3 ئونس لە پرۆتین صویا و یەك ئونس لە فیتامینەکان ھەیە، و 32 000 دینار قازانج دەکات. چەندیکە لە ھەر جۆریک پێویستە کارگە بەرھەمەدینێت بۆ ئەوێ زۆرتەین قازانج بکات. ئەگەر بزانی گەنجینەى پرۆتین صویا و فیتامینەکان 100 ئونسی تێدا یە.

بیری پەخنەگر نموونەیک لە سەر پرسیارێکی پرۆگرامی ھێلی بنووسە کە ناوچە گونجاو کەى تێدا بێت بە ھایەکی سالی ھەبێت.

بنووسە ئەگەر پێویست بوو لە سەرت بە دواى گەورەترین بەھاو بچوکتەین بەھاى نەخشەیکەى بەسوود لە پرسیارێکی پرۆگرامی ھێڵیدا بە پێى مەرجەکانی پرسیارەکە بگەڕێیت. چۆن ئەو جیادەکەیتەو.

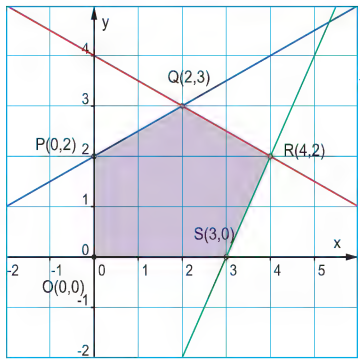
بنووسە چۆن پۆتانی سەرەکانی ناوچەى گونجاو دەدۆزیەو؟

دەروازەیکە

لە سەر میژووی بێرکاری



زانستی پرۆگرامی ھێلی لە ماوی شەری دووھمی جیھانیدا و لە سەدەى بیستەمدا پەری پێدرا. ئەو زانستە پۆلی زۆری گێرا. بەشێک لە زانستی بەرفراوانتر کە پێى دەوترێت توێژینەوی کردارەکان پۆلی لە بردنەوی ئەو شەپە دایینی بە ھۆی باشی دابەشکردنی پێداویستیە سەربازیەکانەو.



27 کام خال گەورەترین بەھا دەدات بە نەخشەى بەسوودی $P = -x + y$ لە پرسیارێکی پرۆگرامی ھێڵیدا کە شۆوی بەرامبەر تیايدا ناوچە گونجاو کە دەنویێت.

- P (ا)
 Q (ب)
 R (ج)
 S (د)

نامادەکردن بۆ تاقیکردنەو



28 سەرەکانی ناوچەى گونجاو لە پرسىارىكى پرۆگرامى ھىلايىدا برىتییە لە خالەکانى $(0, 0)$ و $(-1, 2)$

$(-2, 6)$ ، کام لەم نەخشە بەسودانەى خوارەووە نزمترین بەھای سالبى لە ناوچەى گونجاودا ھەيە؟

$P = -x + 3y + 2$ (ج)

$P = -4x + y - 1$ (ا)

$P = -5x - y$ (د)

$P = 12x + 7y$ (ب)

29 يەكێك لە كۆمپانىاكانى بىنا گەورەكان پلان بۆ دروستکردنى چەند بىنايەكى بازىرگانی و چەند

بىنايەكى نىشتەجیپوون لەسەر پارچە زەویەك پرۆبەرەكەى $30\,000\text{ m}^2$ بێت دا دەنێت ھەر

بىنايەكى نىشتەجیپوون 250 m^2 و ھەر بىنايەكى بازىرگانی 3000 m^2 پێویستە كۆمپانىا كە لە

ھەربىنايەكى نىشتەجیپوون يەك ملیۆن دینار و لە ھەر بىنايەكى بازىرگانی 20 ملیۆن دینار قازانج

دەكات، کام لەمانەى خوارەووە نەخشەى بەسودە بۆ ئەم پرسىارەى پرۆگرامى ھىلايە و زۆرتىر

قازانجى گونجاو دابىن دەكات، ئەگەر بزانی ژمارەى بىنا بازىرگانییەكان لە 6 بىنا تێناپەرێت؟

$P = 1000\,000x + 20\,000\,000y$ (ج)

$P = 250x + 3000y$ (ا)

$P = 300\,000 - x - 6y$ (د)

$P = 250x + 100\,000y$ (ب)

بەرەنگارى و فراوانکردن

30 **دەرمان** يەكێك لە كۆمپانىاكانى دروستکردنى دەرمان پلان بۆ

تاقىکردنەوێ جۆرىكى نوێ لە دژە زىندەییەكان (المضادات الحيوية)

لەسەر دوو جۆر A و B لە بەكتىريا دادەنێت. وا پێویست دەكات

دەرمانە نوێیەكە تاقىبکړیتەو لەسەر بەلایەنى كەمەو لە 700 جۆر

بەكتىريا بۆ بریاردان لەسەرى، لە نۆوانیاندا 400 نمونەیان لە جۆرى

B بێت بەلایەنى كەمەو بۆ یارمەتى دانى كۆمپانىا كە لەسەر

دابەزاندنى تاقىوونى تاقىکردنەوێكە بۆ كەمترین بى.

ا بەروونکردنەوێى ناوچەى گونجاوى پرسىارەكە بنوێنە

ب ھەریەك لەم دوو خالەى پرسىارەكە $(350, 400)$ و $(400, 350)$ چى دەنۆینێت؟

ج ئایا ھەریەكە لەم دوو خالە مەرجهكانى پرسىارەكە پاسەدان دەكەن؟ ھۆكارى پروونبەكەو.

پیداچونەوێ لولپىچى

لەھەر پرسىارىك لەمانەدا $f(7)$ و $f(-\frac{1}{2})$ ھەژماربەكە (پۆلەكانى پىشو).

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ **33**

$f(x) = 0.5x$ **32**

$f(x) = \frac{1}{2x - 3}$ **31**

نەخشەى بەھای پرووتى $f(x) = |x|$ بگۆرە بە جۆرى سەرەكەى لە خالێكى ديارىكراودابێت. وێنەى

پروونکردنەوێى نەخشە نوێیەكە بكێشە (پۆلەكانى پىشو)

$(-2.5, 0.75)$ **36**

$(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ **35**

$(6, -3)$ **34**

ئەندازە بە پروونکردنەوێى ھەر سىستىمىكى لاسەنگەكان بنوێنە. ئەو شیوہ ئەندازەییەى ناوچە شىكارەكە

دەنۆینێت ناوى بنى (وانەى 2-3)

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 2 \\ y \leq x \\ x + y \leq 6 \end{cases}$$
 38

$$\begin{cases} y \leq 6 \\ y - 2x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$
 37

تاقىردنەۋەى نىۋەى بەش

1-2 لاسەنگە ھىلىيە دوو نەزانراۋەكان (دوو گۇراۋەكان)

بە پرونكردنەۋەى ھەرىكە لەم لاسەنگە ھىلىيە دوو نەزانراۋە شىكارىكە.

$$2x + 5y > 10$$

$$y - 1 \leq 5$$

$$3(2x - 1) + y > 6x - 4$$

$$3x - 4y > 5x + 12$$

تارا 30 000 دىنارى پىيە بۇ كرىنى كارتى پىرۇزىيى. نرخی كارتىكى گەۋرە 2500 دىنار و نرخی كارتىكى بچوك 1500 دىنار. لاسەنگە ھەك بنووسە بارەكە بنوئىت. دوو نەزانراۋ بەكارىيەكە ھىماى ھەرىكەكەيان ژمارەى جۇرئەك لە كەرتەكان بىت. بە پرونكردنەۋەى لاسەنگەكە شىكارىكە.

2-2 نموونە ھىلىيەكان

پزىشكىكى منالان بۇ ماۋەى چەند ھەفتەيەك ئەمانەى تۆماركرد. چەند كاتژمىر لە ھەفتەيەكدا كاريكردوۋە. چەند ھەزار دىنارى لە كارەكەى ۋەرگرتوۋە. خشتەى خوارەۋە ئەۋ پىدراۋە پروندەكاتەۋە. بۇ ئەۋ ھەفتانەى پزىشكەكە بە ھەرمەكى ھەلىبژاردون.

28	12	30	18	23	8	ژمارەى كاتژمىرەكان
525	240	530	315	465	152	كرىيەكەى

ا ئەۋ پىدراۋە بەخالى پرونكردنەۋەى بنوئە، ژمارەى كاتژمىرەكان ۋەك گۇراۋى ئازاد بەكارىيەكە.

ب بژمىرى پرونكردنەۋەى بۇ دۇزىنەۋەى ھاۋكۆلكەى پەيوەستى و ھاۋكۆشەى راستەھىلى نواندىنى

باشترىن پىدراۋەكان بەكارىيەكە، لارى راستەھىلەكە بۇ پزىشكەكە چى دەگەيەنەت؟

ج ئەۋ ھاۋكۆشەى دۇزىتەۋە بۇ خەملاندنى دەستكەۋتى پزىشكەكە بەكارىيەكە ئەگەر زانەت 40 كاتژمىر لە

ھەفتەيەكدا كاردەكات.

3-2 شىكاركردىنى سىستىمى لاسەنگە ھىلىيەكان

بە پرونكردنەۋەى ھەرىكە لە سىستىمى لاسەنگەكان شىكارىكە.

$$\begin{cases} y \geq 2x + 3 \\ y > -x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + x \leq 0 \\ y \leq 4 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - x < 3 \\ y + x < 3 \end{cases}$$

4-2 پروگرامى ھىلى

لە ھەرىكە لەم پرىسارنەدا، ناۋچەى گونجاۋ بە پرونكردنەۋەى دىارىبەكە پاشان گەۋرەترىن بەھا يان.

بچوكترىن بەھا بۇ نەخشە بەسوۋدەكە $P = 4x + 5y$ دىارىبەكە.

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ y \geq 0 \\ y \leq 2x + 4 \\ y \leq -3x + 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq x - 1 \\ y \leq -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$

شیکارکردنی سیستمی هیلی به سی نه زانراو

Solving Linear systems in 3 unknowns

5-2



بۆ چی ئەمە فیڕ دەبیت؟

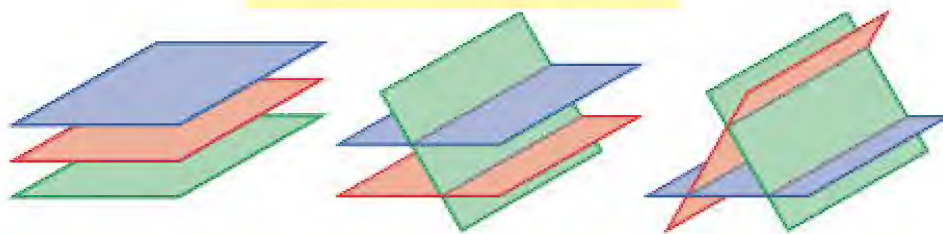
دەتوانین سیستمی سی ھاوکیشەیی هیلی بە سی نه زانراو بەکار بهێنیت بۆ شیکارکردنی زۆر پرسیار له ژيانی پۆژانه مانه، وهك دۆزینهوهی سیستمی بهرزی نمرهكان بۆ وهگرتن له كۆلیژی ئەندازه (نموونهی 2).

ئامانجهكان

- شیکاری سیستمی هیلی به 3 نه زانراو له بۆشایی پۆتاندا دەنۆینیت.
- سیستمی هیلی به سی نه زانراو به جەبری شیکار دهکات.

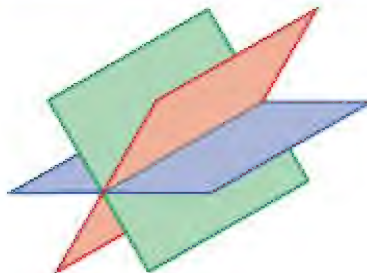
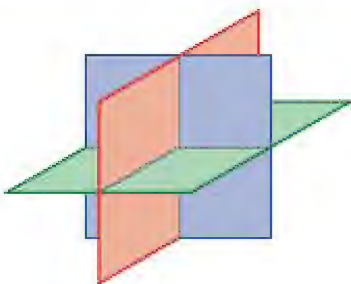
له پۆلهکانی پێششودا فیڕبوویت چۆن سیستمی هیلی بۆ دوو ھاوکیشەیی هیلی دوو نه زانراو یان سیستمی هیلی 2×2 شیکار بکەیت. زۆر جار به سیستمی هیلی 3 ھاوکیشەیی سی نه زانراو پێی دهوتریت سیستمی 3×3 بۆ ئەوهی تاکه شیکاریک بۆ سیستمی ھاوکیشە هیلییهکان بدۆزیته وه به گشتی پێویستت به وه ههیه که ژماره ی ھاوکیشەکان یه کسان بیت به ژماره ی نه زانراوهکان. به بیر خۆتی بینه وه له به شی پێششودا که ھاوکیشەیی هیلی به سی نه زانراو له پۆشایی پۆتاندا به هۆی پروته خته وه دهنۆینرا. کاتیك سیستمیکی هیلی له 3 ھاوکیشەیی سی نه زانراو له بۆشایی پۆتاندا دهنۆینیت سی پروته ختت دهستکه ویت. له وانهیه ئەو پروته ختانه یه کتری بپرین یان نه بپرین هه ر خالیکی ھاوبه ش له نیوان هه رسی پروته خته که دا شیکاری سیستمه که دهنۆینیت. له وه وه دهستان دهکه ویت که سیستمه که یه ک شیکاری ههیه یان ژماره یه کی نادیار شیکاری ههیه و هه ندیک جار له وانه یه شیکاری نه بیت.

سیستمه ئەسته مه کان (شیکاریان نییه)



سیستمه دیاریکراوه کان
(شیکاری تاقانه یان ههیه)

سیستمه دیارینه کراوه کان ژماره یه کی
ناکووتا شیکاریان ههیه



له وانه یه دیاریکردنی شیکارهکانی سیستمی هیلی 3×3 به به کارهێنانی نواندن له بۆشایی پۆتانهکاندا کاریکی گران بیت. به لām دهتوانیت ئەم سیستمه به جەبری شیکار بکەیت به به کارهێنانی لابردن و له جیاتیدانان بۆ گۆڕینی له سیستمی هیلی 3×3 بۆ سیستمی هیلی 2×2 پاشان سیستمی پهیدا بوو شیکار بکەیت به و پێگایانه ی له وانهکانی پێششودا فیڕبوویت.

شیکارکردنی سیستمی هیلی 3 هاوکیشه به سی نه زانراو

پښتای لایردن بۆ شیکارکردنی نهم سیستمه هیلییه خوارهوه به کاربښنه.

$$\begin{cases} x+2y-3z=-2 & ① \\ 2x-2y+z=7 & ② \\ x+y+2z=-4 & ③ \end{cases}$$

ههنگامی 1 یه کیک له سی نه زانراو که لایبه باشتروایه نه زانراوی y لایبهیت، چونکه هاوکولکه کان له دوو هاوکیشه ① و ② پیچه وانهی نیشانهن

هاوکیشه ① و ② کوپکه وه

$$\begin{aligned} ① \quad x+2y-3z &= -2 \\ ② \quad \frac{2x-2y+z}{3x-2z} &= \frac{7}{5} \end{aligned} \quad ④$$

ههردوو هاوکیشه ① و ③ به کاربښنه بۆ دوزینه وهی هاوکیشه یه کی تر به دوو نه زانراوی x و z

هاوکیشه ③ له ②- بده و
نه نجامه که ی له گه ل
هاوکیشه ① دا کوپکه وه.

$$\begin{aligned} ① \quad x+2y-3z &= -2 \\ ③ \quad -2(x+y+2z) &= -2(-4) \rightarrow -2x-2y-4z=8 \\ ⑤ \quad -1x-7z &= 6 \end{aligned}$$

لیردها سیستمی هیلی 2×2 مان ههیه.

$$\begin{cases} ④ \quad 3x-2z=5 \\ ⑤ \quad -x-7z=6 \end{cases}$$

ههنگامی 2 نه زانراوی کی تر لایبه، هاوکیشه ی پیدابوو شیکارکه به های نه زانراوی سییه مت دهست ده که ویت، نه زانراوی x لایبه.

هاوکیشه ⑤ لیکدانی 3
بکه و له گه ل هاوکیشه ④
کوپکه وه.

$$\begin{aligned} ④ \quad 3x-2z &= 5 \\ ⑤ \quad 3(-x-7z) &= 3(6) \rightarrow -3x-21z=18 \\ -23z &= 23 \\ z &= -1 \end{aligned}$$

ههنگامی 3 یه کیک له دوو هاوکیشه سیستمی 2×2 بۆ هه ژمارکردنی به های x به کاربښنه.

له جیاتی z به ها که ی 1- دابنی

$$\begin{aligned} ① \quad -x-7z &= 6 \\ ② \quad -x-7(-1) &= 6 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

ههنگامی 4 به هاکانی x و z له یه کیک له هاوکیشه به نه پرتیه کانددا دابنی، به های y هه ژمارکه.

$$\begin{aligned} ① \quad x+y+2z &= -4 \\ ② \quad (1)+y+2(-1) &= -4 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

شیکاری سیستمه که بریتیه له $(1, -3, -1)$

1. پښتای لایردن بۆ شیکارکردنی نهم سیستمه خوارهوه به کاربښنه.



$$\begin{cases} -x+y+2z=7 \\ 2x+3y+z=1 \\ -3x-4y+z=4 \end{cases}$$

دهشتوانیت پښتای له جیاتیدانان بۆ شیکارکردنی سیستمی هیلی 3×3 به کاربښنیت ههروهه
لیرده بیروکه ی گوړینی سیستمی 3×3 بۆ سیستمی 2×2 پیوسته.

2

جیہ جیگردن لہسہر پیشرکی وەرگرتن

پالئوراو	بېرکاري	زانسته کان	زمانی نېنگليزی	سهرجه م
سوژان	90	60	70	700
ئازاد	60	70	80	590
هوشيار	0	60	60	240

ئارەزوومەندان بۆ وەرگرتن لە کۆلیجی ئەندازیاری
 ئاچاردەبن بە پیشەپرکی 3 بەبەت بێرکاری و
 زاناستەکان و زمانی ئینگلیزی دەبەستن لیژنە
 پشکنین پشت بەنمرە بەرزی پالیئوراوەکان

ددهبەستیت «نمرەگەى لیكدانى ژمارەیهك دەرکیت» بەرزى نمرەى ھەربابەتیک جیاوازه له نمرەکانى دوو بابەتەگەى تر. ئەم خستەیهى بەرامبەر نمرەى 3 پالیوراو له سى^۶ بابەت، و کۆنمرەى ھەریەگەیان نوای نمرە بەرزى دەنوینت، پیدراوەکانى خستەگە بو^۷ دوۆزینەوہى بەرزى نمرەى ھەر بابەتیک بەکارپینتە.

ههنگاوی 1 هیمای گوڤاوی x بۆ بهرزی بابتهی بیرکاری و گوڤاوی y بۆ نمره بهرزی بابتهی زانستهکان و گوڤاوی z بۆ نمره‌ی بهرزی زمانی ئینگلیزی به‌کاربینه، سیستمی هاوکێشه‌کان بنووسه که پێدراوی ناو خسته‌که بنوێنیت.

نمره‌کافی سؤران

نمره‌کافی آزاد

نمره‌کافی هۆشیار

$$\begin{cases} 90x + 60y + 70z = 700 & \textcircled{1} \\ 60x + 70y + 80z = 590 & \textcircled{2} \\ 60y + 60z = 240 & \textcircled{3} \end{cases}$$

تېبىنى گۆراوى x بىكە نمرەكەي ديارنييه له هاوكيشەي سייەم. لەبەر ئەوەي ھۆشيار لەوانەي بېركارى سفرى وەرگرتووە نەبونی گۆراویك ھېچ لە كارەكە ناگۆرێت، ئەگەر سەیری هاوكيشەي 3 بىكەت دەتوانیت بەھاي y بەھۆي z ھو بەدۆزیتەو. ئەم كارە يارمەتیدەرە بۆ بەكارھێنانی لە جياتیدانان لە گۆرینی سىستمەكەبۆ سىستمي ھێلى لە دوو هاوكيشەي دوونەزانراو.

ھەنگاوی 2 بەبەكارھێنانی هاوكيشەي ③ ھەژماری گۆراوی y بەبۆ گۆراوی z بىكە

Y هه ژماریکه به پئی گۆراوی Z

$$60y + 60z = 240$$

$$y = 4 - z$$

ههنگاوی 3 له ههردوو هاوکێشهی ① و ② دا، له جیاتى y به هاكهی دابنێ.

$$\text{له جياتی دانئى وساده بکه} \begin{cases} 90x + 60(4-z) + 70z = 700 \rightarrow 90x + 10z = 460 & \textcircled{4} \\ 60x + 70(4-z) + 80z = 590 \rightarrow 60x + 10z = 310 & \textcircled{5} \end{cases}$$

ههنگاوی 4 لابرډنی به کاربهرینه بۆ شیکاری ئهو سیستمهی دهستکه ووتوه، هاوکێشه 5 له

هاوکیڙهی 4 دهریکه

$$90x + 10z = 460 \quad \textcircled{4}$$

$$\underline{60x + 10z = 310} \quad \textcircled{5}$$

$$30x = 150 \quad \textcircled{6}$$

هه‌نگاوی 5 ئه‌و هاوکی‌شه‌ی ده‌ست‌که‌و تووه‌ شیکاری بکه‌.

$$30x = 150$$

$x = 5$

هه‌نگاوی 6 له جیاتی x به‌هاکه‌ی له هاوکی‌شه‌ی ④ دا دابنێ بوّه ژمارکردنی به‌های z .

$$90(5) + 10z = 460$$

$$10z = 10$$

$$z = 1$$

هه‌نگاوی 7 له هاوکیښی ① دا هه‌ریه‌که له به‌هاکانی x ، z ، دابنی یوه ژمارکردنی به‌های y

$$90(5) + 60y + 70(1) = 700$$

$$60y = 180$$

$$y = 3$$

سیستمه‌کدیه‌ک شیکاری هه‌یه $(5, 3, 1)$ نمره‌کانی بیرکاری به‌هاوکۆله‌ی 5 و زانسته‌کان به‌هاوکۆله‌ی 3 و ئینگلیزی به‌هاوکۆله‌ی 1 به‌رز دهرکۆتیه‌وه.

2. بەرزى نمرى ھەر بابەتتەك لە پېشېركىچى چوونە كۆلچى پزىشكى بە پېى ئەم خشتەى پېدراوانە ديارىبەكە.



پالىئوراو	بىركارى زانستەكان	زمانى نىنگلىزى	سەجەم
شېرىن	80	70	50
سۇلاڧ	70	80	0
سانا	90	70	80

بۇ ھەرىكە لە سىستەمەكانى نمونەى 1 و 2 تەنھايەك شىكار ھەيە. بەلام دەگونجىت سىستەمى ھىلى 3x شىكارى نەبىت يان ژمارەيەكى ديارىنەكراو شىكارى ھەبىت.

پۆلىنكردى سىستەمى ھاوكىشەى ھىلى 3x3

نمونه 3

ئەو سىستەمە پۆلىنكە و ژمارەى شىكارەكانىشى ديارىبەكە.

$$\begin{cases} 4x - 2y + 4z = 8 & \text{①} \\ -3x + y - z = -4 & \text{②} \\ -2x + 2y - 6z = 4 & \text{③} \end{cases}$$

دەتوانىن پېگى لابرەن بەكاربەئىن چۈنكە دوو ھاوكۇلكەى گۇراوى y لە دوو ھاوكىشەى ① و ③ دزىەكن لە نىشانەدا، ئەم دوو ھاوكىشە كۆبەكەو.

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 4z &= 8 & \text{①} \\ -2x + 2y - 6z &= 4 & \text{③} \\ \hline 2x & \quad -2z = 12 & \text{④} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 4z &= 8 & \text{①} \\ 2(-3x + y - z = -4) &\rightarrow -6x + 2y - 2z = -8 & \text{②} \\ \hline -2x & \quad +2z = 0 & \text{③} \end{aligned}$$

سىستەمىك لە دوو ھاوكىشەى ھىلى دوو نەزانراوت دەستكەوت.

$$\begin{cases} 2x - 2z = 12 & \text{④} \\ -2x + 2z = 0 & \text{⑤} \end{cases}$$

گۇراوى x لابیە دوو ھاوكىشەى ④ و ⑤ كۆبەكەو.

$$\begin{aligned} ④ \quad 2x - 2z &= 12 \\ ⑤ \quad -2x + 2z &= 0 \\ \hline 0 &= 12 \quad \text{X} \end{aligned}$$

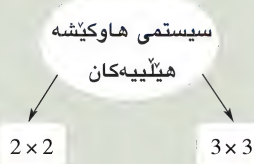
لەبەرئەوى 0 يەكسان نابىت بە 12 ئەم يەكسان بوونە ھەلەيە لەمەو دەردەچىت ئەم سىستەمە ئەستەمە.

3. ھەرىكە لەم سىستەمانە پۆلىنكە و ژمارەى شىكارەكانى ديارىبەكە.



$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 6 & \text{ب} \\ 2x - 4y + 6z = 10 & \text{ب} \\ y - z = -2 & \text{ب} \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y + 2z = 4 & \text{ا} \\ 2x - y + 3z = 7 & \text{ا} \\ -9x + 3y - 6z = -12 & \text{ا} \end{cases}$$

بیربکه وه و تاوتویبکه



1. برپوانه سیستمه ئهسته مهکان و بیسنورهکان (غير المحددة) که له لایه پهی یه که می وانه که دا هاتوو. باریکی تر باسبکه بۆ سۆ پروتیهخت که سیستمی ئهسته مئیکى ئهسته م بنوینیت، و باریکی تر که سیستمی بیسنور بنوینیت.
2. پیکه ره به ئه م خشته یه دروستبکه و ته وای بکه لایه نه هاوشیوه و لایه نه جیاکان له نیوان سیستمی هیلی 3x3 و سیستمی هیلی 2x2 باسبکه.



5-2 راهینانهکان

راهینانی ئاراسته کراو

برپوانه نمونه 1

پێگای لابردن بۆ شیکارکردنی ههر سیستمیک به کارپێنه.

$$\begin{cases} x+2y+z=8 \\ 2x+y-z=4 \\ x+y+3z=7 \end{cases} \quad \text{3}$$

$$\begin{cases} x+2y+3z=9 \\ x+3y+2z=5 \\ x+4y-z=-5 \end{cases} \quad \text{2}$$

$$\begin{cases} -2x+y+3z=20 \\ -3x+2y+z=21 \\ 3x-2y+3z=-9 \end{cases} \quad \text{1}$$

برپوانه نمونه 2

4 کارگێری کار به پێوه به رایه تی باخچه ی ئازهلان سۆ جور کارت ده فرۆشیت بۆ مندا لان و نه وچه وانان و گه و ره کان. ئه م خشته یه فرۆشراوی کارتهکانی چوونه ناو باخچه ی ئازهلان پێشانددهات له ماوه ی 3 کاتژمێردا ئه و ناخری ههر جوره کارتیک بدۆزه وه.

چوونه ناو باخچه ی ئازهلان				
کارت	گه و ره کان	نه وچه وانان	مندا لان	ناخری فرۆشراوهکان
16:00 - 15:00	5	10	12	310 000
17:00 - 16:00	5	5	4	155 000
18:00 - 17:00	4	2	3	92 000

برپوانه نمونه 3

هه ره که له و سیستمه هیلییه نه پۆلینبکه و ژماره ی شیکارهکانی دیاریبکه.

$$\begin{cases} -2x+3y+z=15 \\ x+3y-z=-1 \\ -5x-6y+4z=-16 \end{cases} \quad \text{7}$$

$$\begin{cases} 2x+4y-5z=-10 \\ -x-2y+8z=16 \\ -2x+4y+2z=4 \end{cases} \quad \text{6}$$

$$\begin{cases} 2x+4y-2z=4 \\ -x-2y+z=4 \\ 3x+6y-3z=10 \end{cases} \quad \text{5}$$

راهبئان و شىكارکردنى پرسىارهكان

بۆ شىكارکردنى هەر سىستىمىك رېگای لابردن بهكاربئنه.

$$\begin{cases} 4x+7y-z=42 \\ -2x+2y+3z=-26 \\ 2x-3y+5z=10 \end{cases} \quad \text{10}$$

$$\begin{cases} 5x-6y+2z=21 \\ 2x+3y-3z=-9 \\ -3x+9y-4z=-24 \end{cases} \quad \text{9}$$

$$\begin{cases} 2x-y-3z=1 \\ 4x+3y+2z=-4 \\ -3x+2y+5z=-3 \end{cases} \quad \text{8}$$

11 بۆ خوڤى له پېشبركې گۆرانىبېژى ئاينده. لېژنهى ههلسهنگاندن به پېى سى پېور « بههره و وهستان لهسهر شانۆ و بهجېهئان » كه بۆ ههرىكه له پېورهكان رېژهى سهدى له ههلسهنگاندنى كۆتايى ديارىكراوه. گۆرانىبېژه كه ههلهبژيرن. ئهم خستهيهى خواروه ههلسهنگاندنى سى له پېشبركېكه رانى تېداديارىكراوه. به پېى پېوانهيهكه بۆ ههلسهنگاندنى كۆتايى زياد دهكرىت. رېژهى سهدى ههلسهنگاندنى كۆتايى بۆ ههر پېوانهيهكيان چهنده؟

پېشبركې گۆرانىبېژى ئاينده				
پېشبركېكه ران	بههره	وهستان لهسهر شانۆ	بهجېهئان	ههلسهنگاندنى كۆتايى
زانا	8	9	10	9.2
قيان	9	7	8	8.1
ئاراس	6	10	8	7.8

ههرىكه له سىستىمه هېلىيانه پۆلين بكه و ژمارهى شىكارهكانى ديارىبكه.

$$\begin{cases} -x+y+z=8 \\ 2x-2y-2z=-16 \\ 2x-y+4z=-6 \end{cases} \quad \text{14}$$

$$\begin{cases} 3x+3y+3z=4 \\ 2x-y-5z=2 \\ 5x+2y-2z=8 \end{cases} \quad \text{13}$$

$$\begin{cases} 4x-3y+z=-9 \\ -3x+2y-z=6 \\ -x+3y+2z=9 \end{cases} \quad \text{12}$$

15 نهندازه له سىگۆشهى ABC دا پېوانهى گۆشهى A دوو ئهوهندهى سهرجهى پېوانهى ههر دوو گۆشهى C و B. ههر وهها پېوانى گۆشهى B سى ئهوهندهى پېوانهى گۆشهى C. ئهوا پېوانهى ههرىكهيان چهنده؟

16 وهرزش له مېژووى يهكيتى تۆپى سهبهتهى ئامريكا (لوى داميه) يهكهم كهس بوو كۆى خاله تۆماركراوهكانى بگاته 13 726 خال كه دابهشكراوه بهسهر گۆلى سى خالى و گۆلى دوو خالى و گۆلى يهك خالىدا. دامببه 2 144 خالى له گۆلى دوو خالى زياتر لهوهى له گۆلى يهك خال تۆماركردوه. و 1 558 خالى له گۆلى يهك خالى تۆماركردوه. زياتر لهوهى له گۆلى سى خالى بهدهستهيهيناوه. چند خالى له گۆلى يهك خالى له ههر جۆرىك له جۆرهكانى گۆل تۆماركردوه.

17 بېركردنهوهى رهنهگرانه ئهم سىستىمهى خواروه له دوو هاوكېشهى سى $\begin{cases} x+2y+4z=4 \\ 2x+3y+z=12 \end{cases}$ نهزانراو پېكهاتوه.

ا چى پرودهدات كاتيك ههولى شىكارکردنى ئهم سىستىمه دهدهيت، باسبېكه

ب رونيېكهوه هۆى چيه نابيت ژمارهى هاوكېشهكانى سىستىمى هېلى كه مېترىت له ژمارهى

نهزانراوهكان. بۆ ئهوهى سىستىمهكهتهنهايهك شىكارى ههبيت.

18 بنووسه ههر پروتهختيك له نيوان سى پروتهختدا يهكترى دهبرن كه سىستىمى هاوكېشه هېلىيهكان 3×3 بهپى راستههيل دهنويت. جۆرى ئهو شىكارهى له توانادايه بۆ ئهم سىستىمه چيه؟

19 ئەم سیستمى خوارەو سى پروو بۆ ھەرپەمىكى سىيىنە دەنۆيىت (ھەر ھاوگىشەيەك پرووتەختىك دەنۆيىت) كاتىك بىنكە ھەرەمەكە دەكەوئىتە پرووتەختى پۆتانى XY پېوانەكان بەمەترە.

$$\begin{cases} x + y + z = 53 \\ 3x - 2y + z = 69 \\ -x + 2y - z = -59 \end{cases}$$

أ پۆتانى لووتكە ھەرەمەكە چەندە؟

ب ئەندازىارەكە ستوونىكى بۆ ھەرەمەكە دانا بۆ راگرتنى لوتكە ھەرەمەكە، بەرزى ئەو ستونە چەندە؟

ج پۆتانى خالى راگرى ئەستونە كە چەندە؟

نامادەكردن پۆتاتىكردنەو



$$\begin{cases} 2x + y + 3z = -1 \\ 4x + 2y + 3z = 1 \\ x - y + 4z = -6 \end{cases} \quad \text{كام خال شىكارى ئەم سیستمە دەنۆيىت.} \quad 20$$

أ (2, -2, -1) ج (2, 1, -1)

ب (0, 2, -1) د (3, -2, 2)

21 سۆزان و مىران و ساقان خوشك و بران تەمەنى سۆزان دوو ئەوئەندە تەمەنى مىرانە كە 12 سال لە تەمەنى ساقان كەمترە. پاش 5 سال تەمەنى ساقان دوو ئەوئەندە تەمەنى مىرانى لىدئە تەمەنى ھەريەكەيان چەندە؟

أ سۆزان 6 مىران 3 ساقان 15 ج سۆزان 5 مىران 10 ساقان 22

ب سۆزان 34 مىران 17 ساقان 29 د سۆزان 14 مىران 7 ساقان 19

$$\begin{cases} x + 4y = 6 \\ 2x + 3z = 12 \\ 4y + z = 10 \end{cases} \quad \text{كورتە وەلام بەھای } x \text{ چەندە لە شىكارى سیستمى} \quad 22$$

بەرەنگارى و فراوانکردن

$$\begin{cases} w + 2x + 2y + z = -2 \\ w + 3x - 2y - z = -6 \\ -2w - x + 3y + 3z = 6 \\ w + 4x + y - 2z = -14 \end{cases} \quad \text{پىگای گونجاو بۆ شىكارکردنى ئەم سیستمە بەكاربێنە.} \quad 23$$

24 نَابوری سى ھاوپى سى جۆر پارەيان: ا ، ب ، ج خستەکارمە ھەريەكەيان يەك مليون دیناری خستەکار ھەرسى جۆرەكەي تىدابوو ئەم خستەيەي خوارەو ېرى خستەکارى ھەر جۆرىك لەو پارانە پروندەكاتەو لەگەل قازانجەكەي لە كۆتايى سالد. رېژەي سەدى بۆ دەستكەوتى ھەر جۆرىك بدۆزەو.

خستەکارى پارە				
كەسەكان	ا	ب	ج	قازانج
ئازاد	300 000	300 000	400 000	56 000
نوزاد	600 000	200 000	200 000	76 000
دلسۆز	100 000	300 000	600 000	30 000

پیداچوونەوہی لولپيچى

پۆوتانى وینەي خالى (2, -3) لە ھەر راکيشانىکدا چەندە؟ (پۆلەکانى پيشوو)

25 6 يەكە بۆ لای راست، يەك يەكە بۆ سەرەو. **26** 4 يەكە بۆ لای چەپ دوو يەكە بۆ خوارەو.

27 بينا پۆوانەکانى ژوورى چيشخانە لەسەر نەخشەي خانوويەك $8\text{ cm} \times 11\text{ cm}$ پۆوانەي راستينەي چەندە؟ ئەگەر پۆوهرى نەخشەكە $1\text{ cm}:0.65\text{ m}$ بىت؟ (پۆلەکانى پيشوو)

ھەر ھاوکیشەيەك لەمانە بەشيۆه لارى - يەکتريپين بنووسە. پاشان وینەي ئەو راستەھیلە بکيشە کە دەينوینيت (پۆلەکانى پيشوو)

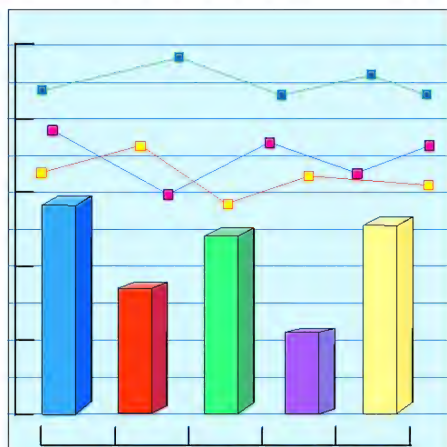
30 $2x + 5y = 15$

29 $3y - 2x = -12$

28 $4x - 3y = -6$

پيوانه ئامارييهكان

Statistical Measurements



كى نەمە بەكار دەھيئيٽ؟

ئامارناسان پيؤەرەكانى رووكردنه چەق و پيؤەرەكانى پەرتبوون بۆ شىكاركردنى پيؤراوہ ئامارييهكان بەكار دەھيئن (نموونه 2)

لە بىرت بىٽ كە ناوہندە ژميرەبى و ناوہراستە و باو لە پيؤەرەكانى رووكردنه چەقن. واتە ئەو پيوانانەيە كە باسى چەقى كۆمەلە پيؤراوہكان دەكەن.

ناوہندە ژميرى **Mean**: برىتييە لەسەر جەمى گشت بەھايەكان دابەشكرابىٽ بەسەر ژمارەى بەھايەكاندا. بە ھىماى \bar{x} دياريدەكرىٽ. باو **Mode** برىتييە لە و بەھايەى كە زۆرترين دووبارەبوونەوہى ھەبىٽ لە كۆمەلەكەدا. دەگونجىٽ كۆمەلە پيؤراوٽ زياتر لەيەك باوى ھەبىٽ و دەگونجىٽ باوى نەبىٽ. ناوہراستە **Median** ئەو بەھايەيە كە دەكەوٽە ناوہراستى بەھايەكان كاتىك پيؤكرابن بەرەو ژوور يان بەرەو ژيڤ كاتىك ژمارەى بەھايەكان تاك بىٽ، ناوہراستە دوو بەھايە دەبىٽ. لە ناوہراستدا كاتىك ژمارەيان جوت بىٽ.

دۆزينەوہى پيؤەرەكانى رووكردنه چەق

ناوہندە ژميرى و ناوہراستە و باو بۆ نەم كۆمەلە پيؤراوانە بدۆزەوہ.

{6, 4, 3, 4, 2, 5, 3, 4, 5, 2, 3, 4}

$$\bar{x} = \frac{4+3+2+5+4+3+5+2+4+3+4+6}{12} = \frac{45}{12} = 3.75$$

ناوہندە ژميرى: 3.75
ناوہراستە: 4 : 2 2 3 3 3 4 4 4 5 5 6

باو ئەو بەھايەى زۆرتر لەوانى تر دووبارە بۆتەوہ 4 واتە باو برىتييە لە 4

1. ناوہندە ژميرى و ناوہراستە و باو بۆ ھەر يەك لەم كۆمەلە پيؤراوانە بدۆزەوہ.

{2, 5, 6, 2, 6} ب

{6, 9, 3, 8} ا

ناوہندى قورسكراو **Weighted average** ئەو ناوہندەيەكە پەچاوى ھەژمارى دووبارە بوونەوہى ھەريەھايەك دەكات. وادابنى ھەلسەنگاندن بۆ 30 كتيب كرا، وەك لەم خستەيەى خواروہ روونكراتەوہ.

ھەلسەنگاندنى پەرتووك					
ھەلسەنگاندن	★ ★ ★ ★	★ ★ ★	★ ★	★	بى ئەستيرە
ژمارەى كتيب	8	12	7	2	1

$$\frac{(4)8+(3)12+(2)7+(1)2+(0)1}{8+12+7+2+1} = \frac{84}{30} = 2.8$$

ناوہندى قورسكراو بۆ ھەلسەنگاندنى كتيبەكان برىتييە لە 2.8 بە ناوہندى قورسكراوى كۆمەلەيەك لە بەھايە ژمارەى پەيدا بوو لە تاقىكردنهوہيەك دەوترىٽ بەھايە پيشبينكراو **Expected value** بۆ تاقىكردنهوہكە. بەھايە چاوپوانكراو بۆ ژمارەى ئەو ئەستيرانەى ھەر كتيبيك وەرگرىٽ كە لە نيوان 30 كتيبەكەدا بە شيوہەكى ھەرمەكى ھەلبريٽ برىتييە لە 2.8.

ئامانجەكان

- دۆزينەوہى پيؤەرەكانى رووكردنه چەق و پيؤەرەكانى پەرتبوون بە پيؤ پيؤراوہ ئامارييهكان.
- ليكۆلينەو لە كاريگەرى بەھايە پەپرگەكان (المتطرفه) لە كۆمەلە پيؤراوہكان.

زاراوەكان Vocabulary

ناوہندە ژميرەبى
قورسكراو
(المتوسط المثلل)
Weighted average

نمونە

دابەشبوونى ئەگەر
Propability Distribution

ليكنەچوون
Variance

لادانى پيوانەبى
Standard Deviation

بە ھا پەپرگەكان
Outliers

بەھا پيشبينيكراوہكان
Expected value

چوار يەك (الربع)
Quartile

دابه‌شېوونى ټگړ Probability distribution بۇ تاقىکردنه‌وه‌يکى هره‌مه‌کى برىټييه له نه‌خشه‌يک هر ټنه‌جاميکى له توانادا بوو بيه‌ستيت به ژماره‌يکه‌وه که ټگړى پرودانى هه‌يه.

نمونہ 2

دۆزينه‌وه‌ي به‌هاى پيش‌بينى‌کړاو

خشته‌ي خواره‌وه دابه‌شېوونى ټگړ بۇ ژماره‌ي ياريه‌کانى هر خوليکى جيهانى له ساله‌کانى 1923 و بۇ سالى 2004 دهنويټ. ژماره‌ي پيش‌بينى‌کړاوى ياريه‌کان له‌يه‌ک خولدا چنده؟

خوله جيهانيه‌کان				
7	6	5	4	ژماره‌ي ياريه‌کان n
$\frac{11}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{5}{27}$	ټگړى n يارى

به‌هاى پيش‌بينى‌کړاو $4\left(\frac{5}{27}\right) + 5\left(\frac{5}{27}\right) + 6\left(\frac{6}{27}\right) + 7\left(\frac{11}{27}\right)$ ناوه‌ندى ژميړى قورسکړاو به‌کارپيښه

$$= \frac{20}{27} + \frac{25}{27} + \frac{36}{27} + \frac{77}{27} = \frac{158}{27} \approx 5.85$$

ساده‌يکه

ژماره‌ي پيش‌بينى‌کړاوى ياريه‌کان له ماوه‌ي يک خول برىټييه له 5.85 يارى به‌نزيکړاو‌يې.

رؤشنایى

سهرجه‌مى هه‌موو ټگړه‌کان له هر دابه‌شېونىکى ټگړدا يه‌کسانه به 1 له نمونه 2 دداده‌بينين

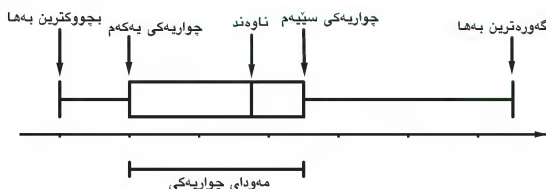
$$\frac{5}{27} + \frac{5}{27} + \frac{6}{27} + \frac{11}{27} = 1$$

2. ټم خشته‌يى خواره‌وه دابه‌شېوونى ټگړه بۇ ژماره‌يک پروداوى هاتوچو له ماوه‌ي حه‌فته‌يکه‌دا له يه‌کيک له چوار ريئانى ريگايه‌ک به پشت به‌ستن به ټماره‌کانى سالانى پيشوو. به‌هاى پيش‌بينى‌کړاو بۇ ژماره‌ي پروداوه‌کان له‌حفه‌ته‌يکه‌دا بدوژوه.



3	2	1	0	ژماره‌ي پروداوه‌کان n
0.02	0.08	0.15	0.75	ټگړى پروداوه‌کان n روداو

پوونکردنه‌وه‌ي سمپلي Box - and - Whisker - Plot ټم هيلکاريه دابه‌شکردنى کوټمه‌له پيدراوه‌کان دهنويټ، له‌م پوونکردنه‌وه‌دا 5 خالى سهره‌کى هه‌يه: گه‌وره‌ترين به‌ها و بچووکترين به‌ها، ناوه‌راسته، چواريه‌کى يه‌که‌م و چواريه‌کى سټيهم.

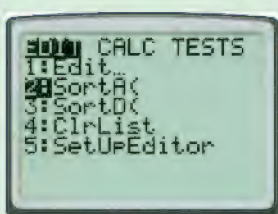


چواريه‌کى يه‌که‌م First quartile : برىټييه له ناوه‌راسته‌ي بچووکترين به‌ها له ناوه‌راسته‌ي کوټمه‌له هيلماکى Q_1

چواريه‌کى سټيهم Third quartile : برىټييه له ناوه‌راسته‌ي گه‌وره‌ترين به‌ها له ناوه‌راسته‌ي کوټمه‌له هيلماکى Q_3

مه‌وداى چواريه‌کى Interquartile range : برىټييه له جياوازى نيوان چواريه‌کى سټيهم و چواريه‌کى يه‌که‌م واته $Q_3 - Q_1$ واته 50% ي پيدراوه‌کان دهنويټ.

له خويندکاره‌وه بۇ خويندکار کيشانى پوونکردنه‌وه‌ي سمپلي



کيشانى روونکردنه‌وه‌ي سمپلي پيش ده‌ستپيکردن به پوونکردنه‌وه‌ي سمپلي. پيوسته پيدراوه‌کان پيژيکيت. پيدراوه‌کان له بژميړى پوونکردنه‌وه‌ي دابکه. به‌به‌کاره‌ينانى ليسته‌که. به پي هيلپژارندنه‌کان STAT پيدراوه‌کان به‌ره و ژور ريزيکه ده‌توانيت پروگرامى بژميړه‌ي وه EXCEL به‌کارپيښت بۇ ريزکردنى پيدراوه‌کان.

دروستکردنی پوونکردنه‌وه‌یی سمیټی و دیاریکردنی مه‌ودای چواریه‌کی

پوونکردنه‌وه‌ی سمیټی بۆ ئەمانه بکێشه و مه‌ودای چواریه‌کی بۆ ئەم پیدراوانه دیاریبکە.

{5, 3, 9, 2, 14, 6, 8, 9, 5, 8, 13, 3, 15, 7, 4, 2, 12, 8}

هه‌نگاوی 1 پیدراوه‌کان به‌ره‌و ژوور پێزیکه.

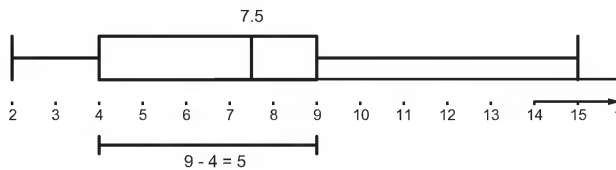
2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 12, 13, 14, 15

هه‌نگاوی 2 گه‌وره‌ترین به‌هاو بچووکترین به‌ها و ناوه‌راسته چواریه‌کی یه‌که‌م و چواریه‌کی سی‌یه‌م بدۆزه‌وه.

{2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7}, {8, 8, 8, 9, 9, 12, 13, 14, 15}

گه‌وره‌ترین به‌ها چواریه‌کی سی‌یه‌م ناوه‌راسته 7.5 چواریه‌کی یه‌که‌م بچووکترین به‌ها

هه‌نگاوی 3 دروستکردنی پوونکردنه‌وه‌ی سمیټی و یێنه‌ی ته‌وه‌ری ژماره‌کان بکێشه، پاشان خاڵێک دیاریبکە بۆ هه‌ر به‌هایه‌ک له پێنج به‌هاکه، پاشان و یێنه‌ی لاکێشه له نیوان دوو خاڵی چواریه‌کی یه‌که‌م و چواریه‌کی سی‌یه‌م. له‌گه‌ڵ پارچه راسته‌هێڵێکی ستوونی له ناوه‌راستدا. پاشان و یێنه‌ی دوو سمیټل بکه له خاڵی چواریه‌کی یه‌که‌م بۆ خاڵی بچووکترین به‌هاو له خاڵی چواریه‌کی سی‌یه‌م بۆ گه‌وره‌ترین به‌ها.



مه‌ودای چواریه‌کی: بریتیه له 5، ده‌کاته ماوه‌ی نیوان چواریه‌کی یه‌که‌م و چواریه‌کی سی‌یه‌م یان درێژی لاکێشه‌که.

3. پوونکردنه‌وه‌ی سمیټی دروستبکە و مه‌ودای چواریه‌کی بۆ ئەم کۆمه‌له پیدراوانه بدۆزه‌وه.

{13, 12, 17, 15, 12, 13, 19, 11, 14, 14, 18, 22, 23}



ده‌گونجێت دوو کۆمه‌له پیدراوی وەک {19, 20, 21} و {0, 20, 40} هه‌مان ناوه‌نده ژمیره‌یی و ناوه‌راسته‌یان هه‌بێت. له‌گه‌ڵ ئەوه‌ی به‌ ته‌واوی له‌یه‌ک جیاوازن. بۆیه ئامارناسان زۆر گرنگی به‌ په‌رتبونی پیدراوه‌کان له‌ده‌ره‌وه‌ی ناوه‌ندی ژمیره‌یی یان ناوه‌راسته‌ ده‌دن. له‌به‌ر ئەوه‌ش پێوانه‌ی نیوان بۆ ده‌ربڕینی په‌رتبونی دانا. له‌ نیوان ئەم پێوانانه‌دا مه‌ودای چواریه‌که‌کان و لیکنه‌چوون و لادانی پێوانه‌یی. لیکنه‌چوون Variance به‌هێمای σ^2 ده‌رده‌برێت. بریتیه له‌ ناوه‌ندی ژمیره‌یی دووجای دوورییه‌که‌یان له‌ نیوان ناوه‌نده ژمیره‌یی و به‌ها جیاوازه‌کان.

لادانی پێوانه‌یی Standard deviation به‌هێمای σ ده‌رده‌برێت. بریتیه له‌ په‌گی دووجای لیکنه‌چوون له‌ هه‌موو پێوانه ئامارییه‌کان به‌ سوودتरे و زیاتر به‌کارده‌هێنرێت. بچوکی به‌های لادانی پێوانه‌یی نیشانه‌یه بۆ بوونی زۆریه‌ی پیدراوه‌کان له‌ ته‌نیشته پێوانه‌کانی رووکردنه‌ چه‌ق. له‌گه‌ڵ ئەوه‌شدا گه‌وره‌یی ئەم به‌هایه نیشانه‌یه بۆ په‌رتبونی پیدراوه‌کان به‌دوورکه‌وتنه‌وه‌یان له‌و پێوانانه‌وه.



خویندنه‌وه

ئامارناسان هێمای \bar{x} (ئێکس بار) ده‌خویننه‌وه بۆ ناوه‌ندی ژمیره‌یی به‌کارده‌ین و پیتی یۆنانی σ (به‌سیگما) بیه‌خویننه‌وه بۆ لادانی پێوانه‌ی به‌کارده‌هێنن.

دۆزینه‌وه‌ی لیکنه‌چوون و لادانی پێوانه‌یی	
هه‌نگاوی 1	ناوه‌نده ژمیره‌یی بۆ پیدراوه‌کان بدۆزه‌وه.
هه‌نگاوی 2	جیاوازی نیوان ناوه‌نده ژمیره‌ی و هه‌ر پیدراویک بدۆزه‌وه پاشان دووجا‌کانیان هه‌ژماربکە.
هه‌نگاوی 3	لیکنه‌چوون σ^2 بدۆزه‌وه به‌ په‌گی ژماره ده‌ستکه‌وتنه‌وه‌کان له هه‌نگاوی 2 و دابه‌شکردنی به‌سه‌ر ژماره‌یاندا.
هه‌نگاوی 4	لادانی پێوانه‌یی به‌ هه‌ژمارکردنی په‌گی دووجای لیکنه‌چوون بدۆزه‌وه.

نمونه 4

دۆزینه‌وه‌ی ناوه‌نده ژمیریی و لادانی پیوانه‌یی

ئەم کۆمەڵە‌یه {14, 13, 16, 9, 3, 7, 11, 12, 11, 4} پۆزە‌ی مادە‌یه‌کی دیاریکراو له خۆینی نه‌خۆشیک ده‌نوینتیت له ماوه‌ی 10 پۆژدا. ناوه‌ندی ژمیریه‌ی و لادانی پیوانه‌یی بۆ ئەم پیدراوانه‌ بدۆزه‌وه‌.

هه‌نگاوی 1 ناوه‌نده ژمیریه‌یی بدۆزه‌وه‌.

$$\bar{x} = \frac{4+11+12+11+7+3+9+16+13+14}{10} = 10$$

هه‌نگاوی 2 جیاوازی نیوان ناوه‌ندی ژمیریه‌یی و هه‌ر به‌هایه‌ک بدۆزه‌وه‌ و دووجایه‌که‌ی هه‌ژماریکه‌.

14	13	16	9	3	7	11	12	11	4	نرخ‌ی x
4	3	6	-1	-7	-3	1	2	1	-6	$x - \bar{x}$
16	9	36	1	49	9	1	4	1	36	$(x - \bar{x})^2$

هه‌نگاوی 3 لکینه‌چوون بدۆزه‌وه‌.

$$\sigma^2 = \frac{36+1+4+1+9+49+1+36+9+16}{10} = 16.2$$

هه‌نگاوی 4 لادانی پیوانه‌یی بدۆزه‌وه‌

$\sigma = \sqrt{16.2} \approx 4.02$ لادانی پیوانه‌یی بریتیه‌یه له په‌گی دووجای موجه‌بی لیکنه‌چوون، ناوه‌نده ژمیریه‌یی پیدراوه‌کان ده‌کاته 10 و لادانی پیوانه‌یی ده‌کاته 4.02 به‌ نزیکه‌یی.

4. ناوه‌ندی ژمیریه‌یی و لادانی پیوانه‌یی بۆ ئەم پیدراوانه‌ی خواره‌وه‌ بدۆزه‌وه‌.
ده‌رباره‌ی ژماره‌ی جارەکانی وه‌ستانی سه‌رخه‌رێک له‌ هاتووچۆکردنه‌کانیدا



{0, 3, 1, 1, 0, 5, 1, 0, 3, 0}

به‌های په‌رگر **Quotilers** له‌ کۆمەڵه‌یه‌ک پیدراودا، ئەو به‌هایه‌ی ده‌که‌وێته‌ ده‌ره‌وه‌ی پۆسای زۆرینه‌ی به‌هایه‌کانی کۆمەڵه‌که‌وه‌. وه‌کو ئەو به‌هایه‌ی که‌ زۆر گه‌وره‌تر بێت لییان و یان زۆر بچووکتربیت لییان بوونی ئەم جوړه‌ به‌هایه‌ به‌ توندی کاریگه‌ری له‌ سه‌ر ناوه‌ندی ژمیریه‌یی و لادانی پیوانه‌یی ده‌بێت. ئەگه‌ر به‌های په‌رگر له‌ ئەنجامی هه‌له‌ پیوانه‌دا بێت، ئامارناسان خۆیان لای ده‌بن. زۆر پێگه‌ هه‌یه‌ بۆ دیاریکردنی به‌های په‌رگر. له‌ و پێگایانه‌ کاتێک به‌هایه‌که‌ سی ئه‌وه‌نده‌ی لادانی پیوانه‌یی دوور بێت له‌ ناوه‌ندی ژمیریه‌یه‌وه‌ به‌به‌های په‌رگر داده‌نرێت.

خویندنی به‌های په‌رگره‌کان

نمونه 5

ئەم کۆمەڵه‌یه‌ی خواره‌وه‌ نمره‌کانی خویندکارانی پۆلی ده‌یه‌م له‌ تاقیکردنه‌وه‌ی بېرکاری نیشان ده‌دات {51, 55, 56, 53, 56, 48, 96, 48, 54, 47, 50, 52, 57, 58, 59, 45, 55}

هه‌نگاوی 1 پیدراوه‌کان له‌ لیستی L1 بخه‌ره‌ ناو بژمیره‌ی پرونکردنه‌وه‌یه‌وه‌.

هه‌نگاوی 2 ناوه‌ندی ژمیریه‌یی و لادانی پیوانه‌یی بدۆزه‌وه‌ STAT دابگره‌. پاشان CALC هه‌لبژێره‌. پاش ئه‌و 1:1-variable دوگمه‌ی ENTER دابگره‌ له‌ شاشه‌ی به‌رامبه‌ر: ناوه‌نده

ژمیریه‌یی 55.29 به‌ نزیکه‌یی.

لادانی پیوانه‌یی: 10.92

هه‌نگاوی 3 به‌های په‌رگر دیارییکه‌ به‌دای ئەو به‌هایه‌دا بگه‌ڕێ که‌ دووره‌ له‌ ناوه‌ندی ژمیریه‌یی به‌ سی ئه‌وه‌نده‌ی لادانی پیوانه‌یی.

سی ئه‌وه‌نده‌ی لادانی پیوانه‌یی بریتیه‌یه له‌ $3 \times 10.92 = 32.76$

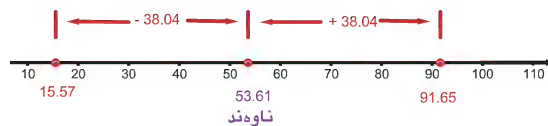
```
1-Var Stats
x=55.29411765
Σx=940
Σx²=54012
Sx=11.27921044
σx=10.94244142
n=17
```

ناوه‌نده
ژمیریه‌یی

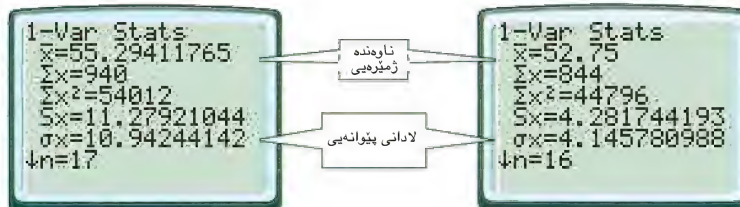
لادانی پیوانه‌یی

له‌بیرت بێت

پیدراوه‌کان له‌ بژمیریی
رونکردنه‌وه‌یی به‌ داگرته‌ی
دوگمه‌ی STAT و هه‌لبژاردنی
1:Edit ده‌بێت.



به‌های په‌رگر ئه‌و به‌هایه‌یه که زیاتره له $38.04 + 53.61 = 91.65$ یان که‌متره له $53.61 - 38.04 = 15.57$ لێره‌دا یه‌ک به‌های په‌رگرمان هه‌یه ئه‌ویش 96 هه‌نگاوی 4 به‌های په‌رگر لابه‌ بۆ دیاریکردنی کاریگه‌ری له‌سه‌ر ناوه‌ندی ژمیره‌یی و لادانی پێوانه‌یی.



بوونی به‌های په‌رگر بۆته‌ هۆی به‌رزبوونه‌وی ناوه‌ندی ژمیره‌یی له 51.11 بۆ 53.61 به‌رزبوونه‌وی لادانی پێوانه‌یی له 7.64 بۆ 12.68.

5. به‌های په‌رگر له‌ نێوان ئه‌م کۆمه‌له‌ پێدراوانه‌ دا دیاریکه‌ {3, 19, 4, 4, 2, 3} کاریگه‌ری چۆنه‌ له‌سه‌ر ناوه‌ندی ژمیره‌یی و لادانی پێوانه‌یی پوونبکه‌وه‌.



بیربکه‌وه‌ و تاوتویبکه‌

1. کاریگه‌ری زیادکردنی هه‌مان ژماره‌ بۆ هه‌ر به‌هایه‌ک له‌ کۆمه‌له‌ی پێدراوه‌کان له‌سه‌ر ناوه‌ندی ژمیره‌یی ئه‌و کۆمه‌له‌یه‌ پوونبکه‌وه‌.
2. کاریگه‌ری زیادکردنی هه‌مان ژماره‌ بۆ هه‌ر به‌هایه‌ک له‌ کۆمه‌له‌ی پێدراوه‌کان له‌سه‌ر لادانی پێوانه‌یی ئه‌و کۆمه‌له‌یه‌ پوونبکه‌وه‌.
3. کاریگه‌ری دوو ئه‌وه‌نده‌کردنی لێکنه‌چوون له‌سه‌ر لادانی پێوانه‌یی چیه‌؟
4. پێکخه‌ریه‌ هێلکارییه‌که‌ دروستبکه‌وه‌ و ته‌واویبکه‌ له‌ناو هه‌ر خانه‌یه‌ک پێناسه‌ی ئه‌وه‌ بنووسه‌ که‌ تێدا یه‌ و نمونه‌ی له‌سه‌ر بێنه‌وه‌.



راهینانی ئاراسته‌کراو

1 **زاراوه‌کان** ئه‌و پێوه‌ری پهرت‌بوونه‌ی که زۆرت‌رین به‌کار‌دێت بریتییە له _____
(لێکنه‌چوون یان لادانی پێوانه‌یی)

1 **بروانه‌ نمونه** بۆهه‌ر کۆمه‌له‌ پێدراویک ناوه‌ندی ژمێره‌یی و ناوه‌راسته و باو بدۆزه‌وه.

3 {2, 4, 4, 6, 6, 6, 7, 8}

2 {5, 7, 4, 7, 6, 7}

4 {10, 14, 18, 22, 26}

2 **بروانه‌ نمونه**

5 به‌های پێشبین‌کراوی خه‌لاته‌که‌ بدۆزه‌وه.

به‌ده‌سته‌یه‌نانی خه‌لاته‌که‌						
1 000 000	100 000	20 000	5 000	1 000	0	به‌ها
0.0001	0.001	0.003	0.01	0.05	0.9359	ئه‌گه‌ر

3 **بروانه‌ نمونه** پوون‌کردنه‌وه‌ی سمبۆلی بۆ هه‌ر کۆمه‌له‌ پێدراویک دروست‌بکه‌و مه‌ودای چواریه‌کی بدۆزه‌وه.

7 {2, 4, 1, 4, 2, 2, 7, 4}

6 {3, 5, 2, 2, 8, 9, 1, 11}

8 {33, 34, 31, 27, 22}

4 **بروانه‌ نمونه** لێکنه‌چوون و لادانی پێوانه‌یی بۆ هه‌ر کۆمه‌له‌یه‌که‌ له‌ پێدراوه‌کان بدۆزه‌وه.

10 {10, 12, 14, 15, 18, 20, 23}

9 {3, 3, 4, 5, 5}

11 {7, 14, 21, 28, 35, 42}



12 **پێوانه** مامۆستای پۆلی چوارهم داوای له‌ قوتابییه‌کان

کرد درێژی ئه‌و میزه‌ی له‌سه‌ری دانیش‌توون به‌

سانتیمه‌تر پێوانه‌ بکه‌ن. مامۆستا پێوانه‌کانی

قوتابییه‌کانی به‌م شێوه‌یه‌ تۆمار‌کرد: 48، 49، 50، 49،

48، 19، 50، 49، 48، 50، 49، 50 به‌های په‌رگر

دیاریبکه‌. پوون‌بکه‌وه‌ چۆن به‌ به‌های په‌رگر کار‌ده‌کاته‌

سه‌ر هه‌ریه‌که‌ له‌ ناوه‌ندی ژمێره‌یی و لادانی پێوانه‌یی.

5 **بروانه‌ نمونه**

راهینان و شیکاری پرسیاره‌کان

بۆ هه‌ر کۆمه‌له‌ پێدراویک ناوه‌ندی ژمێره‌یی و ناوه‌راسته و باوو بدۆزه‌وه.

16 ژماره‌ی پێشبین‌کراوی بۆ ژماره‌ی جاره‌کانی

ده‌سته‌کوتنی شێر بدۆزه‌وه.

13 {4, 16, 25, 9, 36, 49}

14 {5, 10, 15, 20, 25}

15 {1, 7, 7, 2, 3, 14, 127, 8}

هه‌لدانی سی پارچه‌ پاره‌ی کانزایی				
3	2	1	0	ژماره‌ی جاره‌کان
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	ئه‌گه‌ر

راهینانی نازاد

یۆشیکار‌کردنی سه‌یری

راهینانه‌کان نمونه‌ بکه‌

1 15-13

2 16

3 19-17

4 22-20

5 23

پوونكدنهوهى سميلى بۇ ھەر كۆمەلە پېدراويك دروستىكە و مەوداى چوارىيەكى بدۆزەوه.

17 {12, 15, 12, 6, 18, 29} 18 {2, 2, 3, 8, 2, 8, 2, 42}

19 {3, 4, 3, 1, 2}

ليكنهچوون و لادانى پيوانه يى بۇ ھەر كۆمەلە پېدراويك بدۆزەوه.

20 {4, 4, 4, 4, 5} 21 {8, 12, 30, 35, 48, 50, 62}

22 {14, 26, 40, 52}

23 تۆپى سەبەتە ئارى لە 13 يارى تۆپى سەبەتەدا بەشدارىكرد و ئەم خالانەى تۆماركرد 16، 9، 17، 17، 20، 23، 26، 27، 28، 58، 14، 17، 26، 27، 28 ناوئەندە ژميرەيى و لادانى پيوانه يى بدۆزەوه. بەھاي

پەرگەر ديارىپكە كارىگەرى لەسەر بەھاي ھەريەكە لە ناوئەندى ژميرەيى و لادانى پيوانه يى باسبە.

24 بىرى رەخنەگرانە كۆمەلە پېدراويك بنوسە كەناوئەندى ژميرەيى و ناوئەراستە لە نيوانياندا نەبىت.

25 بازاركردن ھەرىم چوو بۇ بازار بۇ كرىنى گەرمى پيويكى باش. بۇ پيوانەكردنى پلەى گەرمى ژوورەكەى لەيەككە لە دوكانەكاندا 4 گەرمى پيوى تىدابوو ئەم پلە گەرميانەبيان نيشاندەدا 8، 24، 26، 25، 26، 24، 8 كام پيوەر لە پيوەركانى پووركردنەچەق پيويستە ھەرىم بەكارىنەھيئەت بۇ ھەلپژاردنى گەرمى پيوى گونجاو.

ھەندىك لە ئامارناسان واياندا ناو كە بەھايەك لە ناو بەھاكاني كۆمەلە پېدراوكان بەھاي پەرگەر. ئەگەر كەمترىت (چوارىيەكى يەكەم - $1.5 \times$ مەوداى چارەكى) يان زياتر بىت لە (چوارەكى سىيەم + $1.5 \times$ مەوداى چوارىيەكى).

بە بۆچوونى ئەو ئامارناسانە كام بەھا لە ناو كۆمەلەكانى خوارەوه بەھاي پەرگەر؟

26 {2, 3, 4, 5, 5, 25} 27 {91, 90, 79, 15, 82, 90, 88}

28 {1, 36, 34, 33, 35, 92}

دوو پوونكدنهوهى سميلى بەرامبەر بەكاربىتە بەپيى دوو كۆمەلە پېدراوكان بۇ شيكاركردنى پرسىارەكان لە 29 بۇ 32



29 كام كۆمەلە گەورەترىن بەھاي ھەيە؟ بەچەند زياترە لە بەھا گەورەكەى كۆمەلەكەى تر.

30 كام كۆمەلە ناوئەراستەكەى گەورەترە؟ بىخەملىنە بە چەند گەورەترە لە ناوئەراستەى كۆمەلەكەى تر؟

31 مەوداى چوارىيەكى ھەر كۆمەلەيەكيان بخەملىنە.

32 كام كۆمەلەيان بچووكترىن لادانى پيوانه يى ھەيە؟ ئەمە پوونبەكەوه.

33 بەخت لە بردنەوهى خەلاتى نيو مليون دیناردا 0,01% لە كاتىكدا بەخت لە دۆراندنى ھەزار دینار كە نرخى بليتەكەيە 99, 9% بەھاي پيشينكراو بۇ قازانجەكەت چەندە؟ (يارمەتى: دوو بەھاي لە توانادا بوو. بۇ قازانجەكەت ھەيە 500 000 و -1000)

34 بەخت لە بردنەوهى خەلاتى سەد ھەزار دینار لە 10% وبەخت لە دۆرانی 2000 دینار بریتیيە لە 30% ئەگەر 60% ھەيە بۇ وەستاندن لە يارىيەكە بەھاي پيشينكراو بۇ بردنەوت چەندە؟

35 **هەلە لە شیکردنەوه** ئەمانەى خوارەوه دوو هەولدا نه بۆ دۆزینهوهى لادانى پێوانەیی بۆ پێدراوهکانى 4، 6، 8، 10 کام هەولەیان ناپاسته؟ هەلەکەى پروونیکهوه.

ب	ا
$7-4=3 \rightarrow 3$	$7-4=3 \rightarrow 9$
$7-6=1 \rightarrow 1$	$7-6=1 \rightarrow 1$
$7-8=-1 \rightarrow 1$	$7-8=-1 \rightarrow 1$
$7-10=-3 \rightarrow \frac{3}{8}$	$7-10=-3 \rightarrow \frac{9}{20}$
$8 \div 4 = 2$	$20 \div 4 = 5$
$\sqrt{2} \approx 1.4$	$\sqrt{5} \approx 2.24$

36 **بنووسه** ئایا به‌های پێشبینیکراو بۆ کۆمه‌له‌ پێدراویک هه‌میشه‌ یه‌کێکه‌ له‌و پێدراوانه‌؟ ئایا هه‌ندێک جار سه‌ریه‌و کۆمه‌له‌یه‌ یان هه‌ر سه‌ریه‌و کۆمه‌له‌یه‌ نابێت؟ به‌نموونه‌یه‌ک پالپشتی وه‌لامه‌که‌ت بکه‌.

37 یارییه‌ک بریتیه‌ له‌ هه‌لدا نه‌ی به‌ره‌زارێک و لێکدا نه‌ی دوو ژماره‌که‌ی سه‌ره‌وی دوزاره‌که‌.

- ا** به‌های پێشبینی کراوله‌ یارییه‌که‌ چهنده‌.
- ب** ئەگه‌ری ئەنجامی لێکدا نه‌ی یه‌کێک له‌ ئەنجامه‌کانی گه‌وره‌تر بێت له‌ به‌های پێشبینیکراو چهنده‌؟
- ج** ئەگه‌ری ئەنجامی لێکدا نه‌ی یه‌کێک له‌ ئەنجامه‌کانی بچووکتر بێت له‌ به‌های پێشبینیکراو چهنده‌؟
- د** ئایا وه‌لامی لقی ب و ج یه‌کسانن؟ ئەمه‌ پروونیکهوه‌.

38 ئەم خشته‌یه‌ی خواره‌وه‌ تیکرای باران بارینه‌ له‌ سالی‌دا به‌ سانتیمه‌تر له‌ 1994 تا 2003 یه‌کێک له‌ شاره‌کاندا نیشانداده‌ت.

2003	2002	2001	2000	1999	1998	1997	1996	1995	1994	سال
9.2	4.2	8.5	6.9	5.4	16.1	7.0	7.3	17.0	9.4	تیکرای

- ا** ناوه‌نده‌ ژمێریه‌ی و لادانی پێوانه‌یی بۆ ئەم پێدراوانه‌ بدۆزه‌وه‌.
- ب** له‌ کام سالانه‌دا دووری تیکرای له‌ ناوه‌ندی ژمێریه‌یه‌وه‌ له‌ لادانی پێوانه‌یی گه‌وره‌تره‌.
- ج** ناوه‌راسته‌ و مه‌ودای چواریه‌کی بۆ کۆمه‌له‌ی پێدراوه‌کان بدۆزه‌وه‌.

ئاماده‌کردن بۆ تاقیکردنه‌وه‌

39 کام له‌م کۆمه‌له‌ پێدراوانه‌ بچووکترین لادانی پێوانه‌یی هه‌یه‌.

- ا** {1, 5, 7, 50}
- ب** {100, 200, 300, 400}
- ج** {2, 10, 102, 110}
- د** {100, 101, 102, 105}
- 40** کام له‌مانه‌ی خواره‌وه‌ له‌سه‌ر ئەم دوو کۆمه‌له‌ پێدراوانه‌ {0, 48, 49, 50, 51, 52, 100} دروستنابێت {0, 1, 2, 50, 98, 99, 100}

- ا** هه‌مان ناوه‌ندی ژمێریه‌یان هه‌یه‌.
- ب** هه‌مان مه‌ودایان هه‌یه‌.
- ج** هه‌مان لێکنه‌چوونیان هه‌یه‌.
- د** هه‌مان ناوه‌راسته‌یان هه‌یه‌.

41 ناوه‌ندی ژمێریه‌ی ئەنجامه‌کانی یه‌کێک له‌ تاقیکردنه‌وه‌کان 50 بوو. کام له‌مانه‌ی خواره‌وه‌ ناگونجێت راست بێت

- ا** نیوه‌ی سفر و نیوه‌که‌ی تری سه‌د بێت.
- ب** مه‌ودای 50 بێت.
- ج** نیوه‌ی ئەنجامه‌کان 25 و نیوه‌که‌ی تری 50 بووبێت.
- د** هه‌مووی 50 بێت.

بەرەنگارى و فراوانکردن

42 كۆمەلە پېدراوېك ناوەندى ژمېرەيپەكەى 4 و ناوەرەستەكەى 3 و لادانى پېوانەيپەكەى 1.6 بېت.

ا) وايدابنى كە ھەربەھايەك لېكدانى ژمارە 5 كراو، ئايا ناوەندى ژمېرەيپەكەى كۆمەلەى نوئ چەندە؟ ناوەرەستەكەى چەندە؟ لادانى پېوانەيپەكەى چەندە؟

ب) وايدابنى ھەر بەھايەك كۆى 5 كراو. ئايا ھەريەكە لە ناوەندى ژمېرەيپەكەى و ناوەرەستە و لادانى پېوانەيپەكەى كۆمەلە نوئپەكە چەندە؟

پېداچوونەوھى لولپېچى

43 بازارگانى سارا لە يەككە لە كتېبخانە گەرەكان ئىشەكا. لە مانگېكا موچەى 725 000 دېنار

وئەدەگرېت. برى 1 750 دېنار بۆ زياد دەكرېت. بۆ ھەر كتېبېك كە بېفروشتېت. سارا 1 425 000

دېنارى لە مانگى پېشودا وەرگرت ئايا چەند كتېبى فېروشتووە؟ (پۆلەكانى پېشوو)

ئەنجامى ئەم لېكدانانە بدۆزەوھ (پۆلەكانى پېشوو)

$$44 \quad (2 - x^2)(2x^2 + 5x - 3) \quad 45 \quad 4xy^2(x^2y + 3x^2 - 2y)$$

شەشپالوئېكى ژمارەكان ھەلەرا. ئەگەرى ھەر پووداويك چەندە؟

46 دەستكەوتنى 1 يان ژمارەى جوت.

47 دەستكەوتنى 4 يان ژمارەى تاك.

48 دەستكەوتنى ژمارەيەك تواناى دابەشبوونى بەسەر 2 يان 6 دا ھەبېت.

كۆكردنەۋەي پىدراۋەكان بە شىۋەي تاقىكردنەۋە



Collecting Experimental Data

دەتوانىت تاقىكردنەۋەيەك بۇ ۋەبەرەيىنانى پىدراۋەكان و كۆكردنەۋەيان و پىكخستىيان ئەنجامبەدەيت، پاشان شىكردنەۋەيان بۇ دارشتنى رستەي بىركارى بۇ بىكەيت.

چالاقى 1

بەردەزارى شىن

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

بەردەزارى سوور

خشتەيەك دروستبىكە بۇ كۆكراۋەكانى دوو ژمارە لە ئەنجامى ھەلدانى دوو بەردەزار.

ھەۋلبدە

1 ھەر ھاۋجىبونىك لە خشتەكەدا تىيىنى دەكەيت باسبىكە

2 ئەگەرى تيورى بۇ بەدەستەيىنانى دابەشبوونى ئەگەر بەكاربىنە

سەرجم	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ئەگەرەكەي											

3 دابەشبوونى ئەگەرى پىشوو بۇ دۆزىنەۋەي بەھاي پىشبينىكراۋ بەكاربىنە.

4 كام سەرجم گەرەتەين ئەگەرى ھەيە. كام سەرجم بچوكتەين ئەگەرى ھەيە.

5 ئايا كۆمەلەي جياۋاز ھەيە لە ئەگەرە كانىاندا يەكسانبن؟ ئەگەر ھەبوو بىنۋوسە.

1 دوو بەردەزارى 36 جار ھەلبدە. ئەنجامەكانىيان لە خشتەيەكدا بىنۋوسە.

2 لەۋ ئەنجامانەي بەدەستەي ھىنانون دابەشبوونىكى ئەگەر دروستبىكە.

3 دابەشبوونى ئەگەر كە لە پرسىارى 7 دا دەستكەوتوۋە بۇ دۆزىنەۋەي بەھاي پىشبينى كراۋ بەكاربىنە.

پشت بىبەستە بەۋ تاقىكردنەۋەيەي ئەنجامت داۋە بۇ ۋەلامدانەۋەي ئەم پرسىارانە

4 كام سەرجم گەرەتەين ئەگەرى ھەيە؟ و كام سەرجم بچوكتەين ئەگەرى ھەيە.

5 ئايا كۆمەلە ھەيە لە ئەگەردا يەكسان بن؟ ئەگەر ھەبوو بىنۋوسە.

6 ئەۋ ئەنجامەي دەستكەوتوۋە لەگەل ئەنجامى تيورىدا بەراوردى بىكە.

7 ئەۋ ئەنجامەي دەستكەوتوۋە لەگەل ئەنجامى ھەريەك لە ھاۋرىكانتدا بخەرە پالپەك، بەراورد لە نىۋان ئەۋ ئەنجامانەدا بىكە، كە دۋاي يەكخستەن دەستكەوتوۋەن و لە نىۋان ئەۋەي لە ئەنجامى تاقىكردنەۋەي خۇندا دەستكەوتوۋەن بەراورد لە نىۋانىاندا و لە نىۋان ئەۋ ئەنجامە تيورىانەدا بىكە.

به‌شینه‌وه‌کانی دووانی (کراوه‌ی دووراده‌دار)

Binomial Distributions

بۆچی ئەمه فیژده‌بیت؟

ده‌توانیت به‌شکردنی دووراده‌دار بۆ دیاریکردنی به‌خت له‌ بردنه‌وه‌ی خه‌لاته‌کان. خستنه‌رووی بازرگانی به‌کاربێنیت (نموونه 3).

له‌ پۆلی ده‌یه‌م فیژی لێکدانی راده‌داره‌کان بویت لێژده‌ا فیژی باریکی تایبه‌تی ده‌بێت له‌ لێکدانی راده‌داره‌کان که بریتیه‌ له‌ کراوه‌ی هیژی راده‌داره‌ دووانیه‌کان.

ئامانجه‌کان

- سه‌لمی‌نراوی دوو راده‌دار بۆ ده‌رخستنی سنووری دوو راده‌دار و دۆزینه‌وه‌ی ئەگه‌ری دوا‌ی و تاقیکردنه‌وه‌ی بێردۆژه‌کان به‌کاربێنیت.

زاراوه‌کان

Vocabulary

سه‌لمی‌نراوی دووراده‌دار
Binomial theorem

نموونه

کراوه‌ی هیژی دوو راده‌دار

$$(x+y)^3 \text{ بکه‌وه.}$$

$$\begin{aligned} (x+y)^3 &= (x+y)(x+y)(x+y) \\ &= (x+y)(x^2 + 2xy + y^2) \\ &= x(x^2) + x(2xy) + x(y^2) + y(x^2) + y(2xy) + y(y^2) \\ &= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \end{aligned}$$

له‌سه‌ر شیوه‌ی لێکدان بنووسه
دوو هاوکۆله‌که‌یان له‌یه‌کبه‌هه.
به‌شینه‌وه
لێکدانیه‌کان به‌که
ساده‌به‌که

تاقیکردنه‌وه‌ی دووانی
Binomial experiment
ئەگه‌ری دووانی
Binomial probability

1. بکه‌وه

$$(2x-1)^3 \text{ ب}$$

$$(x+4)^4 \text{ ا}$$



هاوکۆله‌که‌کانی کراوه‌ی $(x+y)^3$ بېشکنه بریتیه له‌ ژمارانه‌ی که له‌ سه‌ر ریزه‌که‌ن له‌ په‌له 3 یه‌ له‌ سیڭۆشه‌ی باسکال

سیڭۆشه‌ی باسکال	کراوه‌ی هیژی دوو راده‌دار	
1	1	$(a+b)^0 =$
1 1	$a+b$	$(a+b)^1 =$
1 2 1	$a^2 + 2ab + b^2$	$(a+b)^2 =$
1 3 3 1	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a+b)^3 =$
1 4 6 4 1	$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	$(a+b)^4 =$
1 5 10 10 5 1	$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$	$(a+b)^5 =$

ژماره‌ی ناو هه‌ر ریزیک له‌ ریزه‌که‌نی سیڭۆشه‌ی باسکال هاوکۆله‌ی کراوه‌ی هیژی راده‌داری دووانی پیکدینیت. به‌ توانیک که یه‌کسانه به‌ په‌له‌ی ریزه‌که (تاییینی بکه‌ په‌له‌ی ریزه‌کان باسکال به‌سفر ده‌ستپێده‌کات نه‌که به‌ 1. ده‌توانین شیوه‌ی ریزه‌که‌نی باسکال ته‌واو بکه‌ین بۆ به‌ده‌سته‌یه‌نایی هاوکۆله‌که‌کانی کراوه‌ی هیژی راده‌داری دووانی. به‌هه‌ر توانیک بیت $(a+b)^n$ کاتیک n ژماره‌یه‌کی ته‌واوی سالب نه‌بیت.



کراوهی هیژی پادهداری دووانی

لهکاتی کردنهوهی $(a+b)^n$ ئەمانەت لهبیرییت.

1. ژمارهی پادهکان له کراوهی $(a+b)^n$ دا بریتییه له $n+1$ پاده.
2. هاوکۆلکهکانی کراوهی $(a+b)^n$ بریتییه له ژمارهکانی سیگۆشهی باسکال له پیزی n .
3. له پادهی یهکه مادتوانی هیژی a (n) ه پاشان یه کهم دهکات که دهچینه سهر پادهیهکی تر.
4. توانی هیژی b سفره له پادهی یهکه مدا. پاشان یه که زیاد دهکات که دهچینه سهر پادهیهکی تر.
5. کۆی توانی هیژی a و هیژی b له ههر پادهیهکا یهکسانه به n .

له خویندکارهوه بۆ خویندکار کراوهی هیژی پادهداری دووانی

1	4	6	4	1
x^4	x^3	x^2	x	
	y	y^2	y^3	y^4

هیلکارییه که بۆ کراوهی هیژی سنوورداری دووانی بهکار دینم ههروهها

$(x+y)^4$ وهک نمونه بهکار دینم له پیزی یهکه می خشتهکه دا ژمارهکانی

پیزی 4 له سیگۆشهی باسکال دهنووسم له پیزی دووهم هیژی x ی

تواناکان سهر به رهوژیر پیز دهکەین به دهستی کردن له لای چهپهوه له ریزی سییهم هیژی y

تواناکان سهر به رهوژیر پیز دهکەین له لای راستهوه دهستی که. له کۆتایی دا پادهکانی ههر ستونی که

لیکدان به بۆ و به دهستهینانی.

$$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

نموونه 2 بهکارهینانی سیگۆشهی باسکال بۆ کراوهی هیژی پادهداری دووانی

ئهم هیژی پادهداری دووانییه که بهوه.

ا $(y-3)^4$

ژمارهی پیزی 4 سیگۆشهی باسکال بنووسه 1 4 6 4 1

$$[1(y)^4(-3)^0] + [4(y)^3(-3)^1] + [6(y)^2(-3)^2] + [4(y)^1(-3)^3] + [1(y)^0(-3)^4]$$

$$y^4 - 12y^3 + 54y^2 - 108y + 81$$

ب $(4z+5)^3$

ژمارهی پیزی 3 سیگۆشهی باسکال بنووسه 1 3 3 1

$$[1(4z)^3(5)^0] + [3(4z)^2(5)^1] + [3(4z)^1(5)^2] + [1(4z)^0(5)^3]$$

$$64z^3 + 240z^2 + 300z + 125$$

2. کراوهی پادهداری دووانی ئەمانه بدۆژدوه

ج $(3x+1)^4$

ب $(x-4)^5$

ا $(x+2)^3$



له لایهکی تر په یوهندی ههیه له نیوان سیگۆشهی باسکال ژمارهی گونجینهکان.

سیگۆشهی باسکال	گونجینهکان	کراوهی هیژی پادهداری دووانی
1	${}_0C_0$	$(a+b)^0 = 1$
1 1	${}_0C_0 \quad {}_1C_1$	$(a+b)^1 = a+b$
1 2 1	${}_2C_0 \quad {}_2C_1 \quad {}_2C_2$	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
1 3 3 1	${}_3C_0 \quad {}_3C_1 \quad {}_3C_2 \quad {}_3C_3$	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

دەتوانیټ سوود لە شۆوازی خشتەیی سەرەوه وەرگری بۆ کراوی هیزی پادەداری بەبەکارهێنانی سەلمیترای دوو پادەداری.

سەلمیترای دوو پادەداری



n هەر ژمارەیهکی تەواوی نا سالیب بێت، ئەوا

$$(x+y)^n = {}_nC_0 x^n y^0 + {}_nC_1 x^{n-1} y^1 + {}_nC_2 x^{n-2} y^2 + \dots + {}_nC_{n-1} x^1 y^{n-1} + {}_nC_n x^0 y^n$$

کراوی دوو پادەدار

3 نموونه

سەلمیترای دوو پادەداری بۆکردنەوهی ئەم هیزه پادەدارە دووانیانە بەکاربێتە.

$$(x+y)^4 \quad \text{ا}$$

ژمارەیی پیزی 4 سیگۆشەیی باسکال بنووسە

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

$$\begin{aligned} (x+y)^4 &= {}_4C_0 x^4 y^0 + {}_4C_1 x^3 y^1 + {}_4C_2 x^2 y^2 + {}_4C_3 x^1 y^3 + {}_4C_4 x^0 y^4 \\ &= 1x^4 y^0 + 4x^3 y^1 + 6x^2 y^2 + 4x^1 y^3 + 1x^0 y^4 \\ &= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4 \end{aligned}$$

$$(3p+q)^3 \quad \text{ب}$$

ژمارەیی پیزی 3 سیگۆشەیی باسکال بنووسە

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$\begin{aligned} (3p+q)^3 &= {}_3C_0 (3p)^3 q^0 + {}_3C_1 (3p)^2 q^1 + {}_3C_2 (3p)^1 q^2 + {}_3C_3 (3p)^0 q^3 \\ &= 1 \times 27p^3 \times 1 + 3 \times 9p^2 q + 3 \times pq^2 + 1 \times 1q^3 \\ &= 27p^3 + 27p^2 q + 9pq^2 + q^3 \end{aligned}$$

پۆشنایی

لەکاتی کردنەوهی $(x+y)^n$ دا توانی x لە n هوه بۆ 0 کەمەکات توانای y لە 0 هوه بۆ n زیادهکات، ههروهها کۆی هەردوو توانەکان لەهەر پادەیهکدا دەکاتە n .

3. سەلمیترای کراوی دوو پادەدار بۆ کردنەوهی ئەمانە بەکاربێتە.

$$(a+2b)^3 \quad \text{ب}$$

$$(x-y)^5 \quad \text{ا}$$



تاقیکردنەوهی دووانی تاقیکردنەوهیهکی هەرمەکییه کرداری هەرمەکی تێیدا دووبارە دەبێتەوه دوو ئەنجامی لەتوانادا هیه دەرچوون یان کەوتن. ئەگەری دەرچوون P بێت لە هەر جارێکدا و ئەگەری کەوتن q بێت لە هەر جارێکدا لەبەرئەوهی کرداری هەرمەکی دوو ئەنجامی گونجایی هیه بۆیه $p+q=1$ یان $q=1-p$ ئەمەیی خواروه نمونەیه لەسەر تاقیکردنەوهی دووانی.

تاقیکردنەوه	دەرچوون	کەوتن	ئەگەری دەرچوون	ئەگەری کەوتن
هەڵدانی پارچه پارهیهکی کانزایی 10 جار	شێر	خەت	$p=0.5$	$q=0.5$
هەڵدانی بەردەزاریک سەر جار	دەستکەوتنی ژمارە 3	دەستکەوتنی جگە لە 3	$p=\frac{1}{6}$	$q=\frac{5}{6}$

وادابنی ئەگەری کەسیک چەپەوانەبێت (بەدەستی چەپ بنووسی) بریتییه لە 0.1 و تۆش ئارەزوو دەکەین دوو کەس بدۆزیتەوه لەنێوان سی کەسدا چەپەوانەبن. لێره دا C_2 پێگا هیه بر پیکهوهنانی کۆمەڵهیهک لە سی کەسدا دوو کەسیان وابن. هیماي پیتی L بەکاربێتە بۆ کەسیک چەپەوانە و پیتی R بۆ کەسیک چەپەوانە نەبێت. پێگای هەلژاردنی دوو چەپەوانە RLL , LRL , LLR ئەگەری هەریهک لەم ئەنجامانە لە توانادابن بریتییه لە $0.1 \times 0.1 \times 0.9$ ئەمەش بەره و ئەم یاسایه مان دەبات.



ئەگەرى دوۋانى

ئەگەر تاقىكرىدەنەۋىيەكى دوۋانى n جار سەربەخۇ دوۋبارە كرايەۋە، كاتىك p ئەگەرى دەرچون q ئەگەرى كەۋتن بىت لە n جاردا. ئەۋا ئەگەرى دەرچون r جار لە نۆۋان n جار برىتییە.

$$P(r) = {}_n C_r p^r q^{n-r}$$

بەم ئەگەرە دەۋوترىت ئەگەرى دوۋانى.

نمونە 4

دۆزىنەۋەى ئەگەرە دوۋانىيەكان

لەھەر 5 كەشتى كەشتىيەك لە پىرەۋى دەريايى تىپەردەبىت راستەوخۇ دەچىتە ناۋ دەرياۋە بى ئەۋەى لە بەندەرەكەۋە بىرۋات 4 كەشتى بەپىرەۋى دەريايىدا دەپۇن.

ا ئەگەرى راستەوخۇ چوونە ناۋ دەريايى تەنھا دوو كەشتى چەندە؟
ئەگەرى راستەوخۇ چوونە ناۋدەريا بۇ كەشتىيەكە برىتییە لە $\frac{1}{5} = 0.2$.

$$P(r) = {}_n C_r p^r q^{n-r} \quad n=4 \quad \text{چونكە تاقىكرىدەنەۋەكە 4 جار دوۋبارە دەبىتەۋە (4 كەشتى)}$$

$$P(2) = {}_4 C_2 p^2 q^{4-2} \quad \text{ژمارەى دەرچون } r=2 \text{ (تەنھا دوو كەشتى دەچىتە ناۋ دەريا)}$$

$$= 6(0.04)(0.64) = 0.1536$$

ئەگەرى راستەوخۇ چوونە ناۋدەريا بۇ ھەردو كەشتىيەكە لە 15.36%.

ب ئەگەرى بەلایەنى كەمەۋە دوو كەشى راستەوخۇ بچنە ناۋ دەريا چەندە؟
بەلایەنى كەمەۋە دوو كەشتى راستەوخۇ. بچنە ناۋ دەريا (ۋاتە دوو يان سى يان چوار كەشتى بچنە ناۋ دەرياۋە)

$$P(2) + P(3) + P(4)$$

$${}_4 C_2 (0.2)^2 (0.8)^{4-2} + {}_4 C_3 (0.2)^3 (0.8)^{4-3} + {}_4 C_4 (0.2)^4 (0.8)^{4-4}$$

$$0.1536 + 0.0256 + 0.0016 = 0.1808$$

ئەگەرى بەلایەنى كەمەۋە دوو كەشتى راستەوخۇ بچنە ناۋ دەريا و برىتییە لە 18.08%

4. **ا** بەرپۋەبەرى خويىندىنگايەك بۇ ھەر خويىندىكارىك مامۇستايەك لە نۆۋان سى مامۇستا بەھەرەمەكى دەستىنشان دىكات بۇ ئەۋەى بىتتە سەرچاۋەى ئەۋ خويىندىكارە لە خويىندىدا، ئەگەرى ئەۋەى مامۇستا ئومىد بىتتە سەرچاۋەى ئەۋ دوو خويىندىكارە لەۋ سى خويىندىكارەى كە تازە ھاتوون چەندە؟

ب شىرىن دەچىت بۇ ئەنجامدانى تاقىكرىدەنەۋىيەك كە ھەللىژاردنى جۇراۋجۇرى تىدایە و لە 5 پىرسىار پىكھاتوۋە، بۇ ۋەلامى ھەر پىرسىارىك چوار ھەللىژاردن ھەيە، ئەگەرى ۋەلام دانەۋەى بەشۋەيەكى راست بەلایەنى كەمەۋە بۇ دوو پىرسىار چەندە؟

جىبەجىكرىد لەسەر شىكارى پىرسىارەكان

كۆمپانىيەكى ساردەمەنى پىشانىگايەكى لەۋ شوشەۋاتەى بەرھەمى ھىناۋە بۇ كپىارەكانى كرىدەۋە ۋىتەيەكى لەسەر سەرقاپى ھەندىكىان چاپكرىدە، بۇ ئەۋ كەسەى بەخت ياۋەريەتى كۆمپانىيەكە بىرىكرىدە بۇ ھەر چوار لە شوشەۋاتەكان لەسەر يەكىكىان ۋىتەيەكى چاپكرىدە. شىژروان دەپارچە شوشەۋاتى كپى. ئەگەرى ئەۋەى بەلایەنى كەمەۋە دوو خەلاتى بۇ دەرىجىت چەندە؟



نمونە 5

1. له پرسپاره که تیځه

داواکړاو تهگړی تهووی شیروان به لایه نی که مه وه دوو خه لات بباته وه.

زانپارپیه گرنه کان دیاریبکه

• شیروان 10 شووشه ی کړیوه.

• تهگړی دووانی له بردنه وهی شووشه ی خه لات بریتیه له $\frac{1}{4} = 0.25$

2. پلاندابنی

پځای راسته وخوځو بډ شیکارکردنی پرسپاره که بریتیه له هه ژمارکردن $P(2) + P(3) + \dots + P(10)$ که چی هه ژمارکردنی تهگړی پروودای تهواوکه واده رده که ویت ئاسانتره، چونکه داوای هه ژماری $P(0) + P(1)$ دهکات له بهرته وهی پروودای تهواوکه بډ بردنه وهی به لایه نی که مه وه دوو خه لات بریتیه له بردنه وهی یه خه لات یان هیچ ناباته وه. تهگړی پروودای تهواوکه بډوژه وه له 1 ی دهریکه.

3. شیکار بکه

ههنگاوی 1 بډوژه وه

$$P(0) + P(1)$$

$$\begin{aligned} P(0) + P(1) &= {}_{10}C_0 (0.25)^0 (0.75)^{10-0} + {}_{10}C_1 (0.25)^1 (0.75)^{10-1} \\ &= 1(1)(0.75)^{10} + 10(0.25)(0.75)^9 \\ &\approx 0.0563 + 0.1877 \end{aligned}$$

ههنگاوی 2 پروودای تهواوکه به کارپینه بډ دوزینه وهی وهلام.

$$1 - 0.2440 \approx 0.7560$$

تهگړی تهووی شیروان به لایه نی که مه وه دوو خه لات بباته وه بریتیه له 0.76 به نزیکراوه یی.

4. ساغبکه وه

وهلامی گونجاو به های پیشبینی کړاو بډ بردنه وه بریتیه له $\frac{1}{4} \times 10$ له 10 واته $2.5 = \frac{10}{4}$ نزیکه له 2 که واته، تهگړی تهووی شیروان به لایه نی که مه وه دوو خه لات بباته وه له 0.5 زیاتر ده بیټ.

5. [ا] بیستون تاقیکردنه وه یه که نه انجام ددهات که هه لېژاردنی جوړاو جوړی تېدایه

و له 20 پرسپار پیکهاتووه بډ هر یه کیکان چوار وهلامی کړاو هه یه.

تهگړی تهووی به لایه نی که مه وه دوو پرسپار به راستی وهلام بداته وه چهنده؟

[ب] نامیریک جوړیک له پارچه ی یه دهکی ئوتومبیل به ره مېدنیت. تهگړی

پارچه که باش بیټ بریتیه له 98%. نامیرکه 25 پارچه ی دروستکرد

تهگړی ژماره ی پارچه باشه کان زیاتر نه بیټ له 23 پارچه چهنده؟

بیریکهوه و تاوتوییکه

1. پلهی کراوهی پادهداری $(2x+8)^7$ چهنده؟ ژمارهی پادهکانی چهنده؟
2. له تاقیکردنهوهی دووانیدا $p+q$ یهکسانه به چهند؟ وهلامهکته پروونیکهوه.
3. ئەو سی برانه چهندن که لیکانی یهکتر دهکریښ بۆ دۆزینهوهی ئەگهري دەرچوونی r جار له تاقیکردنهوهی دووانی n جار دووباره بیتهوه؟
4. ریکخهر به ئەم خشتهیه دروستبکه. شیکاری هەر پرسیاریک بکه که دهینووسیت.



تاقیکردنهوه دوانییهکان	
نموونه	ئەگەر
	ئەگهري دەرچوونی r له تاقیکردنهوهیهکا n جار دووباره بیتهوه
	ئەگهري بهلایهني کهمهوه دەرچوونی r له تاقیکردنهوهیهکا n جار دووباره بیتهوه
	ئەگهري بهلایهني زۆرهوه دەرچوونی r له تاقیکردنهوهیهکا n جار دووباره بیتهوه
	ئەگهري بهکارهینانی پروودای تهواوکه

7-2 راهینانهکان

راهینانی ئاراستهکراو

1. زاراوهکان ژمارهی ئەنجامه له توانادابوووهکانی تاقیکردنهوهیهکی دووانی بریتییه له _____؟

بروانه نمونه 1

هەر یهك له مانه به لیکان بکهوه.

$(x+2)^3$ 2 $(x+y)^4$ 3 $(x+1)^4$ 4 $(x-3y)^3$ 5

بروانه نمونه 2

هەر برهیهك له مانه به بهکارهینانی سیگۆشهی باسکال بکهوه.

$(x-2)^4$ 6 $(2x+y)^4$ 7 $(x+2y)^3$ 8 $(2x-y)^5$ 9

بروانه نمونه 3

سهلمیترای پادهداری دوانی بۆ کردنهوهی ئەم برانه بهکاربینه.

$(x+3)^4$ 10 $(3x+5)^3$ 11 $(p-2)^6$ 12 $(x+y)^6$ 13

بروانه نمونه 4

14. بهریوهبهري خویندنگایهک ویستی 6 خویندکار بۆ هاوبهشی کردنی له گرتنی وینهیهکی یادگاری بۆ خویندکارانی خویندنگاکه ههلبژێریت. ئەگهري ئەوهی لهنیوان 6 خویندکار، 4 یان وهرزشهوان بۆ چهنده؟ ئەگهري بزانیته ئەگهري خویندکاریک وهرزشهوان بیت له 30% ؟ ئەگهري ئەوهی بهلایهني کهمهوه. 4 له خویندکاران وهرزشوان بن چهنده؟

بروانه نمونه 5

15. بازارکردن بهشی شیرینی سوپهرمارکیتیک پاکهتی شوکولاتهکان پيشاندهدات له هەر 5 تابلۆ تابلۆیهکیان پسولهیهکی شاراوهی تیدایه، ئەو کپیارهی بۆی دهردهچیت تابلۆیهک به خۆرای وهردهگریت قبان 4 تابلۆی شوکولاته کپی ئەگهري ئەوهی 3 بلیت بباتهوه چهنده؟ ئەگهري ئەوهی بهلایهني کهمهوه 2 بلیت بباتهوه چهنده؟

پيشه‌سازي 16 کارگه‌یه‌ک به‌ره‌مه‌کانی له قووتوی کارتۆن دادنه‌یت، له سەر پووی سهره‌وه‌ی ههر قووتویه‌ک پولیکی تاییه‌تی چاپده‌کات. ئه‌گه‌ری بوونی پوله‌که له‌سەر ههردوو پووی سهره‌وه‌ی و خواره‌وه بریتییه له 2% باره‌ه‌لگه‌ریک 30 قووتوی کارتۆنی بارکرد ئه‌گه‌ری ئه‌وه‌ی دوو کارتۆن پولی کارگه‌که‌ی له‌سەر ههردوو پووی سهره‌وه‌ی و خواره‌وه‌ی بێت چه‌نده؟

راهیان و شیکارکردنی پرسیار

هەر بریک له‌مانه به لی‌کدان بکه‌وه.

20 $(4+y)^3$

19 $(x-y)^4$

18 $(x+\frac{1}{3})^4$

17 $(2x-2)^3$

هەر بریک له‌مانه به‌به‌کاره‌یتانی سی‌گۆشه‌ی باسکال بکه‌وه.

24 $(2x-3y)^4$

23 $(x+y)^5$

22 $(x-2)^5$

21 $(x-3y)^4$

هەر بریک له‌مانه به‌به‌کاره‌یتانی سه‌لمی‌تراوی راده‌داری دووانی بکه‌وه.

28 $(2a+3c)^3$

27 $(4+3x)^5$

26 $(2m-1)^3$

25 $(y+5)^4$

مافی شارستانی 29 راپرسییه‌ک سه‌بارت به مافی راده‌ربهرین له نیوان 100 000 هاو‌لاتیدا کرا. 83% ی راپرسیکه‌ران له‌گه‌ل ئه‌و مافه‌دابوون 8 له‌و راپرسیکه‌رانه به‌هه‌رمه‌کی هه‌لبژێران. ئه‌گه‌ری ئه‌وه‌ی به‌لایه‌نی که‌مه‌وه 6 له‌وانه له‌گه‌ل ئه‌و مافه‌ دابن چه‌نده؟

30 5 گۆ له‌ تورده‌گه‌یه‌ک یه‌ک به‌دوانی یه‌ک راکیشرا دوا‌ی گۆ‌پانه‌وه‌ی گۆیه‌که‌ له‌ هه‌موو جارێکدا. ئه‌گه‌ری ئه‌وه‌ی گۆیه‌ راکیشراوه‌که‌ ره‌ش بێت 15% یه‌ ئه‌گه‌ری ئه‌وه‌ی دوو گۆ له‌ 5 گۆی راکیشراو ره‌ش بن چه‌نده؟ ئه‌گه‌ری ئه‌وه‌ی دوو گۆ به‌لایه‌نیکه‌م له‌ نیوان 5 گۆ راکیشراوه‌که‌ ره‌ش بن چه‌نده؟

31 **چینه‌کان** ژنیکی دوو گیان چاوه‌پوانی ده‌کرد 3 مندا‌لی به‌یه‌که‌وه‌ ببی‌ت ئه‌گه‌ری ئه‌وه‌ی یه‌کیکیان کو‌پ و دوانیان کچ بێت چه‌نده؟ ئه‌گه‌ری ئه‌وه‌ی هه‌رسێ مندا‌له‌که‌ کچ بن چه‌نده؟

32 **روه‌کزانی** ئه‌گه‌ری ئه‌وه‌ی نه‌مامیک له‌ جو‌ریکی دیاریکراو و گۆل بگری‌ت 25% له‌ ئه‌گه‌ری ئه‌وه‌ی 4 نه‌مام له‌ نیوان 15 نه‌مامی له‌م جو‌ره‌ گۆل بگری‌ت. که‌ به‌هه‌رمه‌کی هه‌لبژێراون چه‌نده؟

هەر بره‌یه‌ک له‌مانه به‌به‌کاره‌یتانی سه‌لمی‌تراوی راده‌داری دووانی بکه‌وه.

36 $(p+q)^7$

35 $(4k-1)^4$

34 $(c+6)^3$

33 $(x-y)^5$

37 **گه‌شت** کۆمپانیاکانی فرۆکه‌وانی شوینی زیاتر بۆ خه‌لک ده‌گرن که‌ له‌ کورسییه‌کانی ناو فرۆکه‌که‌ زیاترن. هه‌ندیک له‌گه‌شتیاران شوین گرتنه‌که‌یان هه‌لده‌وه‌شیننه‌وه‌ له‌ دواساتدا. وای دابنی ئه‌گه‌ر ئه‌وه‌ی هه‌یچ گه‌شتیارێک شوین گرتنه‌که‌ی هه‌لنه‌وه‌شیننه‌وه‌ بریتییه له‌ 0.91 کۆمپانیاکه‌ 22 شوینی گرت له‌سەر فرۆکه‌یه‌ک که‌ 20 کورسی تێدا‌یه ئه‌گه‌ری ئه‌وه‌ی هه‌ر گه‌شتیارێک ئاماده‌بێت کورسییه‌کی ده‌ستبه‌کوه‌یت چه‌نده؟

38 **جینه‌کان** مێیه‌ی ژیشکێک 4 بێچوی بوو ئه‌گه‌ری ئه‌وه‌ی هه‌ر چواریان نێ‌ربن چه‌نده؟ ئه‌گه‌ری ئه‌وه‌ی به‌لایه‌نی که‌مه‌وه‌ سیانیان نێ‌ربن چه‌نده؟



پارچە پارەيەك 10 جاو ھەلدر، ھەريەك لەمانە بدۆزەوھ.

39 زياتر لە 7 خەت بېت 40 بەلايەنى كەمەوھ دووانيان خەت بېت 41 تەنھا 5 خەتى تېدا بېت

42 چاودېرى جۆرى يەككەك لە كارگەكان پارچەي يەدەگى ئۆتۆمبېل دروستدەكات ئەگەرى

باشى پارچەكە 95% ئەگەرى پارچە خراپەكانى ناو سندوقكەك 8 پارچەي تېدايە
لەيەك پارچە زياتر نەبېت چەندە؟

43 بژمىرى پوونكردنەوھىي بژمىرى پوونكردنەوھىي نەخشەي randBin تېدايە بۆ ليدوانى
تاقىكردنەوھى دووانى و ھەرژماركردىنى ژمارەي بارە سەرکەوتەكان بۆ لىكچوونى تاقىكردنەوھى

دوانى لە 6 n كارىكى ھەرمەكەي ئەگەرى سەرکەوتن $p=0.3$ و ژمارەي سەرکەوتەكان $r=5$
MATH دابگرە PRB ھەلېژىرە پاشان، randBin و ژمارەكە تۆمارىكە پاشان 0.3 پاشان 5
بۆشاي لە نيوان ژمارەكان دابنى. "

ا تاقىكردنەوھى ھەرمەكەي دووانى چەندبارەكەوھ لە 5 n و كارەكانى ھەرمەكەي بېت
ئەگەرى سەرکەوتن $p=0.8$ و ژمارەي سەرکەوتەكان $r=5$.

ب ياسا بۆ دۆزىنەوھى ئەگەرى سەرکەوتن بەكاربېنە.

ج بەراورد لە نيوان ھەردوو ئەنجامەكە بكە

44 ھەنگاوى جۆرا و جۆر $p=0.8$ و $n=10$ بژمىرى پوونكردنەوھىي بەكاربھيئە بۆ دۆزىنەوھى

ئەگەرى دووانى بۆ ژمارەي سەرکەوتەكان لە 0 تا 10 ھەلەمەكان بۆ نزيكترين بەش لە سەد
نزيكەكەوھ ستوونى پوونكردنەوھىيەكان دروستبەكە بۆ نيشاندانى ئەو ئەنجامەنى بەدەستتھيئاوھ،
باسى شيوەي وئەنى پوونكردنەوھىيەكە بكە پەيوەندى لە نيوان وئەنى پوونكردنەوھىي و بەھاي
پيشبينيكر او كامەيە؟

45 بيركردنەوھى رەخنەگرانە كاميان ئەگەرى زياترە: خيزانكەك لە 4 مندال دووانيان كۆر و

دووانيان كچ يان خيزانكەك لە 4 مندال سيانيان رەگەزىكە و چوارەميان رەگەزىكيتر بېت؟

46 ژمارەي پۆژە پيشبينيكر اوھەكانى باران بارين لە يەككەك لە ناوچەكان 82 پۆژە لە ساليكدا بە پشتبەستن

بە پيدراوھ ميژووييەكان. وادابنى بارينى باران لە پۆژە جياوازەكاندا پروداوى سەرەخون

ا ئەگەرى ئەوھى كە پۆژىك ھەلېژىر بەھەرمەكەي پۆژى باران بارين بېت چەندە؟

ب ئەگەرى ھەلېژاردنى 3 پۆژ لە ھەفتەيەكدا باران بباريت چەندە؟

ج ئەگەرى ھەلېژاردنى ھەرمەكەي بەلايەنى كەمەوھ 3 پۆژ لە ھەفتەيەكدا باران بباريت چەندە؟

47 تورەكەيەك 10 گۆي تيايە نيوھى سوور و نيوھەكەي ترى شينە ئوميد 3 گۆي يەك لە دوای

يەكى راکيشا بەبى گەرانەوھ و ھەر جار ك پەنگى گۆيە راکيشراوھەكەي تۆماركر ئەو

ھۆيە پوونبەكەوھ كەوا لەم تاقىكردنەوھ ھەرمەكەيە دەكات دووانى نەبېت؟

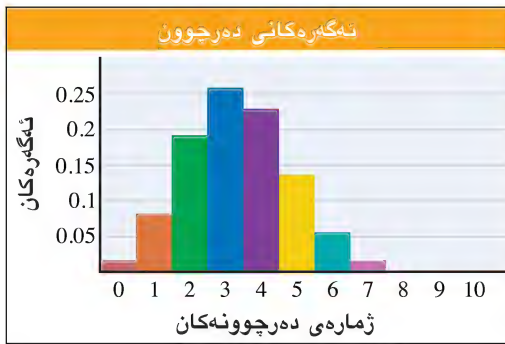
48 گەشت يەككەك لە كۆمپانياكانى فرۆكەوانى تويزىنەوھىيەكى ئەنجامدا، دەريخست 45% گەشتياران

لە كاتى سەرکەوتنيان بۆ ناو فرۆكە زياتر لە جانتايەك ھەلدەگرن. لە يەككەك لە گەشتەكاندا

ميواندارى فرۆكەكە پيشوازي لە يەكەم 5 گەشتياركر ئەگەرى ژمارەي ئەوانەي زياتر لە جانتايەك
ھەلدەگرن لە 3 كەمتر نەبېت چەندە؟

49 بنووسە بارىكى گونجاو تيدا پروداوى تەواوكر بۆ ھەژماركردىنى ئەگەرى دووانى

بەكارھاتبېت باسبەكە.



خەملاندن وېتنەى پوونكرندنەوہى بەرامبەر بەكاربېنە بۆ شىكاركردنې پرسىيارەكانى 50 و 51 وېنەكە نەگەرەكانى r سەرکەوتن لە تاقىكرندنەوہى دووانى كە كرداری ھەرەمەكى 10 جار دووبارەبېتەوہ دەنويئېت.

50 نەگەرى ژمارەى سەرکەوتنەكان زياتر نەبېت لە 2 بخەملېنە

51 بەھای نەگەرى دەرچوونى p بخەملېنە. پوونىبکەوہ چۆن وەلامەكەت دۆزىيەوہ.

نامادەكردن بۆ تاقىكرندنەوہ



- 52 كام لەمانەى خوارەوہ لە تاقىكرندنەوہى دووانىدا ھەلەيە.
- ا) ئەنجامى لە توانادا بوو دووان، سەرکەوتن يان سەرئەكەوتن
- ب) نەگەرى دەرچوون نەگۆرە.
- ج) كرداری ھەرەمەكىيەكان پېكەوہ بەستراون
- د) كرداری ھەرەمەكىيەكان ھەمان كرداری.
- 53 تاقىكرندنەوہىكى دوانى لە دووجار دووبارەبوونەوہدا لە كرداریكى ھەرەمەكى پېكەت، نەگەرى دەرچوون 40% نەگەرى يەكجار دەرچوون چەندە؟

ا) 16% ب) 36% ج) 48% د) 52%

- 54 تاقىكرندنەوہىكى دووانى لە 5 جار دووبارەبوونەوہدا كرداریكى ھەرەمەكى پېكەت، نەگەرى دەرچوون 20% كام لەمانە ھەژمارى نەگەرى 3 جار دەرچوون دەدات؟
- ا) $3(0.2)^3(0.8)^2$ ب) $10(0.2)^3(0.8)^2$ ج) $3(0.2)^2(0.8)^3$ د) $10(0.2)^2(0.8)^3$
- 55 **تەنھا وەلام** يەكێك لە كارگەكان پارچەى بژميرە ئەلىكترونئىيەكان دروستەكات. نەگەرى پارچە پەكەوتوہەكان لە 4% . 10 پارچە بەشپوہى ھەرەمەكى ھەلبژرا. نەگەرى ئەوہى كە لە نئوانياندا لەيەك پارچەى پەكەوتو زياتر نەبېت چەندە؟ وەلامەكەت بۆ نزيكترين پژدەى سەدى تەواو نزيكەوہ.
- 56 **كورتە وەلام** 18.8% دانىشتوانى وولاتيێك ھەلگەرى يەكێك لەو 100 ناوہى كە باون بە شپوہىكى ھەرەمەكى 10 كەس ھەلبژيرە نەگەرى 3 كەس لەوانە كە ناويكيان ھەبېت لەو ناوانە چەندە؟

بەرەنگارى و فراوانكردن

- 57 **جىنەكان** نەگەرى ئەوہى يەكێك چەپەوانەبېت 0.1 ھۆليێك 650 كەسى تېدايە
- ا) ژمارەى پېشبينىكرائى كە سەچەپەوانەكانى ناو ھۆلەكە چەندە؟ ئەمە پوونبەكرەوہ.
- ب) لادانى پئوانەيى بۆ تاقىكرندنەوہىكى دووانى پېكەتوہ لە دووبارەبوونەوہى كرداریكى ھەرەمەكى n بەكارھيئەت $\sigma = \sqrt{npq}$ ھەژماربە. بەھای لادانى پئوانەيى بدۆزەرەوہ؟
- 58 ھەريەك لەم دوو نەگەرە بدۆزەرەوہ و ديارىبەكە كاميان گەورەترە.
- ا) دەستكەوتنى ژمارە 1 بەلایەنى كەمەوہ يەكجار لە ھەلئەلانى بەردە زاريك 6 جار.
- ب) دەستكەوتنى ژمارە 1 بەلایەنى كەمەوہ دووجار لە ھەلئەلانى بەردە زاريك 12 جار.

59 دياريكه كام ژماره C_{r+1}^{n+1} له سيگوشه ي باسكال دا يهكسانه به سرجه مي نهو دوو ژماره يه ي به C_r^n دهوره دراون، كاتيک $n > 1$ و $r \neq 0$.

60 بولینگ نهگهري پيکاني ياريزانيکي بولینگ له دوو جار هه لانداندا يه کجار 40% بيت

ا هاوکيشه ي هه ژمارکردني p بنووسه و پاشان شيکاربکه.

ج نهگهري پيکاني ياريزانه که له هه ردو هه لاندانه که دا چهنده؟

پیداچونه وهی لولپيچی

هه ژماره ي هه ريه که له مانه بکه $f(-3)$ ، $f(0)$ ، $f(2)$ (پوله کاني پيشوو)

$$f(x) = -x^2 + 2x - 4 \quad 61 \quad f(x) = (-x)^2 - 3x + 1 \quad 62$$

نهگهري y نه خشه يه کی تواني بيت به پي x دياربکه. نهگهري ودها بوو بژمي ري روونکردنه وه يي به کاربهنه بو دوزينه وه ي نه خشه يه کی تواني که پيدراو دکاني نه خسته يه بنوينيت.

x	1	2	3	4	5
y	1.4	2.6	3.8	5.0	6.2

63

x	1	2	3	4	5
y	10	22	36	52	70

64

ناوهنده ژمي ري و ناوهراسنه و باو بو هر کو مه له يه که له پيدراو دکان بدوزنه وه (وانه ي 6-2)

$$\{6, 13, 9, 7, 6, 4\} \quad 66 \quad \{2, 18, 15, 14, 18\} \quad 65$$

$$\{10, 5, 15, 5, 8\} \quad 68 \quad \{24, 20, 32, 24, 16, 34\} \quad 67$$

رېبەرى خويندن: پىداچوونەو

سىستىمى لاسەنگە ھىلىيەكان بە پوونكردەوھى شىكارىكە

$$\begin{cases} y-3x < 3 \\ 3y \geq x+3 \end{cases} \quad \begin{cases} y+1 > 4x \\ y \leq x+1 \end{cases}$$

سىستىمى لاسەنگە ھىلىيەكان بە پوونكردەوھى شىكارىكە، ناوچەى شىكارەكە چى دەنۆينىت ديارىبەكە.

$$\begin{cases} y \geq 2x \\ y < 4 \\ y > 2 \\ y \leq \frac{1}{2}x+4 \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq -x+2 \\ x > -1 \\ y > -1 \end{cases}$$

14 كارگىرى كار خاوەن دوكانىكى قاوھ فرۆش ئارەزو دەكات تىكەلېكى لە دوو جور قاوھ ئامادە بكات كە لە 120 كىلوگرام زياتر نەبىت، نرخى ھەر كىلوگرامى 10000 دىنار كەمترە، بۇ ئەو مەبەستە جورىكيان نرخى يەك كىلوگرامى 8000 دىنار و جورەكەى تر نرخەكەى 11500 دىنار بوو. سىستىمى لاسەنگەكان بنووسە. كە ئەو برانەى بەكار ھاتوو لە دوو جورەكە دەربخات. پاشان سىستەمەكە بە پوونكردەوھى شىكارىكە.

15 يەككە لە دوكانەكان بابۆلەى گەرم و سارد پىشكەش دەكات. ئەم خشتەيە پىدراوھەكانى بابۆلەكان دەنۆينىت كە دوكانەكە فرۆشتوھەى ژمارەى ئەو بابۆلەنى دوكانەكە دەيفرۆشئ لە 125 تىپەرنەكات لە ھەردوو جورەكە. دوكانەكە 750 دىنار قازانج دەكات لە بابۆلەيەكى سارد و 1000 دىنار لە بابۆلەى گەرم. چەند بابۆلە لە ھەر جورىك پىويستە دوكانەكە بيفرۆشئ بۆ بە دەستھيئانى ئەو پەرى قازانجى لە توانادابوو؟

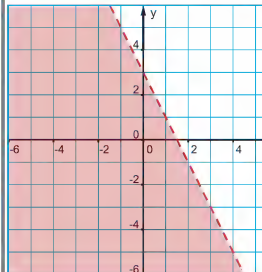
بابۆلە فرۆشراوھەكان	نەمترىن پادە	بەرزترىن پادە
سارد	60	80
گەرم	40	60

بە شىوھى پوونكردەوھى ناوچەى گونجاو ديارىبەكە.

$$\begin{cases} y < 3 \\ y \geq 0 \\ y < 2x+1 \\ y \leq -x+4 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 3x+1 \\ y \leq -\frac{3}{4}x+6 \end{cases}$$

ئەم لاسەنگەكانى خواروھ بە پوونكردەوھى شىكارىكە

$$\begin{aligned} y &\leq x+3 & y &> -3 \\ 6x-2y &> 8 & 2x+4y &> -12 \end{aligned}$$



5 لاسەنگەيەك بە دوونەزانراو بنووسە بەمەرجىك وئەنى بەرامبەر بېتە شىكارى پوونكردەوھى لاسەنگەكە بەرپۆھبەرايەتى يەككە لە مۆزەخانەكان دوو جور بلىتى چوونە ژوورەوھ

دەفرۆشئ. بلىتىكيان بۆ يەك پۆژ نرخەكەى 12 000 دىنارە و بلىتەكەى تر بۆ دوو پۆژە ونرخەكەى 21 000 دىنارە. لە يەك پۆژدا بايى زياتر لە 2 520 000 دىنار بلىتى چوونە ژوورەوھ فرۆشرا لاسەنگەكە بنووسەوھ بە روون كردەوھى شىكارى بكة.

7 ئەو خالە پوونكردەوھىيانە دابنى كە پىدراوھەكانى خشتەكە دەنۆينىت ھاوكلەكى پەيوەستى و ھاوكلەشى راستەھىلى باشتري نواندن بدۆزەوھ.

x	2	5	9	13	16
y	8	10	24	16	29

8 ئەم خشتەى خواروھ پىدراوى داھاتى سالانەى ھەندىك كەسە، و بەھاي ئەو خانووەيەكە ھەيانە.

داھاتى سالانە (بەمليۇن دىنار)	بەھاي خانووەكەى (بەمليۇن دىنار)
96.5	130.2
46.3	94.5
56.7	115.5
65.2	106.4
54.7	98.6
59.6	115.5

ا ئەم پىدراوانە بە شىوھى پوونكردەوھ بنوئە، داھات وەك گۆراوئىكى ئازاد بەكاربئە.

ب ھاوكلەكى پەيوەستى r و راستەھىلى باشتري نواندن بدۆزەوھ

9 فرۆشراوى دوو لقى يەككە لە كۆگا گەورەكان گەيشتە 12 مليار دىنار، ھاوبەشى يەككە لە لقەكان بەلايەنى كەمەوھ 75% كۆى فرۆشراوھەكان بوو سىستىمى لاسەنگەى ھىلى بنووسە و بە شىوھى پوونكردەوھى شىكارىبەكە بۆ ديارىكردى فرۆشراوى لە توانادابوو ھەر لقيك.

ناوهندى ژميرى و ناوهدراسته و باو بۇ ھەريەكە لەم پيڊراوانە بدۆزەو.

$$6, 8, 0, 8, 5 \quad 30$$

$$12, 15, 13, 13, 15, 12 \quad 31$$

ئەم نەخشەيە دابەشبوونى ئەگەر بۇ ژمارەى پوداوەکانى پوژانەى شارىكى بچووك دەنوئىت. ژمارەى پوداوى چاوەوانكراو لە پوژىكا بدۆزەو

ژمارەى پوداوەکانى n	0	1	2	3
نەگەرى n پوداوى	0.65	0.22	0.1	0.03

پوونکردنەوى سميلى دروستبەكە بۇ ئەم كۆمەلە پيڊراوانە پاشان مەوداى چوارىەكى ديارىبەكە:
71, 50, 29, 83, 48, 65, 52, 33

ژمارەى ئەو پيشپرکيانەى يەكەك لە شۆفيري ئۆتۆمبيلەکانى وەرژش تپيدا براوہيە لە ھەر ساليك لە ساليەکانى 10 سالي پابردوو بریتیە لە 5, 7, 4, 11, 8, 10, 6, 9, 7... ژمارەى ئەو پيشپرکيانەى كە دووربەكەى لە ناوئەندە ژميرەكەى لە لادانى پيوانەكەى لەيەك زياتر نايت بدۆزەو.

خويندکارانى پولى كوتايى تاقىکردنەوى وەرگرتنيان لە زانكو ئەنجامدا. ناوئەندى ژميرى نمرەکانيان 81.3 بوو و لادانى پيوانەى 4.4 بوو، كاوه، 96 نمرەى لە 100 بەدەستھيئاو. ئايا نمرەكەى بەھاي پەرگەر؟

ئەگەر نمرەکانى نەشميل لە 6 تاقىکردنەوى بەم شيوەبەيت. 73, 88, 86, 90, 87, 29 ئەوا لادانى نيوانەى و لادانى پيوانەى بۇ ئەم پيڊراوانە بدۆزەو ئەگەر نمرەكەى لە تاقىکردنەوى ھوتەم 32 بيت كاريگەرى ئەم نمرەيە پوونبەكەو لە سەر ھەردو لادانى نيوانەى و پيوانەى.

سەلميتراوى كراوى دوو پادەدار بۇ كرنەوى ئەوانە بەكاربیتە

$$(x-2y)^4 \quad 38 \quad (5+2x)^3 \quad 37$$

سەردار گولكەرى تپيى توپى پيە ئەگەرى پيكانى گول لە ليدانى سەربەخو بریتیە لە 0.65 سەردار 57 ليدانى سەربەخو جيبەجیكر ژمارەى پيشبينىكراو بۇ پيكانى گول لە ليدانەکانيدا بدۆزەو، لادانى پيوانەى بدۆزەو؟

$$\begin{cases} y \leq 2 \\ y \geq -1 \\ y \geq -1 \\ y \leq -x+3 \end{cases} \quad 19 \quad \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ y > \frac{1}{2}x-6 \end{cases} \quad 18$$

ئەو پەرى بەھاي نەخشەى بە سووى $p = 6x + 10y$ چەندە؟ مەرجهکانى پاهيئانى 16 ساغەكاتەو.

ئەو پەرى بەھاي نەخشەى بە سووى $p = 14x + 9y$ چەندە؟ مەرجهکانى پاهيئانى 17 ساغەكاتەو.

يەكەك لەكارگەكان دوو جوړە پيلاو دروست دەكات لە جوړى ئەستور كە دروستكردى 6 خولەكى دەوئ و برى 8000 دينار قازانچ دەكات و جوړى تەك دروستكردى 4 خولەكى دەوئ و 9000 دينار قازانچ دەكات. توپى بەرھەمھيئان لە توانيدا ھەيە 12 كاتژمير ئيش بكات يان 750 خولەك بەپي پيداويستىيەكانى بازار كارگەكە پيلاوى ئەستور بەلایەنى كەمەو دوو ئەوئەندە پيلاوى تەك دروست دەكات

ئەو بەرنامە ھيلىيە بنووسە كە ئەم پرسيارە دەنوئىت و بەپوونکردنەوى ناوچەى گونجاو ديارىبەكە.

نەخشەى بەسوود بنووسە. 23

زۆرتري قازانچ لە تواناداييت كە كارگەكە لە پوژىكا دەستى بكەوئ چەندە؟ 24

فرۆشراوہكان دوكانى موبایل لە نيوان 10 تا 52 موبایل لەگەل بەليني چاكردنەو دەفرۆشيت و لەنيوان 5 تا 10 موبایل بەبى بەلین دەفرۆشيت كوى فرۆشراوہكان لە 30 موبایل تپەرناكات لە پوژىكا دوكانەكە 35000 دينار بۇ ھەر موبايلىك لەگەل بەلیندا قازانچ دەكات. و برى 5000 دينار قازانچ دەكات بۇ ھەر موبايلىك بەبى بەلین بيفرۆشيت. پيوستە دوكانەكە چەند موبایل لە ھەر جوړىك بفرۆشيت بۆبە دەستھيئانى ئەو پەرى قازانجى لە توانادابو؟ 25

ريگەى لابردي بۇ شيكاركردى ھەريەك لەم سيستمەنە بەكاربیتە؟

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y-z=-1 \\ 3x-y=4 \end{cases} \quad 27 \quad \begin{cases} x+3y+2z=13 \\ 2x+2y-z=2 \\ x-2y-3z=-12 \end{cases} \quad 26$$

پوليى ئەم سيستمەنە بكە و ژمارەى شيكارەكانى ديارىبەكە

$$\begin{cases} -x-y+2z=-3 \\ 4x+4y-8z=12 \\ 2x+y-3z=-2 \end{cases} \quad 29 \quad \begin{cases} x+y+z=-2 \\ -x+2y-5z=4 \\ 3x+3y+3z=5 \end{cases} \quad 28$$

تاقىکردنەۋەى بەش

6 بچوكتىرىن بەھا بۇ نەخشەى بەسوود $P = 5x + 9y$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 2x + 1 \\ y \leq -3x + 6 \end{cases}$$

مەرجهكان

پۇلىنى سىستىمى ھىلى بىكەو بە پىگى لابرېن سىستىمى دىارىكاراۋ شىكارىكە

$$\begin{cases} 3x - y - z = -1 \\ x + y + 2z = 8 \\ 6x - 2y - 2z = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + z = -2 \\ 4x - y + 2z = -3 \\ 2x - 3y + 2z = -7 \end{cases}$$

ئەم خىشتەيەى خوارەۋە ژمارەى مانگەكانى ھەر ھەسارەىكە لە سىستىمى پۇژى پىشان دەدات.

ھەسارەكە	ژمارەى مانگەكان
عەتارد	0
زۈھرە	0
زەۋى	1
مەرىخ	2
موشىرى	63
زۈھەل	33
ئۇرانۇس	27
نېپتۇن	13
پلۇتۇ	1

9 ئايا بەھى 63 بەھىكەى پەپرگە؟ ئەو پۈونىكەۋە.

10 ھەژمارى ناۋەندى ژمىرى و ناۋەپراستە و باو و لادانى پىۋانەىى ئەم كۆمەلە پىدراۋانە بىكە: بەھى پەپرگ لەو كۆمەلەىە دىارىكە. باسى بىكە چۇن بەھى پەپرگ كاردەكاتە سەر ناۋەندە ژمىرىى و لادانى پىۋانەىى. 90, 114, 99, 128, 111, 12, 95, 98, 103, 110, 107, 93

11 پادەدارى دوۋانى $(3x + 4)^4$ بىكەۋە.

ئەگەرى بىردنەۋە لە يەككە لە يارىيەكاندا برىتتىيە لە ناۋىتەكردنى 15% ھۇشيار 10 جار يارىكرد.

12 ئەگەرى بىردنەۋەى دوو جار بدۇزەۋە

13 ئەگەرى بىردنەۋەى بەلەيەنى كەمەۋە دوو جار بدۇزەۋە

1 يانەى دھۆك كراس و كلاًو كە دروشمى يانەكەى

لەسەر نەخشىكاراۋە دەفرۇشپىت بۇ ئەۋەى بەلەيەنى كەمەۋە 2 400 000 دىنار كۆپكاتەۋە. نرخی ھەر كراسىك 15 000 دىنار و نرخی كلاًۋىك 8 000 دىنارە لاسەنگەيەك بنووسە ژمارەى كلاًۋەكان و كراسەكان كە پىۋىستە يانەكە بىفرۇشپىت بنوئىت، لاسەنگەكە بە پۈونىكردنەۋەىى شىكارىكە.

2 تىپىك لە توپۇژەۋەران ھەستان بە توپۇژىنەۋەيەك لەسەر نەخشەكان، لە خىشتەيەكدا پىدراۋەكانى ژمارەى قەرەۋىلەكان و ژمارەى كارگوزارانى خەستەخانەكەيان تۆماركرد

ژمارەى قەرەۋىلەكان	ژمارەى كارمەندان
23	69
29	95
35	118
42	126
46	123
54	178
64	156
76	176

ا پىدراۋەكانى خىشتەكە بە پۈونىكردنەۋەىى بنوئە ژمارەى قەرەۋىلەكان بە گۇپاۋى ئازاد دابنى.

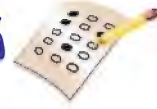
ب ھاۋكۆلكەى پەيۋەستى و ھاۋكۆشەى ئەو پاستەھىلەى باشتىرىن نواندن بدۇزەۋە. وئەى پاستەھىلەكە و خالەكانى بەپۈونىكردنەۋەىى بىكەشە ژمارەى ئەو قەرەۋىلەكانى ئەو نەخشەكانىيەى كە 80 كەس ئىشى تبادەكات بىخەملىنە.

ئەم سىستىمى لاسەنگانە بە پۈونىكردنەۋەىى شىكارىكە.

$$\begin{cases} y + x \geq 3 \\ y - 4 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y - 4x \geq 4 \\ y - x \geq 1 \end{cases}$$

5 كىمىا يەككە لە كىمىازانان ئىش لەسەر ناۋىتەيەكى 250 ml، كە بەلەيەنى زۆرە سوپرىيەكەى 18% بە بەكارھىنەنى دوو گىراۋە سوپرىيە يەكەم 9% و سوپرىيە دوۋەم 24%. سىستىمى لاسەنگەكان بنووسە شىكارى بىكە بۇ دۇزىنەۋەى ئەو برەى كە پىۋىستە لە ھەرىكە لە دوو گىراۋەكە بەكارىبھىننىت.

تاقىردنەۋەى كەلەكەبوو



7 تېچوونى بەكرى گرتنى ئۆتۈمبىلەك 39 950 دىنارە، لەگەل زىادكردى 400 دىنار بۆ ھەر كىلۇمەترىك كە ئۆتۈمبىلەك كە دەيىرپىت. كام لەمانەى خوارەوہ باشترین پەيوەندى دەنۆينىت لە نيوان تېچوون C و ژمارەى كىلۇمەترى براو k .

- (أ) $C = 39\,950 + 400$
 (ب) $C = 39\,950k + 400$
 (ج) $C = 39\,950 + 400k$
 (د) $C = 39\,950k + 400k$

8 خالەكانى يەكترېرىنى پووتەختى $2x + y - 5z = 20$ لەگەل تەۋەرەكانى بۆشايى پۆوتانەكاندا چەندە؟

- (أ) $z = 0, y = 0, x = 0$
 (ب) $z = -5, y = 1, x = 2$
 (ج) $z = -4, y = 20, x = 10$
 (د) $z = 4, y = 20, x = 10$

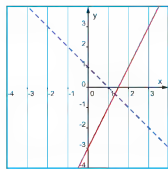
9 سەرەكانى ناۋچەى گونجاو برىتېيە لەخالى (0,0) $(-2,6) (-1,1) (3,-1) (-5,-5)$ گەرەترین بەھاي تەخشەى بەسوود بۆ $P = 4x - y$ لە ناۋچەيدا چەندە؟

- (أ) 0 (ب) 7 (ج) 13 (د) 25

10 مالى پۆقەند 660 km دوورە لە زانكۆكەيەۋە ئەگەر پۆقەند ئۆتۈمبىلەكەى بە خىرايەكى نەگۆر 90 km/h لىخورىت پىويستى بە 8 كاتزمىر ھەيە بەنزىكى. كام لەم نەخشەنى خوارەوہ ژمارەى ئەو كىلۇمەترانە دەنۆينىت كە برىويەتى لەدوايى x كاتزمىر لە دەرچوون لە مالەكەى.

- (أ) $f(x) = 660 - 90x$ (ب) $f(x) = 660 + 90x$
 (ج) $f(x) = 660 - 80x$ (د) $f(x) = 90x$

11 كام لەم سىستىمى لاسەنگانە ئەم ناۋچە شىكارەى ھەيە؟

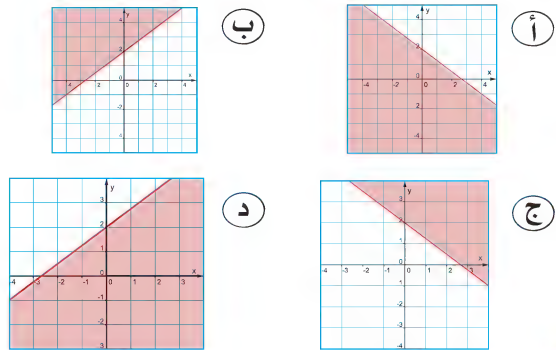


- (أ) $\begin{cases} y \leq 2x - 3 \\ y \geq -x + 1 \end{cases}$ (ب) $\begin{cases} y \leq 2x - 3 \\ y > -x + 1 \end{cases}$
 (ج) $\begin{cases} y < 2x - 3 \\ y > -x + 1 \end{cases}$ (د) $\begin{cases} y \geq 2x - 3 \\ y < -x + 1 \end{cases}$

1 كام لەمانەى خوارەوہ ھاۋكېشەى ئەو راستەھىلە دەنۆينىت كە بەخالى $(-2, 7)$ دا دەرۋات و لارىيەكەى ؟

- (أ) $y = -3x - 1$ (ب) $y = -3x + 1$
 (ج) $y = -3x + 13$ (د) $y = -\frac{1}{3}x + 1$

2 كام لەمانەى خوارەوہ ناۋچەى شىكارى لاسەنگەى $y + \frac{3}{4}x \geq 2$ دەنۆينىت؟



3 كام لەم كۆمەلە ژمارانەى خوارەوہ 3-دانەنيە تىيدا؟

- (أ) تەۋاۋەكان (ب) راستىيەكان
 (ج) پىژەيەكان (د) سروشتيەكان

4 برى $4\sqrt{50} + 3\sqrt{72}$ بەسادەترین شۆۋە بنووسە

- (أ) $4\sqrt{7}$ (ب) $7\sqrt{112}$
 (ج) $12\sqrt{5}$ (د) $38\sqrt{2}$

5 لارى راستەھىللى $-3y = 6x + 12$ چەندە؟

- (أ) -4 (ب) -2 (ج) $-\frac{1}{2}$ (د) $-\frac{1}{4}$

6 ئەم خشتەيەى خوارەوہ پىدراۋى كرى پۆژانەى كرىكارەكانى يەككە لە كۆمپانىكان بە پىي سالانى شارەزايبان پووندەكاتەۋە. كام لەمانە بەھايەكى گونجاو بۆ لارى راستەھىللى زۆرتىن نواندن؟

ژمارەى سالانى شارەزايبى	كرى بەدينار
0	33 407
2	34 273
5	37 882
8	40 185
10	42 977
12	45 864
15	53 811

- (أ) 450 (ب) 750 (ج) 1275 (د) 2650

بەشى 2 سىستىمى ھاۋكېشە و لاسەنگە ھىللىيەكان

12 كام لەم سىستىمە ھۆلىيانەى خوارەو سىستىمىكى ديارىكراو

$$\begin{cases} 2y + 7x = 24 \\ 5y - 6 = -4x \end{cases} \text{ (ب)} \quad \begin{cases} 2y + 3x = -8 \\ 9x = -24 - 6y \end{cases} \text{ (ا)} \\ \begin{cases} 2y = 3x - 6 \\ 8y - 12x = 80 \end{cases} \text{ (د)} \quad \begin{cases} y = -x + 4 \\ 3y + 3x = -21 \end{cases} \text{ (ج)}$$

كورتە وەلام

13 لەكاتى ھەژمارکردنى كۆ نمرەكانى پالىئوراويك لە تاقىکردنەوھەكاندا كە لە كۆلىچىك وەرېگىرئ نمرەى زانست لىكدانى 2 و نمرەى بىركارى لىكدانى 3 نمرەى زىندەزانى لىكدانى 4 دەرئىت بەلام ئەم نمرەى لە زمان وەرېگرتووە لىكدانى ھىچ ھاوئۆلەھەكە ناكريت. نمرەكان شىرزاد 49 لە زمان و 32 لە زانست و 20 لە بىركارى كۆى خالەكانى 411 بوو. ئايا نمرەكەى لە زىندەزانى چەندە؟

14 بچوكتىرئىن ژمارەى تەواوى مەجبەب كە شىكارى ئەم لاسەنگەھە دەكات بدۆزەو. $\frac{|430-3x|}{3} > 816$

15 ھەلۆ 3 پارچە پىتزاو 8 شلىكى خوارد 975 گەرمۆكەى گەرمى وەرگرت كەچى بلىند 950 گەرمۆكەى گەرمى وەرگرت پاش خواردنى 4 پىتزاو 6 شلىك ئايا چەند گەرمۆكە گەرمى لە پارچە پىتزا كە ھەھە؟

كورتە وەلام

16 كۆمەلەھەكە لە سەردانكەرانى باخچەى ئازەلان 4 بلىتى چوونە ژوورى گەورە و 5 بلىتى منداالانىان كپرى 68 000 دىنارىاندا، كۆمەلەھەكەى تر 216000 دىنارىان بۆ نرخی 12 بلىتى گەورە و 17 بلىتى منداالاندا

ا سىستىمى ھاوئۆلەھەكان بنووسە كە ئەم پرسیارە بنوئىت

ب ئەم سىستىمە بە پروونكردنەوھەى شىكارىكە.

ج سىستىمەكەبە پىگایەكى ترشكار كە ھۆى ئەو پروونىكەو كە ئەو پىگای بەكارتەپناوہ باشتەرە لە پىگای پروونكردنەوھەى نرخی بلىت لە ھەر جۆرىك چەندە؟

17 خالى B وئەنى خالى A(3,4) بە وئەندەنەوہ بەدەورى تەوہرى يەكەم.

ا پۆتانی خالى B چەندە؟

ب خالى C وئەنى خالى B بە پاكىشانى 3 يەكە بۆ لای چەپ و دووریكە بۆ خوارەو پۆتانی خالى C چەندە؟

18 نەخشەى $g(x)$ نەخشەىەكى پەیدا بوو لە گۆرانى نەخشەى $f(x) = 4x - 3$ بە پاكىشانى بۆ خوارەو بەبېرى 5 يەكە.

ا ھاوئۆلەھەكەى نەخشەى $g(x)$ بنووسە.

ب ھاوئۆلەھەكەى نەخشەى $h(x)$ بنووسە كە پەیدا بوو لە ئەنجامى گۆرانى $g(x)$ بە وئەندەنەوہى بەدەورى تەوہرى يەكەم.

وہلامى درىژ

19 لە كارگەى پەردە 820 پاكەت دەزووى لۆكەى 1250 پاكەت دەزووى نایلون ھەيە. بۆ دروستکردنى پەردەيەكى ھەرزان 18 پاكەت دەزووى لۆكەى پۆيوستە. بەلام دروستکردنى پەردەيەكى باش 32 پاكەت دەزووى نایلون پۆيوستە بەلام بۆ دروستکردنى جۆرىكى باش 36 پاكەت دەزووى لۆكە و 28 پاكەت دەزووى نایلون پۆيوستە.

ا مەرچەكانى پرسىارەكە بنووسە.

ب وئەنى ناوچەى گونجاو بكىشە سەرەكانى ديارىكە.

ج كارگەكە 170 000 دىنار بۆ پەردەى ھەرزان و 190 000 دىنار بۆ پەردەى باش قازانج دەكا نەخشەى بە سوود بنووسە.

د چەند پەردە پۆيوستە كارگەكە لە ھەر جۆرىك دروستى بكات تا ئەو پەرى قازانجى دەستبەكەوئت؟

پیزکراوهکان

Matrices

بهشی سییهم

وانهکان

- 1-3 پیزکراوهکان
- 2-3 لیكدانی پیزکراوهکان
- 3-3 پیزکراوکان و جیگوپکی
- ئهاندازی
- 4-3 سنووردارهکان و پرسی
- کرامهر

تاقیکردنهوهی نیوهی بهش

- 5-3 ههگهپاوهی پیزکراوه
- لاپهپهی تهکنوئوژیا شیکارکردنی
- سیستمی هیلی بهبهکارهینانی Excel
- 6-3 ژماره ئاویتتهکان
- 7-3 کردارهکان لهسهر ژماره
- ئاویتتهکان

جیهانی تهکنیکی

دهتوانیت پیزکراوهکان بهکاربێنیت
بۆ خستنهپرووی پیدراوهکان و
شیکردنهوهیان. وهک زیادبوونی
ژمارهی ئهو ههرزهکارانهی ئامیری
تهکنهلوژیايان ههیه.

ئايا تۆ ئامادەيت؟

زاراۋەكان ✓

ئەم وشانە بېسەتەۋە بە پېئاسەكەيەۋە كە لەلای چەپدا ھاتوۋە.

- 1 نيوتيرەى بازنە ا كدرارېكە ئەنجامى ناگۆرېت ئەگەر شوئىنى كۆلكەكانيان بگۆرېت ۋەك.
 $ab = ba, a+b = b+a$
- 2 سستەمى ئەستەم ب دورى نيوان چەق و خالېكى سەر چيۆەكەيتى.
- 3 سيستمى كۆتايى نەھاتوۋ ج سستەمى ئەو ھاوكېشانەيە كە شيكاريان نييە.
- 4 جيگۆرېكىي ئەندازەيى د گۆرانە لەجيگاي شيۆە ئەندازەيىكە يان لەپيوانەكانى يان شيۆەكەي
- ه سستەمى ئەو ھاوكېشانەيە كە ژمارەيەكى ناكۆتا شيكاري ھەيە.

كۆكردنەۋە و ليدەركردنى ژمارە تەۋاۋەكان ✓

ئەم برانە بە سادەترين شيۆە بنووسە.

- 5 $2+7+(-10)$ 6 $-8+14+(-3)$ 7 $-2+(-3)+(-5)$
- 8 $-9+15-7+1$ 9 $20-(-5)+(-3)-2$ 10 $9+8-7+5-(-3)+2$

ليكان و دابەشكردنى ژمارە تەۋاۋەكان ✓

ئەم برانە بە سادەترين شيۆە بنووسە.

- 11 $-18 \div 9$ 12 $-6(-1)$ 13 $16(-2)$ 14 $-15 \div (-3)$

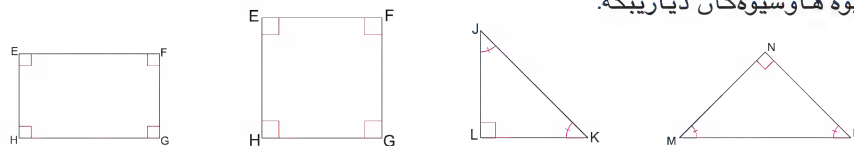
پىزبەندى كدرارەكان ✓

ئەم برانە بە سادەترين شيۆە بنووسە.

- 15 $2(0.5)+2(0.6)$ 16 $0(6.7)+1(0.3)-5(2)-3(8)$
- 17 $3(2+7+0)-5(3+6+4)$ 18 $4(3-6+2)-5(2+0-1)$

جياكردنەۋەى شيۆە ھاوشىۆەكان ✓

19 شيۆە ھاوشىۆەكان ديارىبەكە.



دۆزىنەۋەى پيوانە، نەزانراۋەكان لە شيۆە ھاوشىۆەكاندا ✓

- 20 ھەردو سىگۆشەى ABC و DEF ھاوشىۆەن $\widehat{mFDE} = 35^\circ$ چ گۆشەيەكى تر پيوانەكەى 35° ؟
- 21 ھەردو سىگۆشەى FGH و JKL ھاوشىۆەن $KL, FH = 8, GH = 12, JL = 12$ بدۆزەۋە.

رېښه‌ری خویندن: تیروانین له‌سهر به‌شه‌که

Vocabulary

زاراوه‌کان

Adress	ناونیشان
Dimensions	پله (جوړ)
Entry	دانه
Main diagonal	ته‌وه‌ری سهره‌کی
Matrix	ریزکراو
Square matrix	ریزکراوه‌ی چوارگوشه‌ی

د‌روازه‌یه‌ک له‌سهر زاراوه‌کان

بۇ ته‌وه‌ی له‌گه‌ل هه‌ندېک له‌م زاراوانه‌دا رابېی که له‌م به‌شه‌دا هاتووه‌ ئه‌م هه‌نگاوانه‌ په‌په‌رېوکه:

1. ناونیشان ژماره‌یه‌که له‌ ریزکراوه‌دا. ئه‌و ستوون و ریزه‌ت بۇ دیاریده‌کات که ژماره‌که ده‌که‌وېته یه‌کترېرېنیاونه‌وه. ئه‌و دوو دانه‌یه کامانه‌ن که به‌کاری ده‌پنیت بۇ دیاری کردنی ناونیشانی مالیک له‌ شاریکدا.
2. پله (جوړ) ریزکراوه‌ ژماره‌ی ریز و ستوونه‌کانت بۇ دیاریده‌کات. چی له‌ هاوړیکه‌ت تیده‌گه‌یت ته‌گه‌ر بللی یاریگایه‌ک 50 m به‌ 30 m ؟
3. تیره‌ی سهره‌کی له‌ ریزکراوه‌یه‌کدا له‌ گو‌شه‌ی سهره‌وه‌ی لای چه‌په‌وه‌ ده‌ست پیده‌کات بۇ گو‌شه‌ی خواره‌وه‌ی لای راست. ئایا ژماره‌ی لاپه‌ره‌ی ئه‌م کتیبه‌ ده‌که‌وېته سهر تیره‌ سهره‌کیه‌که‌ی؟
4. وه‌ک ده‌زانیت دریژی و پانی چوارگوشه‌ یه‌کسانن. ده‌رته‌نجامی چی ده‌که‌یت له‌ ریزکراوه‌یه‌ک پیی بووتریت ریزکراوه‌ی چوارگوشه‌یی.

له‌ رابردوودا

خویندوته

- رېکخستنی پېدراوه‌کان له‌ خشته‌دا.
- نه‌نجامدانی کرداره‌کان له‌ ژماره‌ راس‌تیه‌کاندا.
- شیکارکردنی سسته‌می دووانی 2×2
- شیکارکردنی هاوکی‌شه‌ دوو‌جاکان.

له‌م به‌شه‌دا

نه‌مانه‌ فی‌رده‌بیت

- رېکخستنی پېدراوه‌کان به‌ریزکراو.
- کرداره‌کان له‌سهر ریزکراوه‌کان نه‌نجام بده‌یت
- سسته‌می هاوکی‌شه‌ هیلییه‌کان به‌ به‌کاره‌ینانی ریزکراوه‌کان شیکاریه‌یت.
- به‌ به‌کاره‌ینانی ریزکراوه‌کان جیگو‌رکی نه‌ندازه‌یه‌کان نه‌نجام بده‌یت.
- جیبه‌جیکردنی کرداره‌کان له‌سهر ژماره‌ ناوېته.

له‌ داهاتوودا

ده‌توانیت کارامه‌یه‌یه‌کانی نه‌م به‌شه‌ به‌کاربیتیت

- له‌ کاتی لیکو‌لینه‌وه له‌ باب‌ه‌ته‌کانی تری وه‌ک نه‌ندازه‌ و ئامار و کارگېری.
- له‌و یاریبانه‌ی ئاستی جیاواز و ئالو‌زی تیدایه‌.
- له‌ ده‌روه‌ی خویندنگا بۇ رېکخستنی پېدراوه‌کان و چاره‌سهرکردنیان رېگای شیکردنه‌وه‌ی ئه‌و گو‌رانا‌نه‌ی به‌سهر نه‌نجامه‌کانیا‌ندا دیت.

بىركارى بە خوئندەو و نووسىن



ستراتىزىيەتى خوئندەو: خوئندەو ھىما بىركارىيەكان و تىگەشتن لەو ھى دەينوئىت.

خوئندەو ھىما بىركارىيەكان و پەيبردن بە ماناكانىيان شارەزايىيەكە دەبى ھەتەبىت، بۆئەو ھى بابەتەكانى بىركارى تىگەشت. لەكاتى خوئندى بىركارى بە بەكارھىنانى ئەم كەتەبە. بە دەنگىكى بەرز ئەو پراڻە بخوئندەو كە ھىما و نووسىنى بىركارىيانەى تىدايە. ئەم جوړە پراڻەنانە تواناى وەرگىرپاڻى ھىمات بۆ وشە پى دەبەخشىت.

∞	$ x $	$\%$	$\sqrt{\quad}$	$=$	ھىماى باو
دوئەھاتوو	بەھايى پروتى- x	لەسەدا	پەگى دووجا	يەكسانە	
\neq	\geq	\leq	$>$	$<$	ھىماى لاسەنگە
يەكسان نىيە يان (جىاوازە لە)	گەورەتر يان يەكسان	بچووکتر يان يەكسان	گەورەتر لە	بچووکتر لە	
$\{x \}$	\vee	\wedge	$\{$	$f(x)$	ھىماى نەخشە و كۆمەلە
كۆمەلەى x كاتىك	يان (يەكگرتن)	و (يەكگرتىن)	سىستەم	f نەخشەى x	

دەخوئندىتەو ئىف ئۆف ئىكس

نووسىن بە ھىما	وەرگىرپاڻى بە وشە
$f(x) = \sqrt{16x} - 4$	نەخشەى ئىف ئۆف x يەكسانە بە پەگى دووجاى 16 جاران x كەم 4
$\frac{ x-15 }{6} \leq 12$	بەھايى پروتى x كەم 15 دابەش 6 بچووکترە يان يەكسانە بە 12
$\{x/(x \leq -19) \vee (x > 8)\}$	كۆمەلەى ژمارەكانى x كاتىك x بچووکترە يان يەكسانە بە 19-يان x گەورەترە لە 8
$\begin{cases} y \leq -4x+8 \\ y > x-6 \end{cases}$	سىستەمى دوو لاسەنگە كە پىكھاتوو لە « y بچووکترە يان يەكسانە بە سالب 4 جاران x كۆ 8» و « y گەورەترە لە x كەم 6»

ھەولە

ھەرنووسىنىكى ھىمادار بە وشە دەربەرە.

$$f(y) = |15y| + \frac{y}{2} \quad \begin{cases} x/(x \geq -7) \vee (x \leq -1) \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x+3 \\ y = x \end{cases} \quad [-5, \infty[$$

ئەم رستەى دىت بە بەكارھىنانى ھىما بىركارىيەكان دەربەرە.

كۆمەلەى ژمارەكانى x كاتىك لەنيوان سالب 8 و 10 دا بىت.



پیزکراوهکان Matrices

1-3

بۆچی ئەمە فیڤرەبەین؟

پیزکراوهکان بەکارههینریت بۆ پیکخستنی پیدراوهکان وەک پیکخستنی کالاکانی دوکانیکێ بازارگانی بهبهکارهینانی پیزکراوهکان (نموونه 3)

ئامانجهکان

• پیزکراوهکان بهکارههینریت بۆ نواندنی پیدراوهکانی بیرکاری و ژبانی پۆژانه.

• پیزکراوهکان کۆدەکاتوه و لیکیان دەرەکات.

• ژمارههکی راستی له پیزکراوه دەرەکات.

ئەم خشتهیهی خوارهوه چالاکیهکی بازارگانی یهکێک له دوکانهکانی فرۆشتنی شتومهکی مالان به درێژایی مانگی نیسان پیشان دەرەکات. له خشتهکهدا شتومهکهکانی دوکانهکه (دەرخت له یهکی نیساندا) و فرۆشتنهکان (له مانگی نیساندا) کالاکراوهکان (له مانگی نیساندا) پیشان دەرەکات.

شتومهکهکانی ناو دوکانهکه له سههرتای مانگی نیسان		فرۆشراوهکان له مانگی نیساندا		کالاکراوهکان له مانگی نیساندا	
بجووک	گهوره	بجووک	گهوره	بجووک	گهوره
8	10	7	9	15	20
15	12	15	12	18	24

داتوانیت پیدراوهکانی شتومهکهکان به بهکارهینانی پیزکراوه بنوینیت. گهوره بجووک

گهوره بجووک

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 15 & 12 \end{bmatrix}$$

پیزکراوهی شتومهکهکان ← میزی ناو باخ مقهلی

پیزکراوه Matrix خشتهیهکی لاکیشهیه له چهند خانهیهک پیکدیت به دوو کهوانهی ئەستوون دهوره دراون ههرخانهیهک له ژمارهیهک پیکدیت پێی دهوتریت **دانهیهک Entry** له دانهکانی پیزکراوهکه، **جووری Dimension** پیزکراوه ژماره پیز و ستوونهکانی دهنوینیت. بهم شیوهیهش دهنوسریت: ژماره پیزکراوهکان \times ژماره ستوونهکان ئەگەر پیزکراوهیهک له دوو پیز و سێ ستوون پیکهاتبیت ئەوا جوورهکی (2×3) یه. به 2 به 3 دهخویندريتهوه. جووری پیزکراوهی شتومهکهکانی سهروه 2×2 . ههموو دانهیهک له دانهکانی پیزکراوه ناوینیشانیکی **Adress** ههیه که شوینهکهی له پیزکراوهکهدا پیشان دەرەکات. ناوینیشانی دانه له ژمارهی ئەو پیزه له سههر یهکێک بهدوایدا ژمارهی ئەو ستوونهی لهخوێ دهرگیت پیکدیت. دانهی 10 له پیزکراوهکهی سهروهدا ئەو دانهیهیه که له سههر پیزی یهکه و ستوونی دوومه. ئەم دانهیه m_{12} هیمادهکریت.

بەکارهینانی پیزکراوه بۆ خستنهپرووی پیدراوهکان

پیدراوهکانی فرۆشتنهکانی مانگی نیسان بهکاربهیتنه.

پیزکراوهیهک بهکاربهیتنه بۆ خستنهپرووی ئەو پیدراوانه.

گهوره بجووک

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 15 & 12 \end{bmatrix}$$

پیزکراوهی فرۆشتنهکان ← میزی ناو باخ مقهلی

جووری پیزکراوهی S چهنده؟

پیزکراوهی S دوو پیز و دوو ستوونی ههیه. کهواته جوورهکی 2×2 .

دانهی s_{12} کامهیه؟

دانهی s_{12} دهکهوینته سههر یهکتربیرینی پیزی یهکه و ستوونی دووهم. که 9 یه. ئەم دانهیه ئەوه دهنوینیت که دوکانهکه 9 میزی گهورهی له مانگی نیساندا فرۆشتووه.

زاراوهکان

Vocabulary

پیزکراوه

Matrix

پلهی پیزکراوه (جوورهکی)

Dimensions

دانهی پیزکراوه

Entry

ناوینیشان

Adress

نموونه 1

1

ب

ج

د. ناونیشانی دانە 15 چیه؟

دانە 15 دەرکەوتتە شوونی یەکتەری پیزی دووهم لەگەڵ ستوونی یەکمە. دانە 15 m_{21}

1. پیزکراوەی بەرامبەر بەکاربێنە بۆ وەلامدانەوهی ئەم پرسیارانە.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 9 \\ 12 & 11 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

ا. جۆری پیزکراوەی M چەندە؟

ب. دانە 15 m_{32} کامەیه؟

ج. لەدوو شویندا سفر دەرکەوتت. ناونیشانی هەردووکیان کامەیه؟



دوو پیزکراوە یەکسان دەبن ئەگەر لەهەمان پلە (جۆر) بن و دانە بەرامبەرەکانی هەردوو پیزکراوەکە یەکسان بن (واتە ئەو دانانە یە لەهەردوو پیزکراوەکەدا هەمان ناونیشانیان هەبێت).

2. نموونە

بەهای x و y دیاریبکە، کاتیگ هەردوو پیزکراوەکە یەکسان بن.

$$\begin{bmatrix} 2x+4 & 5 & 1 \\ -2 & -3y+5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 1 \\ -2 & 5y-3 & -4 \end{bmatrix}$$

لەبەرئەوهی هەردوو پیزکراوەکە یەکسانن مانای $2x+4=12$ و $-3y+5=5y-3$

$$-8y = -8 \quad \text{و} \quad 2x = 8$$

$$y = 1 \quad \text{و} \quad x = 4$$

2. بەهای x و y دیاریبکە، کاتیگ هەردوو پیزکراوەکە یەکسان بن.

$$\begin{bmatrix} -3 & -2x & -3 \\ -2 & 3y & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -15 & -3 \\ -2 & -2y+15 & -12 \end{bmatrix}$$

کۆکردنەوه و لێدەرکردنی پیزکراوەکان

بەهۆسین	بەژمارە	بەجەبری
<p>بۆئەوهی دوو پیزکراوە کۆیکەیهوه یان لێکیاندەرکەیت دانە بەرامبەرەکان کۆیکەوه</p>	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \end{bmatrix}$



بۆ کۆکردنەوهی دوو پیزکراوە یان لێدەرکردنی یەکیکیان لەوی تر پێویستە هەردووکیان هەمان جۆر بن.

ناتوانرێت کۆکردنەوه ئەنجام بدرێت
لەبەرئەوهی پیزکراوەکان هەمان جۆرن

~~$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{14} & b_{12} & b_{13} \end{bmatrix}$$~~

دەتوانرێت کرداری کۆکردنەوه ئەنجام بدرێت
لەبەرئەوهی هەردوو پیزکراوەکە لەهەمان جۆرن

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 13 & 13 \end{bmatrix}$$

نمونە 3

كۆكردنەۋە و لىدەر كىرەنى پىزىكراۋەكان

ئەم پىزىكراۋەنە بەكاربەينە بۇ ۋەلامدانەۋە پىزىكراۋەكان.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \\ -5 & 14 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

كۆيانىكەۋە و لەيەكىان دەرىكە (ئەگەر تۈنرا)

ا $A + C$

ھەموو دانەيەكى پىزىكراۋە يەكەم لەگەل دانەي بەرامبەرى لەپىزىكراۋەى دوۋەمدا كۆبكەۋە

$$A + C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \\ -5 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3 & -2+2 \\ -3+0 & 10+(-9) \\ 2+(-5) & 6+14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 1 \\ -3 & 20 \end{bmatrix}$$

ب $C - A$

$$C - A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \\ -5 & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-4 & 2-(-2) \\ 0-(-3) & (-9)-10 \\ -5-2 & 14-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -19 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$

ج $C + B$

لەبەرئەۋەى جۆرى پىزىكراۋەى C (3×2) و جىاۋازە لەجۆرى پىزىكراۋەى B (2×3) بۇيە كىردارى كۆكردنەۋەيان ناكىت.

3. كۆبكەۋە يان لىدەر كىرە (ئەگەر تۈنرا)

ج $D - B$

ب $B - A$

ا $B + D$



دەزانىت لىكدان كۆكردنەۋەيەكى دوپارەيە. ئەمە كاتىك راستە كە پىزىكراۋەيەك لە ژمارەيەك بدريت.

ئەگەر $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ دەتوانىت $M + M$ بە شىۋەى $2M$ بنوسىت.

دەتوانىت ژمارەيەك لە پىزىكراۋەيەك بەدەيت. ئەۋىش بە لىكدانى ھەموو دانەيەك لە دانەكانى پىزىكراۋەكە لە ژمارەيە $2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 2 & 2 \times 0 \\ 2 \times 1 & 2 \times 5 \end{bmatrix}$

جىبەجىكرەن لە بازىرگانىدا

نمونە 4

بە گەرەنەۋە بۇ نمونەى چالاکى بازىرگانىيەكەى دوكانى فروشتىنى كەلۈپەلى ناۋمال. پىزىكراۋەى $M - S + D$ ھەژمارىكە. كاتىك M پىزىكراۋەى شتۈۋمەكەكانى ناۋ دوكانەكە و S پىزىكراۋەى فروشتىنەكان و D پىزىكراۋەى فروشتىنەكان بىت. پىزىكراۋەى ئەنجامەكە چى دەنۋىت؟

$$\begin{aligned} M - S + D &= \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 18 & 24 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8-7+15 & 10-9+20 \\ 15-15+18 & 12-12+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 21 \\ 18 & 24 \end{bmatrix} \\ &\text{گەرە بچووك} \\ &= \begin{bmatrix} 16 & 21 \\ 18 & 24 \end{bmatrix} \text{ مېزى ناۋ باخ مقلەى} \end{aligned}$$

پىزىكراۋەى ئەنجامەكە شتۈۋمەكەكانى ناۋ دوكانەكە دەنۋىت لە كۆتابى مانگى نىساندا. دوكانەكە 16 مېزى ناۋباخى بچووك و 21 مېزى گەرە و 18 مقلەى بچووك و 24 گەرە تىادەمىنەتەۋە.

4. پىزكراوهى $A + 2B - 3C$ ھەژمارىكە كاتىك



$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ ۋ } B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \text{ ۋ } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

نووسىنى بىرە پىزكراوهىيەكان بە سادەترىن شىۋە

نمونە 5

ئەم پىزكراوانە بەكاربەيتنە بۇ ۋەلامدانەۋەدى پىرسىارەكان

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

بە سادەترىن شىۋە ئەمانە بنووسە

ا $2A - 3B$ ئەگەر لە توانادا ھەبوو

$$2A - 3B = 2 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

لەبەرئەۋەدى لىكدانى پىزكراۋەيەك لە ژمارەيەكى نەگۈر جۆرەكەى ناگۈرپىت، كەۋاتە جۆرى پىزكراۋەى $2A$ ۋ $3B$ يەكسان نابن. ئەمەش ۋادەكات كۆكردنەۋەيان لە توانادا نەبىت.

ب $C - 2A$

$$\begin{aligned} C - 2A &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (-2) \times 4 & (-2) \times (-2) \\ (-2) \times (-3) & (-2) \times 10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 6 & -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 6 & -29 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

رۇشناىى

دوۋكەۋانەى پىزكراۋە ھىمايە
بۇ بەشبوون $2A$ - بەسەر
ھەموو دانەكانى پىزكراۋەى A
دا بەشېكە. پىش ئەۋەدى دەست
بە كۆكردنەۋە بىكەيت ۋەك لە
بىرە ژمارەيەكاندا دىكرىت

5. ئەگەر لە توانادابوو ئەمانە بە سادەترىن شىۋە بنووسە.



$$D + 0.5D \quad \text{ج} \quad 4A - 3C \quad \text{ب} \quad 2B + 3C \quad \text{ا}$$

سىفەتەكانى كۆكردنەۋەى پىزكراۋەكان



رۇشناىى

پىزكراۋەى سىفرى ئەۋ
پىزكراۋەيە كە ھەموو
دانەكانى سىفرن.

بەجەبرى	بەژمارە	بەنووسىن
$A + B = B + A$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$	سىفەتەكانى ئالوگۈر كۆكردنەۋەى پىزكراۋە كىردارى ئالوگۈرە
$A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	سىفەتەكانى يەكتىرەستىن كۆكردنەۋەى پىزكراۋە كىردارى يەكتىرەستىنە
$A + 0 = A$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$	پىزكراۋەى بى لايەن لەكۆكردنەۋە كۆمەلەى سىفر دانەى بى لايەنى پىزكراۋەكانە
ئەگەر B دژەكۆى A بىت ئەۋا $A + B = 0$ كاتىك 0 پىزكراۋەى سىفرى.	$\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 9 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	دژەكۆى پىزكراۋەى M بىرىتىيە لەۋ پىزكراۋەى كە پەيدادەبىت لە ئەنجامى گۈرپىنى ھەردانەيەك لە دانەكانى M بە دژەكۆيەكەى

بیربکه وه و تاوتویبکه

1. هه موو جوړه کانی ئه و پیزکراوه که له توانادایه ژماره ی دانه کانی 8 بیت بدوزوه.
2. باسی ئه و کرداره بکه له پیزکراوه کاندایه واده کات نیشانه ی هه موو دانه کانی پیچه وانه بیت هوه.
3. پیکه به ئه م خسته ی خواره وه بنووسه وه، پاشان ته و او یبکه. له هه ر خانه یه کدا نمونه یه کی ژماره یی و نمونه یه کی پیزکراوه یی به ی نه وه.

کردار	ژماره	پیزکراوه
کوژدنه وه		
لیدنه وکړدن		
لیدکان له ژماره یه ک		



راهینانه کان

1-3

راهینانی ئاراسته کراو

1 **ژارواه کان** ئه و به هایه ی که ده که ویت ه سهر یه کتر بپینی ریزیک و ستوونیک له ریزکراوه یه کدا (دانه یه ک یان ناو نیشانی دانه یه ک) دهنوینیت.

2 **هوشیار و شیرکو و دلسوز کاری فروشتنی بلیتی ئاههنگی کو تایی سالیان گرت ه ئه ستو ئه م خسته ی خواره وه ئه و پیدراوانه دهنوینیت که په یوه ندیان به فروشتنی بلیته کانه وه هه یه.**

فروشتنه کانی بلیته کانی ئاههنگی کو تایی سالی خویندن	خویندنکار	بلیتی تاک	دهفته ره بلیت	کوی پاره ی گشتی
هوشیار	39	15	114 000	دینار
شیرکو	108	8	143 000	دینار
دلسوز	13	25	138 000	دینار

أ به ریزکراوه ی A پیدراوه کانی خسته که بنوین.

ب جوړی ریزکراوه ی A چه نده؟

ج دانه ی a_{13} کامه یه؟ چی دهنوینیت؟

د ناو نیشانی دانه ی 143 000 چییه؟

3 به های x و y دیار یبکه، کاتی که هه ردو و ریزکراوه که یه کسان بن.

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 14-x \\ -13-y & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & x+8 \\ 2y-1 & 0 \end{bmatrix}$$

3 پروانه نمونه

نهم ریزکراوانه به کاربهنه بۆ شیکارکردنی پرسیارهکانی 4 تا 7. کۆیان بکهوه و لهیهکیان دهریکه (ئهگەر توانرا)

$$A = \begin{bmatrix} 1.5 & 3.8 & 3 \\ -1.2 & 2.4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 1.1 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2.3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B + A \quad 7$$

$$B - A \quad 6$$

$$B - C \quad 5$$

$$A + B \quad 4$$

4 پروانه نمونه

8 به کاربردن

خشتهی بهرامبه رخی سی جۆر پۆشاک وهرزی دهنوینت پێش دانانی باج لهسهریان. ئەم نرخانه به ریزکراوهی M بنوینه. پاشان ریزکراوهی T بدۆزهوه که بههای باجی ههر جۆریکیان بنوینت. ئەگەر بزانیته ریزهی سهدی باج 8.25% ریزکراوهی A بنووسه که رخی ههرسی جۆر پۆشاکه که بنوینت دواى زیادکردنی باج لهسهری.

نرخى پۆشاکى وهرزى			
نایاب	به ئارم	سادە	
14 000	13 000	9 000	کراسى لۆکه
11 000	9 500	6 000	شۆپتی کورت
23 000	21 000	15 000	شۆپتی درێژ

5 پروانه نمونه

نهم ریزکراوانه به کاربهنه بۆ شیکاری پرسیارهکانی 9 تا 12. ئەنجامه که به سادەترین شیوه بنووسه. (ئەگەر توانرا).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2C - A \quad 12$$

$$A - 2B \quad 11$$

$$\frac{1}{2}C \quad 10$$

$$3B \quad 9$$

راهینان و شیکارکردنی پرسیارهکان

13 پێدراوهکانی خشته که به کاربهنه بۆ وهلامی پرسیارهکان

- ا پێدراوهکانی خشته که به ریزکراوهی A بنوینه
 ب جۆری ریزکراوهی A چنده؟
 ج دانهی a_{32} کامهیه؟ چی دهنوینت؟
 د ناویشانی دانهی 385 980 چیه؟

ههلبژاردنهکانی گهشت			
نمره	بلیت	ئۆتیل	ئۆتۆمبیل
سهردتا	425 500	396 000	65 990
ئیش	385 980	245 500	45 900
ئابوریانه	275 120	103 250	29 500

راهینانی نازاد	
شیکاری	سهیری
پرسیارهکان	نمونهی
13	1
14	2
18-15	3
19	4
23-20	5

14 بههای x و y دیاریبکه بۆ ئهوهی دوو ریزکراوه که یهکسانن

$$[2x \quad y+1 \quad -2y] \text{ و } [3-2y \quad 14-x]$$

نهم ریزکراوانه به کاربهنه بۆ شیکاری پرسیارهکانی 15 تا 18. کۆیان بکهوه و لهیهکیان دهریکه (ئەگەر توانرا)

$$D = \begin{bmatrix} 5.1 & 2.5 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 3.2 & -1 \\ -1.5 & 2.4 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} -4.2 & -1 \\ 2.2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E + F \quad 18$$

$$D + F \quad 17$$

$$D + E \quad 16$$

$$F - E \quad 15$$

19 **خویندنی زانکۆ** ئەم خشتەیی خوارەوه تیچوونی سالانەیی خویندنی زانکۆدا درەدەخات.

بەهای نزیكەیی تیچوونی سالانەیی خویندنی زانکۆ			
زانکۆی تاییبەت	زانکۆی نەتەوایی فەرمی	زانکۆی فەرمی بێگانە	
27 677 000	12 841 000	19 188 000	تیچوون بەدینار

شارەزایان وا پێشبینی دەکەن کە سالانە بێی تیچوون بە پێژەیی 5% زیادبکات. بە بەکارهێنانی لێکدانى ژمارەییەك لە پیزکراوە بەهای نزیكەیی تیچوونی خویندنی لەهەرسى جۆر زانکۆییەكە بدۆزەوه. ئەم پیزکراوانە بەکاربێتە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 19 تا 22. ئەنجامەكە بە سادەترین شیۆه بنووسە (ئەگەر توانرا)

$$G = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

23 $H - 0.3G$

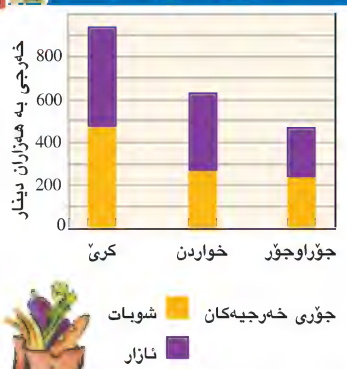
22 $2K - G$

21 $\frac{1}{2}(H + J)$

20 $2G$



خەرجیەکانی کلارا



24 وێنەیی پروونکردنەوایی بەرامبەر ئەو ئەنجامانە دەنویشت کە

کلارا بە بەکارهێنانی بژمێر دەستیکەوتووە. پاش ئەوەی خەرجی مانگی شوبات و ئازاری تێدا تۆمارکرد. پیزکراوەی $(3 \times 1)F$ بەکاربێتە بۆ نواندنی خەرجییەکانی لە مانگی شوباتدا و پیزکراوەی M بۆ نواندنی خەرجییەکانی لە مانگی ئازاردا. پیزکراوەکان کۆیکەووە بۆ دەستکەوتنی خەرجی گشتی لەهەردوو مانگەكەدا.

25 **ئەندازە** پیزکراوەی $\begin{bmatrix} 2 & 2.5 \\ 3 & 3.5 \end{bmatrix}$ نیووەتیرەکانی چوار بازە دەنویشت.

ا) پیزکراوەیەك بنووسە چۆنە بازەکان بنویشت.

ب) ئایا دەتوانین پیزکراوەیەك بەدەست بێنین پووبەری بازەکان بنویشت بە بەکارهێنانی

کۆکردنەوایی پیزکراوەکان و لێکدانیان لە ژمارەییەك؟ ئەو پوونبەكە.

بیری پەخنگەر پوونبەكە ئەم دەستەواژانە هەمیشە دروستن یان هەندیک جار دروستن یان هەمیشە نادروستن.

26 دەتوانریت دوو پیزکراوە کۆیکرێنەووە کە هەمان دانەیان هەبێت.

27 دەتوانریت دوو پیزکراوە کۆیکرێنەووە کە ژمارەیی دانەکانیان جیاوازی.

28 دەتوانریت دوو پیزکراوە کۆیکرێنەووە کە هەریەكەیان لە 3 پیز و 4 ستوون پێکھاتب.

29 ئەگەر توانرا دوو پیزکراوە کۆیکرێنەووە ئەوا دەتوانریت لەیەکیش دەریکیت

30 ا) پیزکراوەیەك بنووسە خالی سەرەکانی سێگۆشەكە بنویشت. بەجۆرێك

پۆی خالەکان پیزی یەكەم و تانەکانیان لەسەر پیزی دووهم بێت.

ب) کرداریك لەسەر پیزکراوەکان بەکاربێتە بۆ زیادکردنی 3 بۆ پۆی

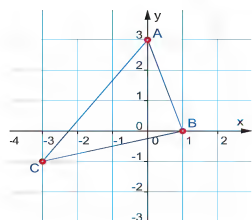
خالەکان و 1 بۆ تانی خالەکان.

ج) وێنەیی ئەو سێگۆشەییە بکێشە پیزکراوە تازەكە بنویشت. چۆن ئەم سێگۆشەییەت

دەستدەکەوێت بە بەکارهێنانی سێگۆشە بنەرەتییهكە؟

31 بەهای x و y و z دیاریکە بۆ ئەو پیزکراوەکان یەكسان بن.

$$\begin{bmatrix} 3 & x \\ -2 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & -4 \\ y & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -10 \\ 9 & z \end{bmatrix}$$



32 هه‌له له شیکردنه ودا هه‌له که پوونبکه وه: $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 11 & 0 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

33 بنووسه ئایا لیدهر کردنی پیزکراوه‌کان کرداریکی ئالوگۆره؟ به نمونه‌یه که پالپشتی وه‌لامه‌که ت بکه.

ناماده کردن یۆ تا فیکردنه وه



34 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 2 \\ 1.5 & 2.1 & 0 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 2 & 0.4 & 6 \\ 6 & 6.4 & 0 \end{bmatrix}$. کام بره یه‌کسانه به پیزکراوه‌ی $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

35 کام ده‌سته‌واژه له‌مانه‌ی خواره‌وه هه‌میشه دروسته له پیزکراوه‌ی E که له پله‌ی $m \times n$ ؟

- 36 به‌های x چهنده بۆئه‌وه‌ی پاسادانی $\begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 48 & 32 \\ 8 & 28 \end{bmatrix}$ بکات؟
- 37 کورته وه‌لام به‌های x بدۆزه‌وه که پاسادانی ئهم هاوکیشه‌یه ده‌کا $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -1 \end{bmatrix}$

به‌ره‌نگاری و فراوانکردن

38 بیری ره‌خنه‌گر چی دهرباره‌ی ئهو پیزکراوانه ده‌لیی که ژماره‌ی دانه‌کانیان ژماره‌ی خۆبه‌شه؟ پوونبکه‌وه.

39 چی واده‌کات هه‌ردوو پیزکراوه‌ی $A - B$ و $A + (-B)$ یه‌کسان بن، کاتیک A و B هه‌مان جوړبن؟

8	3	4
1	5	9
6	7	2

4	18	8
14	10	6
2	16	

40 له چوارگۆشه سیکراییه‌کاندا. وه‌ک دوو چوارگۆشه‌ی به‌رامبه‌ر. هه‌میشه هه‌مان ژماره‌مان ده‌ستده‌که‌ویت ئه‌گه‌ر ئهو ژمارانه‌ی له‌سه‌ر هه‌مان ریز یان ستوونن کۆیان بکه‌ینه‌وه. ئایا سه‌رجه‌می هه‌ردوو پیزکراوه‌ی چوارگۆشه‌ی سیکراوی چوارگۆشه‌یه‌کی سیکراویه؟ ئهو پوونبکه‌وه.

41 پیزکراوه‌ی B بدۆزه‌وه بۆئه‌وه‌ی ئهم یه‌کسانیه دروست بیټ $3 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} - 2B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

پیداچوونه‌وه‌ی لولپییچی

بره‌یکی جه‌بری بنووسه که هه‌ر باریک بنوینیت. (پۆله‌کانی پێشوو)

42 چی‌وه‌ی سیگۆشه‌یه‌ک دریژی لایه‌کانی سی ژماره‌ی جووتی یه‌ک به‌دوای یه‌ک بن.

43 ژماره‌ی ئهو بلیتانه‌ی که فرو‌شراون به 20 که‌س. ئه‌گه‌ر بزانیته n بلیتی کړیوه.

44 پاره شیلان 36 پارچه پاره‌ی پێیه که له دوو چه‌شنی 1 000 و 500 دینارین. به‌های ئهو بره پاره‌یه چهنده؟ ئه‌گه‌ر بزانیته ژماره‌ی چه‌شنی 500 دینارییه‌کان دوو ئه‌وه‌ندی ژماره‌ی چه‌شنی هه‌زار دینارییه‌کانه؟ (پۆله‌کانی پێشوو)

پوونبکه‌وه که ئایا خالی پیدراو شیکاری سسته‌می هه‌ردوو هاوکیشه‌که‌ن. (پۆله‌کانی پێشوو)

45 $\begin{cases} x - y = 4 \\ 5x + 6y = 2 \end{cases} : (2, -2)$

46 $\begin{cases} y = 2 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases} : (4.5, 2)$



ليكدانى پىزكراوهكان

Multiplying Matrices

2-3

ئامانجەكان

- سيفەتەكانى پىزكراوهكان لە كردارى ليكداندا دەناسيێتەوه بە ليكدانى پىزكراوهيەك لە يەككى تر.

زاراوهكان Vocabulary

- ئەنجامى ليكدانى دووپىزكراو Matrix product
- پىزكراوهى چوارگۆشەى Square matrix
- تيرەى سەرەكى Main diagonal
- پىزكراوهى يەكە Unit matrix

كى ئەمە بەكار دەهينىت؟

خاوەن دامەزراوهكان پىزكراوه بۆ دۆزىنەوهى دەستكەوت و تىچوون و قازانج بەكار دەهين (نموونهى 3)

- لە وانەى پيشوودا ليكدانى ژمارەيەك لە پىزكراوهيەك فيربوويت. دەشتوانيت دوو پىزكراوه لە يەكترى بدەيت. ليكدانى دوو پىزكراوه، پىزكراوهيەكى ترى لايەىدا دەبێت پيى دەوترىت ئەنجامى ليكدانى دوو پىزكراوه Matrix product. بۆ ليكدانى دوو پىزكراوه ئەم دوو پيسايە جيبەجيبەكەيت.
- كاتيك دەتوانيت پىزكراوهى A لە پىزكراوهى B بدەيت (واتە هەژمارى $A \times B$ يان AB) بکەيت ئەگەر ژمارەى ستوونەكانى A يەكسان بێت بە ژمارەى پىزەكانى B.
- ئەنجامى ليكدانى پىزكراوهيەك جۆرەكەى $m \times n$ بێت لە پىزكراوهيەك جۆرەكەى $n \times p$ بێت، پىزكراوهيەكە جۆرەكەى $m \times p$.

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 8 & 4 \\ 9 & 5 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

C D CD

3×2 3×5 پىناسە نەكراوه

ژمارەى پىزەكان \neq ژمارەى ستوونەكان ($2 \neq 3$)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

A B AB

2×3 3×4 $\rightarrow 2 \times 4$

ژمارەى پىزەكان = ژمارەى ستوونەكان

زۆر جار نوسىنى $A_{m \times n}$ بەكار دەهينىت بۆ دەرستى ئەوهى جۆرى پىزكراوهكە mn ـ

پوشتايى

ئەمەى خوارەوت لەبىرىت بۆ ئەوهى ئەنجامى ليكدانى دوو پىزكراوه پىناسەكراو بێت پيوستە ژمارەى ستوونەكانى پىزكراوهى لاى چەپ يەكسان بێت بە ژمارەى پىزەكانى پىزكراوهى لاى راست.

جياکردنەوهى لە تواناى دوو پىزكراوه

پوونبەوه كە ئەگەر ئەنجامى ليكدانى ئەم دوو پىزكراوانە پىناسەكراوه يان نا، ئەگەر پىناسەكراوبو جۆرەكەى دياربەكە.

$$C_{4 \times 3} \quad D_{4 \times 5} \quad \text{ب}$$

C D CD

4×3 4×5 پىناسە نەكراوه

لەبەر ئەوهى ژمارەى پىزەكانى پىزكراوهى C يەكسان نىيە بە ژمارەى پىزەكانى پىزكراوهى D. بۆيە ئەنجامى ليكدانىيان پىناسە نەكراوه.

$$A_{2 \times 5} \quad B_{5 \times 3} \quad \text{ا}$$

A B AB

2×5 5×3 $= 2 \times 3$

لەبەر ئەوهى ژمارەى ستوونەكانى پىزكراوهى A يەكسانە بە ژمارەى پىزەكانى پىزكراوهى B بۆيە ئەنجامى ليكدانىيان پىناسەكراوه پىزكراوهكە لە جۆرى 2×3 .

1. پىزكراوهكانى نموونەكە بەكار بهيێنە بۆ وەلامدانەوهى پرسىيارەكان. پوونبەوه كە ليكدانى دوو پىزكراوهكە پىناسەكراوه يان نا، ئەگەر پىناسەكراوبو جۆرەكەى دياربەكە



DB ج

DC ب

BA ا

چۆن سەيرى ژمارەى ستوونەكانى پىزكراوهى A و ژمارەى پىزەكانى پىزكراوهى B ت كرد بۆ ئەوهى برپار لەوه بدەيت كە ليكدانى AB پىناسەكراوه يان نا. بەو شۆوهيش بۆ هەژمارکردنى ئەنجامى ليكدانى دوو پىزكراوه هەمان كار بەكار دەهينىت.

بەنوسىن	بەژمارە	بەجەبرى
بۆ ھەژمارکردنى دانەى p_{kj} لە پىزىکراوەى $P=AB$. ھەر دانەىەكى پىزى k لە پىزىکراوەى A لە دانەى بەرامبەرى پىزى j لە پىزىکراوەى B بە، پاشان ئەنجامەکانیان کۆیکەو.	$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 d_1 & a_1 c_2 + a_2 d_2 \\ b_1 c_1 + b_2 d_1 & b_1 c_2 + b_2 d_2 \end{bmatrix}$

نموونه 2

لەیکدانى پىزىکراوەکان

$$D = \begin{bmatrix} 11 & -1 \\ 12 & 10 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 7 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

ئەم پىزىکراوە بەکاربێنە

ئەنجامى لەیکدانەکان ھەژماریکە (ئەگەر توانرا)

AB

جۆرەکان بېشکە بۆئەو بەرپاربدەیت کە لەیکدانەکە پێناسەکراوە. جۆرى پىزىکراوەى A بریتىيە لە 2×3 ، جۆرى پىزىکراوەى B بریتىيە لە 3×2 . مانای لەیکدانى AB پێناسەکراوە. ئەنجامەکەشیان لە جۆرى 2×2 . پىزى يەكەمى پىزىکراوەى A لە ستوونى يەكەمى پىزىکراوەى B بە ھەك لە خواروھ پونکراوەتەو. ئەنجامەکە لە پىزىکراوەى C دا لە شوێنى دانەى C_{11} بنوسە.

$$C = AB = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 7 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \quad 0(5) + 4(-2) + 9(6)$$

ئىستاش پىزى يەكەمى پىزىکراوەى A لە ستوونى دووھمى پىزىکراوەى B بە ھەك لە خواروھ پونکراوەتەو. ئەنجامەکە لە پىزىکراوەى C دا لە شوێنى دانەى C_{12} بنوسە.

$$C = AB = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 7 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & 28 \\ ? & ? \end{bmatrix} \quad 0(1) + 4(7) + 9(0)$$

پىزى دووھمى پىزىکراوەى A لە ستوونى يەكەمى پىزىکراوەى B بە ھەك لە خواروھ پونکراوەتەو. ئەنجامەکە لە پىزىکراوەى C دا لە شوێنى دانەى C_{21} بنوسە.

$$C = AB = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 7 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & 28 \\ -9 & ? \end{bmatrix} \quad (-3)(5) + 3(-2) + 2(6)$$

پىزى دووھمى پىزىکراوەى A لە ستوونى دووھمى پىزىکراوەى B بە ھەك لە خواروھ پونکراوەتەو. ئەنجامەکە لە پىزىکراوەى C لە شوێنى دانەى C_{22} بنوسە.

$$C = AB = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 7 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & 28 \\ -9 & 18 \end{bmatrix} \quad (-3)(1) + 3(7) + 2(0)$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} 46 & 28 \\ -9 & 18 \end{bmatrix} \quad \text{کەواتە}$$

ئاگادار!بە

تېبىنى ئەو بەكە ئەنجامى
لېكەن AB و BA ھەمىشە
جىاوازن. لېكەنى
پېزىكراوكان سېفەتى
ئالوگۇپى تېدانىيە.

BA ب

جۆرەكان بېشكەنە بۆئەۋى بېپار بەدەيت كە لېكەنىيان پېناسەكراۋە، جۆرى پېزىكراۋە B
بىرېتىيە لە 3×2 و جۆرى پېزىكراۋە A بىرېتىيە لە 2×3 ئەنجامى BA پېناسەكراۋە و
پېزىكراۋەيەكە لە جۆرى 3×3 .

$$BA = \begin{bmatrix} 5(0) + 1(-3) & 5(4) + 1(3) & 5(9) + 1(2) \\ -2(0) + 7(-3) & -2(4) + 7(3) & -2(9) + 7(2) \\ 6(0) + 0(-3) & 6(4) + 0(3) & 6(9) + 0(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 23 & 47 \\ -21 & 13 & -4 \\ 0 & 24 & 54 \end{bmatrix}$$

AD ج

جۆرەكان بېشكەنە بۆئەۋى بېپار بەدەيت، كە لېكەنىيان پېناسەكراۋە جۆرى پېزىكراۋە A
بىرېتىيە لە 2×3 و جۆرى پېزىكراۋە D بىرېتىيە لە 2×2 . ئەنجامى AD پېناسەكراۋە.

2. ئەنجامى لېكەنى ئەمانە ھەژمارىكە (ئەگەر تۈانرا)

DA ب

BD أ



پېزىكراۋەكان بەكاردىن لە كاروبارى كارگېپى و ھەژماركردىن داھات و تېچوون و قازانچ.



جېبەجىكرىن لەسەر دەرختە (جىرد)

كۆمپانىي كەژى بۆ كەل و پەلى وەرژىشى دوو جۆر پۆشاكى
پۆشەتن لە دوو دوكانى جىاوازا دەفرۆشەت. خشتەي يەكەم
كالاكانى ناو ھەردوو جۆر پۆشاكەكە دەنۆيىت و دووھمىش
نرخى فرۆشتەن و تېچوون و قازانچى ھەر تاكىكە لە تاكەكانى
جۆرەكان دەنۆيىت. تېچوونى گشتى ھەردوو جۆر پۆشاكەكە
لەھەر دوكانىكدا بدۆزەۋە.

داھات و تېچوون و قازانچ بەھەزاران دىنار			
قازانچ	تېچوون	نرخ	
45	44	89	پەسەند
61	58	119	ناياب

كالاكانى ناو ھەردوو دوكان		
ناياب	پەسەند	
10	14	دوكانى 1
8	7	دوكانى 2

لېكەنى پېزىكراۋەكان بەكاربېنە بۆ دۆزىنەۋى داھات و تېچوون و قازانچى ھەر دوكانىكە.

$$\begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 89 & 44 & 45 \\ 119 & 58 & 61 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14(89) + 10(119) & 14(44) + 10(58) & 14(45) + 10(61) \\ 7(89) + 8(119) & 7(44) + 8(58) & 7(45) + 8(61) \end{bmatrix}$$

قازانچ تېچوون داھات

$$= \begin{bmatrix} 2436 & 1196 & 1240 \\ 1575 & 772 & 803 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \text{ دوكانى} \\ 2 \text{ دوكانى} \end{matrix}$$

تېچوونى پۆشاك لە دوكانى 1 بىرېتىيە لە 1196 ھەزار دىنار و لە دوكانى 2 دا 772 ھەزار دىنار

3. كالاكانى دوكانى ژمارە 2 بگۆرە بە 6 جۆرى پەسەند و 9 جۆرى ناياب

پېزىكراۋە ئەنجامى لېكەنەكان ھەژمارىكەۋە. قازانچى دوكانى 2 دىاربىكە.



پیزکراوہی چوارگوشہیی Square matrix ئەو پیزکراوہیہ کہەمان ژمارە لە پیز و ستوونی ھەیە پیزکراوہیەکہ لەجۆری $m \times m$. تیرەیی سەرەکی **Main diagonal** لە پیزکراوہی چوارگوشەیییدا ئەو تیرەییە کہ گۆشەیی سەرەوہی لای چەپ بە گۆشەیی خوارەوہی لای راست دەگەینێت.

پیزکراوہی یەکہ Unit matrix ئەو پیزکراوہیە کہ ھەموو دانەکانی سفرە جگە لەو دانەیی دەکەونە سەر تیرەیی سەرەکی کہ (I) ن. تەنھا یەکہ پیزکراوہی یەکہ بۆ ھەموو جۆریکی $n \times n$ لە جۆرەکانی پیزکراوہی چوارگوشەیی ھەیە.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ لە } I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ بۆجۆری } 3 \times 3 \text{ بریتییە لە}$$

لە لیکدانی پیزکراوەکاندا. پیزکراوہی یەکہ لە پلەییەکی دیارکراو ھەمان پۆلی 1 دەبینێت لە لیکدانی ژمارەکاندا. ئەگەر A پیزکراوہیەکی چوارگوشەیی پلە $m \times m$ بێت ئەوا $AI_m = I_m A = A$

$$\text{ئەگەر } A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ ئەوا:}$$

$$AI_2 = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \times 1 + 7 \times 0 & 5 \times 0 + 7 \times 1 \\ -1 \times 1 + 4 \times 0 & -1 \times 0 + 4 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = A$$

$$I_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 0 \times (-1) & 1 \times 7 + 0 \times 4 \\ 0 \times 5 + 1 \times (-1) & 0 \times 7 + 1 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = A \text{ و}$$

لەبەرئەوہی دەتوانرێت پیزکراوہیەکی چوارگوشەیی لەخۆی بدرێت. دەتوانین ئەم کردارە چەندجارێک دووبارە بکەینەوہ و ھیزی پیزکراوہکەمان دەستبەکەوێت.

ھێژەکانی پیزکراوہی چوارگوشەیی

4 نموونە

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

ئەگەر توانرا ئەمانە ھەژماریکە.

$$A^2 \quad \text{ا}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \times 7 + 3 \times (-2) & 7 \times 3 + 3 \times 0 \\ -2 \times 7 + 0 \times (-2) & -2 \times 3 + 0 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 21 \\ -14 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B^2 \quad \text{ب}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 4 \times 5 + 1 \times 1 & 2 \times 4 + 4 \times 0 + 1 \times (-1) & 2 \times 1 + 4 \times (-2) + 1 \times 3 \\ 5 \times 2 + 0 \times 5 + (-2) \times 1 & 5 \times 4 + 0 \times 0 + (-2) \times (-1) & 5 \times 1 + 0 \times (-2) + (-2) \times 3 \\ 1 \times 2 + (-1) \times 5 + 3 \times 1 & 1 \times 4 + (-1) \times 0 + 3 \times (-1) & 1 \times 1 + (-1) \times (-2) + 3 \times 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25 & 7 & -3 \\ 8 & 22 & -1 \\ 0 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

4. ھەرىكەت ھەم پىزىكراۋانە ھەمىيارىكە (ئەگەر تۈرانرا)



د I^4

ج B^3

ب A^3

ا C^2

بىرىكەۋە ۋ تۈتۈپكە

1. پۈتۈپكەۋە چى پۈتۈپكەۋە كاتىك ھەۋلى دۆزىنەۋە دانەى يەكەمى ئەنجامى لىكدانى AB دەدەيت ئەگەر جۆرى ھەردو پىزىكراۋەكە 2×3 بىت.

2. ئايا لىكدانى پىزىكراۋەكان كرادارى

ئالگوپ. نمونە بىنەۋە بۇ

پالپىشتى ۋەلامەكەت.

3. A پىزىكراۋەكە جۆرەكە 4×2

ئايا دەتۈانیت A^2 ھەمىيارىكەيت؟

ھۆيەكەى پۈتۈپكەۋە.

4. پىكخەرىكە ئەم خىشتەيە

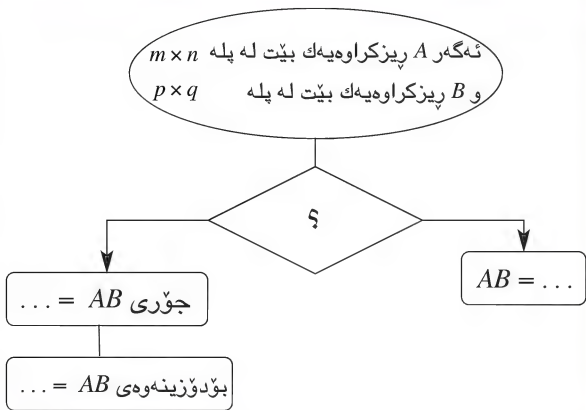
دروستىكەۋە، پاشان تەۋاۋى بىكە

پرسىيارىك لەناۋ مەعىنەكەدا

بنووسە. ۋەلامەكەى يارمەتیت بدا

بە ئاراستەى راست ۋ چەپدا بىرۈیت

پاشان ھىلكارىيەكە تەۋاۋىكە بۇ پۈتۈپكەۋە لىكدانى پىزىكراۋەكان.



راھىنەكان

2-3

راھىنەكانى ئاراستەكراۋ

1 زاراۋەكان پىزىكراۋەكە لە جۆرى 2×2 ، ھەمو دانەكانى 1 بىت برىتپىيە لە (پىزىكراۋەى چوارگۆشەيىيەكان يان پىزىكراۋەى يەكە).

دىارىبىكە كە ئەگەر لىكدانى ئەمانە پىنئاسەكراۋە. جۆرەكەى دىارىبىكە ئەگەر ۋابو.

4 $C_{9 \times 5} D_{5 \times 9}$

3 $B_{5 \times 3} A_{4 \times 5}$

2 $A_{4 \times 5} B_{5 \times 3}$

7 $F_{2 \times 6} E_{6 \times 2}$

6 $E_{6 \times 2} F_{2 \times 6}$

5 $D_{5 \times 9} C_{9 \times 5}$

2 ئەم پىزىكراۋانە بەكاربىنە بۇ ۋەلامدانەۋەى پرسىيارەكانى 8 تا 13. ئەنجامى لىكدانى ھەمىيارىكە (ئەگەر تۈرانرا)

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & 10 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

13 IB

12 BI

11 DC

10 CB

9 CA

8 BA

14 دووبارە دروستكردنەۋە خويىندىكارانى ئامادەى سلىمانى ھەلدەستىن بە كۆكردنەۋەى ئەۋ كەرەستانەى كە دەتۈانرېت بەكاربېھىنرېنەۋە بۇ دروستكردن. بە مەبەستى فروشتىن ۋ خەرج كىردىن لە ئاھەنگى كۆتايى سالى خويىندىدا. خىشتەى يەكەم ئەۋ كەرەستانە پىشان دەدات كە خويىندىكاران لەماۋەى سى ھەفتەدا كۆيانكردۇتەۋە خىشتەى دوۋەم بىرى ئەۋ پارانە پىشان دەدات كە لەبىرى ھەر كىلۇگرامىك لە جۆرە جىاۋازەكان ۋەريانگرتوۋە. لىكدانى پىزىكراۋەكان بەكاربىنە بۇ دۆزىنەۋەى بىرى ھەمو ئەۋ پارانەى كە لە بىرى كۆكردنەۋەى ھەر جۆرە كەرەستەيەك ۋەرىدەگرن.

بەشى 3 پىزىكراۋەكان

نرخه‌كان به‌هزاران دینار				
هه‌فته	شوشه	قوتوو	پۆژنامه	كاغهز
1	20	700	20	1060
2	20	550	10	1000
3	10	420	20	1030

كۆمه‌له‌ كهره‌سته‌كان			
جۆر	هه‌فته‌ی 1	هه‌فته‌ی 2	هه‌فته‌ی 3
شوشه	29	25	16
قوتوو	8	11	6
پۆژنامه	163	127	206
كاغهز	53	107	84

ئهم ریزکراوانه به‌کاربێنه بۆ شیکارکردنی پرسیاره‌کانی 15 تا 18. هه‌ره‌یێک له‌مانه هه‌ژماریکه (ئه‌گه‌ر توانرا)

4 پروانه نمونه

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

B^2 18

C^2 17

A^3 16

A^2 15

راهیان و شیکارکردنی پرسیاره‌كان

دیاریککه که ئه‌گه‌ر لیکدانی ئه‌مانه پێناسه‌کراوه جۆره‌که‌ی دیاریککه ئه‌گه‌ر وابوو.

$C_{3 \times 5} D_{5 \times 1}$ 21

$B_{2 \times 3} A_{2 \times 1}$ 20

$A_{2 \times 1} B_{2 \times 3}$ 19

$F_{6 \times 7} E_{7 \times 7}$ 24

$E_{7 \times 7} F_{6 \times 7}$ 23

$D_{5 \times 1} C_{3 \times 5}$ 22

راهیانی سه‌ریه‌ست	
شیکاری	سه‌یری
پرسیاره‌كان	نمونه‌ی
1	24-19
2	29-25
3	30
4	40-31

ئهم ریزکراوانه به‌کاربێنه بۆ شیکارکردنی پرسیاره‌ی 8 تا 13. ئه‌نجامی لیکدانه‌که هه‌ژماریکه (ئه‌گه‌ر توانرا)

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 7 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

CI 29

IC 28

CB 27

CA 26

AB 25

30 ده‌رخسته (جبرده) دوکانێک دوو پێوانه‌ی جیاوازی سندوقی صابون ده‌فرۆشێت. خشته‌ی یه‌که‌م له‌ خواره‌وه‌دا کۆمه‌له‌ی دانه‌کانی هه‌ردوو جۆر سندوقه‌که‌ پێشان ده‌دا که دوو لقی جیاوازی له‌قه‌کانی دوکانه‌که‌و. خشته‌ی دووهم داها و تیچوون و قازانجی هه‌ر لقی له‌قه‌کانی دوکانه‌ پێشان ده‌دا، له‌هه‌ر پێوانه‌یه‌ک له‌ پێوانه‌کانی سندوقه‌کان. تیچوونی گشتی هه‌ژماریکه.

داها و تیچوون و قازانج			
قازانج	تیچوون	داها	
55 000	75 000	130 000	پێوانه‌ی ناسایی
80 000	110 000	190 000	پێوانه‌ی گه‌وره‌

کۆمه‌له‌ی دانه‌کانی سندوقه‌که‌ له‌هه‌ردوو لقا		
پێوانه‌ی ناسایی	پێوانه‌ی گه‌وره‌	
7	11	لقی 1
6	8	لقی 2

ئهم ریزکراوانه به‌کاربێنه بۆ شیکارکردنی پرسیاره‌کانی 31 تا 40. به‌سه‌اده‌ترین شیوه‌ بیان نووسه (ئه‌گه‌ر توانرا)

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & 13 & -9 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Q^3 35

S^3 34

T^2 33

B^2 32

S^2 31

$(BA)^2$ 40

$3CB + 2B$ 39

$2BA - C$ 38

BA 37

AB 36

41 **پېشېرېكې پايىسكىل** پېشېرېكې پايىسكىل له سى جۆر قۇناغ كه جياوازن له قورسيدا پېكېدېت، ئەمەش وادەكات كه ئەنجامى ھەر قۇناغېك له ھاوكۆلكەيەك دەدرېت كه رەچاوى قورسى قۇناغەكە و تەمەنى پېشېرېكېكەرەكە بكات. خشتەكەى خواروۋە ئەو خالانە دەنوئېنېت كه ھەريەكە لەو چوار پېشېرېكېكەرە له قۇناغە جياوازمكاندا بەدەستيانھېناۋە. خشتەى دوۋەم ھاوكۆلكەى راستكردنەۋە بۇ ھەر قۇناغېك و ھەر پېشېرېكېكەرە پېشان دەدات.

ھاوكۆلكەى راستكردنەۋە				
قوناغى	گۆران	ھەلۆ	كاۋە	كارزان
1	1.2	1.6	2.0	1.8
2	2.3	2.0	2.8	2.5
3	2.7	2.6	3.2	3.1

خالەكانى ھەر پېشېرېكېكەرەكە لەھەرسى قۇناغدا			
پېشېرېكېكەرە	قوناغى 1	قوناغى 2	قوناغى 3
گۆران	23.0	18.5	19.5
ھەلۆ	24.0	28.5	25.0
كاۋە	19.0	22.0	21.5
كارزان	27.0	26.5	28.0

ا پېدراۋەكان له دوو رېزكراۋەدا رېكېخە. ھەژمارى لېكدانىان بكە.

ب رېزكراۋەى ئەنجامى لېكدانەكان بەكاربېنە بۇ ھەژماركردنى خالەكانى كۇتايى ھەر پېشېرېكېكەرەكە

ج ھۆى چىيە كه وادەكات دانەكانى دەرەۋى تىرە سەرەكېيەكە له ئەنجامى لېكدانەكەدا ھىچ مانايەك نەبەخشن لەم پرسىارەدا؟

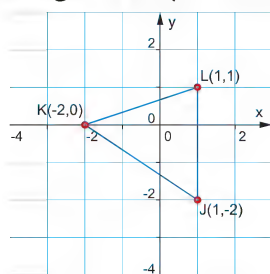
بېرکردنەۋەى رەخنەگرانە ديارىبەكە ئەم دەستەواژانە ھەمىشە دروستن يان ھەندىك جار دروستن يان ھەمىشە نادروستن. وەلامەكەت پروونبەكەۋە.

42 ئەگەر رېزكراۋەى A لەجۆرى 2×3 و رېزكراۋەى B سى رېزى ھەبېت ئەۋا رېزكراۋەى AB پېناسەكراۋە.

43 ئەگەر رېزكراۋەى A لەجۆرى 2×3 بېت و رېزكراۋەى B سى ستوونى ھەبېت ئەۋا رېزكراۋەى AB پېناسەكراۋە.

44 ئەگەر رېزكراۋەى AB پېناسەكراۋەبېت ئەۋا رېزكراۋەى BA پېناسەكراۋە دەبېت.

45 ئەگەر ھەردو رېزكراۋەى AB و BA پېناسەكراۋەبوون ئەۋا ھەردو رېزكراۋەكە چوارگۆشەى دەبن.



ا **بنووسە** رېزكراۋەيەك خالې سەرەكانى سېگۆشەى JKL بنوئېنېت، بەجۆرېك پۆى خالەكان لەسەر رېزى يەكەم و تانى خالەكان لەسەر رېزى دوۋەم بېت.

ب رېزكراۋەى $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ بەكاربېنە بۇ لېكدانى پۆوتانەكانى له 2.

ج وئەنى ئەو سېگۆشەيە بكېشە كه رېزكراۋە نوئېيەكە بنوئېنېت.

47 بەھای x بدۆزەۋە كه وادەكات ھەردو رېزكراۋە يەكسان بن $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & \frac{x}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -19 \\ 24 & -26 \end{bmatrix}$

48 **بنووسە** ھۆى ئەمە چىيەكە وادەكات يەكسان بوونى $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ دروست بېت؟

49 **پېشېرېكېى چىنن** پېشېرېكېى چىنن سى شۆۋەى جياواز له قورسيدا لەخۆدەگرېت. ئەمەش وادەكات ھەر شۆۋەيەك له ھاوكۆلكەيەك بدرېت كه رەچاوى قورسى و تەمەنى پېشېرېكېكەرەكە بكات. خشتەى يەكەمى خواروۋە ئەم خالانە دەنوئېنېت كه ھەريەكى لەو سى پېشېرېكېكەرە بە دەستى ھېناۋە. خشتەى دوۋەم ھاوكۆلكەى راستكردنەۋەى ھەر شۆۋەيەك و ھەر پېشېرېكېكەرەكە دەنوئېنېت.

ھاوكۆلكەى راستكردنەۋە			
شۆۋە	شارا	سازان	دىلان
1	2	3	2
2	3	3	1
3	2	2	1

ئەوخالانەى لېژنەى سەرپرەشتىكردن بۇپېشېرېكېكەرەنى داناۋە			
پېشېرېكېكەرە	شۆۋەى 1	شۆۋەى 2	شۆۋەى 3
شارا	16.5	18.0	17.5
سازان	12.5	14.0	17.0
دىلان	16.0	19.5	18.0

50 **فروشراودگان** خشته‌ی یه‌که‌می خواره‌وه فروشراوی چه‌ند کریکاریکی دوکانیکی پیلاو دهنوینیت خشته‌ی دوهم پرتزه‌ی کوئن و نویی ئەو بره‌ پارویه دهنوینیت که‌هەر کریکاریک له‌بری فروشته‌کانی دهستی ده‌که‌وئیت.

پيژدى پاره		
پيژدى نوئ	پيژدى كوڻ	
9.5%	9%	بو پياوان
10%	9%	بو ژنان
12%	13%	بو مندالان

۱ ئەنجامى لىككەنى ھەردو رېزىكراۋەكە بۆلۈۋە. ئەو بىر پارە چەندە كەھەر كرىكارىك بەپپى رېژەكە ۋەرىدەگىت.

ب کام کریکار لهه موویان سوو دمه ندره به گورینی ریژه ی پاره که؟



ئەو شوئىنە ديارىبەن كه پئويست بوو بوى بچن. ئەو شوئىنەش

دانه کانی پیزکراوهی ئه نجامی
 لیکنانی ئه م دوو پیزکراوه دیاریده که ن.

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -11 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$$

دانه‌ی P_2 شوینی هیلی پانی (باکوور ئه‌گهر دانه موجب و

شوینى هیلې دريژى (روژ هه لآت ئه گهر دانه که موجب و روژ

شوینانه‌ی نه‌خشه‌ی به‌رام‌بهر پیوسته له‌سهریان بیگه‌نیّت.

52 **تۆيى پى** كۆمەلەي ئەو خالانە بدۆزەوہ كەھەر تىيىك بەدەستى ھىناوہ.

خالەكان	جۆرى گۆل
6	لېدنى كۆپنەل
1	لېدنى راسىتەوخۇ
3	گۆلەكان

53 بیرکړنه‌وی په‌څخه‌گرانې پیزکراوې به‌رام‌بهر به‌ښوې لیکدانی پیزکراوېه‌ک که دانه‌کانی ژمارې ته‌واو‌بېن له ژماره‌یه‌کی راستی بنو‌سه.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{4} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

تا مادہ کردن بوقتیکہ در نہ و

54 رېزىكراوى B له جوړى 5×12 . چ مەرچىك له رېزىكراوى C دا هه بىټ بوئوهوى CB پېنساكراوى بىټ؟

١) 5 ستوونی ھبیٲٲ (ب) 12 ستوونی ھبیٲٲ (ج) 5 ریزی ھبیٲٲ (د) 12 ریزی ھبیٲٲ

55 ئەنجامى كام يەككە لەمانە يەكسان نىيە بە سى ئەنجامەكەى تر؟

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \textcircled{\text{د}} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \textcircled{\text{ج}} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \textcircled{\text{ب}} \quad 2 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \textcircled{\text{ا}}$$

56 کام يه کيک له م برانه يه کسانه به دانه ی C_{22} له نهجامی ليکدانی $C = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ ؟

- (ا) $4(-2) + 2 \times 3$ (ب) $7 \times 5 + (-1)8$ (ج) $4 \times 5 + 2 \times 8$ (د) $(-1)3 + 2 \times 8$

57 کورته وه لَام $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ دياريبکه پيزکراوه ی AB يه کسانه به BA يان BA يان هيچ يه کيک له وانه نييه.

بهرهنگاری و فراوانکردن

58 نایا ليکدانی پيزکراوه کان کرداری يه کتر به ستنی تيدايه؟ واته نایا $(AB)C = A(BC)$ وا دابنی

نهجامی ليکدانه کان پينا سه کراوه؟ به نمونه يه ک پالپشتی وه لامه که ت بکه.

59 گویزراوه ی Transpose پيزکراوه ی A بریتیه له پيزکراوه ی A^T که له نهجامی گویزنی هر

پيزيک له پيزهکانی پيزکراوه ی A بهو ستونه ی که هه مان جوړی هه يه. نمونه بؤ شه وش نه گهر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ نهوا گویزراوه که ی بریتیه له پيزکراوه ی } A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

ا نایا ليکدانی پيزکراوه يه که له گویزراوه که ی هه ميشه له توانا دايه؟ وه لامه که ت پرونيکه وه.

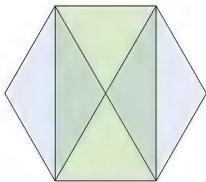
ب پيزکراوه ی $P = AA^T$ بدوزه وه. نه گهر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ نایا پيزکراوه ی P دانهکانی يه کسانى تيدايه؟ کامانه؟

60 هيزهکانی پيزکراوه ی $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ هه ژماريکه. هه موو جاريک دانه ی سر پيزی دوهم و ستونی دوهم

له پيزکراوه ی نهجامه که بنووسه؟ پهيوهندی نيوان بهها يه که له دواى يه کهکانی نهو بههايانه چييه؟

پيداچوونه وه ی لولپيچي

نهخشه دانانی زه خره فو پروکاری دهره وه ی شيو دی بهرام بهر شه شلايه کی ريکه. سيگو شه سهوزه که لايه کسانه. (پولهکانی پيشو)



61 شيوه که چهند جوت گو شه ی سر بهرام بهری تيدايه؟

62 شيوه که چهند سيگو شه ی جوتبوو له گهل سيگو شه سهوزه که ی تيدايه؟

63 شيوه که چهند پارچه راسته هيلی جوتبوو له گهل لاکانی شه شلا ريکه که تيدايه؟

له تهوهری بوشاييه کاند ا نه م خالانه دياريبکه (وانه ی 1.1)

- 64 $(0, 4, -5)$ 65 $(2, 2, 6)$ 66 $(-3, -3, 3)$ 67 $(1, -1, -1)$

نه م برانه ی خواره وه هه ژماريکه نه گهر توانرا کاتيک $S = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.83 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ و $V = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (وانه ی 1.3)

- 68 $S + T$ 69 $V - T$ 70 $4T$

ریزکراوهکان وجیگورکی ئەندازەییەکان

Matrices and Geometric Transformations

بۆچی ئەمە فیژدەبین؟

هونەرەندان ئەم شیوازە بۆ گۆرانکارییە یەك لەدوای یەكەکان بەکار دەهێنن لەکاتی جێبەجێکردنی کارە هونەرییەکانیان (پرسیاری 16)

ئامانجەکان

- ریزکراوهکان بەکار دەهێنن بۆ جیگورکی شیوە ئەندازەییەکان

زاراوهکان

Vocabulary

ریزکراوهی پاکیشان

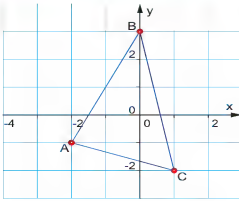
Translation matrix

ریزکراوهی خولانەوه

Rotation matrix

ریزکراوهی وێنەدانەوه

Reflection matrix



لە پووتەختی پۆتانهکاندا دەتوانیت وەسفی شوێن و پروکار و پێوانەی شیوەیەکی ئەندازەیی بەکەیت، بە بەکارهێنانی ئەو جووتە ریکخراوانەی کە سەرەکانی دەنۆین. ئەگەر سیگۆشە بەرامبەر وەرگیریت دەبینیت سەرەکانی بریتین لە $A(-2, -1)$ و $B(0, 3)$ و $C(1, -2)$. دەتوانیت ئەم سیگۆشە بەم ریزکراوه بنوێنیت.

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{پۆی خالەکان } x \\ \text{تانی خالەکان } y \end{array}$$

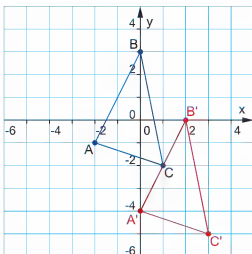
پاکیشان Translation جیگورکییەکی ئەندازەییە خالی $A(x, y)$ دەگۆرێت بۆ خالیکی تری وەک $A'(x', y')$ بە جۆری $x' = x + a$ و $y' = y + b$ (دوو ژمارە راستی نەگۆرن). دەتوانیت پاکیشانی پێشوو بەهۆی ریزکراوهیەکەوه ئەنجام بدریت کە تێدا یە ستوونی $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ بەپێی سەرەکانی شیوە داواکراوەکە دووبارەبێتەوه.

ئەم ریزکراوهیەش پێی دەوتریت ریزکراوهی پاکیشان **Translation Matrix**

بەکارهێنانی ریزکراوهکان بۆ پاکیشانی شیوە ئەندازەییەکان

سیگۆشە ABC رابکێشە کاتی $A(-2, -1)$ و $B(0, 3)$ و $C(1, -2)$ دوو یەكە بۆلای راست و 3 یەكە بۆ خوارەوه. پۆتانی سەرەکانی سیگۆشە وێنەکە هەژماربە پاشان وێنەکە بکێشە.

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{پۆی خالەکان} \\ \text{تانی خالەکان} \end{array}$$



بۆ هەژمارکردنی پۆتانی وێنە سیگۆشە بەو کێشە سەرەوه ئەو ریزکراوهی کە سیگۆشە بنەرەتییەکە دەنۆنێت لەگەڵ ریزکراوهی پاکیشان کۆبکەوه.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+2 & 0+2 & 1+2 \\ -1-3 & 3-3 & -2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

وێنە سیگۆشە ABC بە پاکیشان بریتییە لە $A'B'C'$ کاتی $A'(0, -4)$, $B'(2, 0)$, و $C'(3, -5)$.

1. سیگۆشە ABC رابکێشە کاتی $A(2, 4)$ و $B(3, 1)$ و $C(1, -1)$ 3 یەكە بۆلای راست و یەكە یەكە بۆ خوارەوه، پۆتانی سەرەکانی وێنە سیگۆشە هەژماربە پاشان وێنەکە بکێشە.

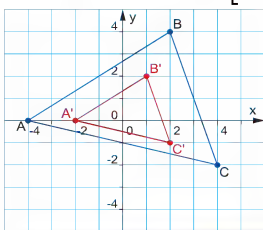


هاورپژدهی ئەندازەیی Dilation ئەو گۆرانیە کە پێوانەیی شێوەکە-وێنەکە دەگۆرێت (بە گەرەکردن یان بچووک کردن) بە شێوەیە کە شێوەکە-وێنەکە هاوشێوەی شێوە-وێنە بێرەتییەکە بێت. لەبیرت بێت شێوە هاوشێوەکان هەمان رۆوکاریان هەیە بەلام پێوانەکانیان جیاوازن. گۆشە بەرامبەرەکان جوت و لایەکانیان هاورپژە دەبن. کاتی کە چەقی هاورپژەبوونە ئەندازەییە کە خاڵی بێرەتی رۆوتەختی پۆتوانەکان بێت. ئەوەندە بەسە ریزکراوی شێوەکە-بێرەتی لە ریزەیی هاورپژەبوونە ئەندازەییە کە بەدین بۆئەو ریزکراوی شێوەکە-وێنەکە دەستبکەوێت. لەم بەشەدا تەنها باسی ئەو هاورپژە ئەندازەییانە دەکری کە چەقیان خاڵی بێرەتی بێت.

نموونه 2 بەکارهێنانی ریزکراوەکان بۆ جیگۆرکی ئەندازەییەکان بە ریزەییەکی ئەندازەیی

سیگۆشەیی ABC کاتی کە $A(-4, 0)$ و $B(2, 4)$ و $C(4, -2)$ بێت بە هاورپژەییەکی ئەندازەیی کە چەقەکەیی خاڵی بێرەتی و ریزەکەیی $\frac{1}{2}$ بێت (بچووک کردنەوه) بگۆرێ. پۆتوانی سەری سیگۆشەیی-وێنەکەیی بدۆزێوه پاشان وێنەکەیی بکێشێ. ریزکراوی سیگۆشەکە لە $\frac{1}{2}$ بدە

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-4) & \frac{1}{2} \times 2 & \frac{1}{2} \times 4 \\ \frac{1}{2} \times 0 & \frac{1}{2} \times 4 & \frac{1}{2}(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{پۆی خاڵەکان} \\ \leftarrow \text{تانی خاڵەکان} \end{matrix}$$



پۆتوانی سەری سیگۆشەیی-وێنەکەیی بریتییە لە $A'(-2, 0)$ و $B'(1, 2)$ و $C'(2, -1)$

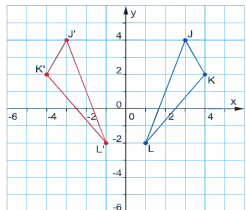
2. سیگۆشەیی ABC کاتی کە $A(2, 3)$ و $B(5, 1)$ و $C(-2, -7)$ بێت، بە هاورپژەییەکی ئەندازەیی کە چەقەکەیی خاڵی بێرەتی و ریزەکەیی $\frac{4}{3}$ بێت (گەرەکردن) بگۆرێ. پۆتوانی سەری سیگۆشەیی-وێنەکەیی بدۆزێوه و پاشان وێنەکەیی بکێشێ.



ریزکراوی وێنەدانەوه **Reflection Matrix** ریزکراوەییە کە گۆران لە وێنەیی شێوە ئەندازەییە کە دەکات بە وێنەدانەوهی بەدەوری تەوهرەییە کەدا. بۆئەو وێنەدانەوهی وێنەیی شێوەییە کە ئەندازەیی دەستکەوێت بەدەوری تەوهرەیی y دا ریزکراوی $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ لە ریزکراوی شێوەکە بدە. **ئەمەش وادەکات پۆی خاڵەکە x بگۆرێت بۆ دژەکەیی $(-x)$.** و تانی خاڵەکە بەبێ گۆران وەك خۆی بهێڵێتەوه.

نموونه 3 بەکارهێنانی ریزکراوەکان بۆ وێنەدانەوهی شێوە ئەندازەییەکان

وێنەدانەوهی سیگۆشەیی JKL کاتی کە $J(3, 4)$ و $K(4, 2)$ و $L(1, -2)$ بەدەوری تەوهرەیی y دا دیاریکە پۆتوانی سەری سیگۆشە-وێنەکەیی بدۆزێوه پاشان وێنەکەیی بکێشێ.



$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

پۆی خاڵەکان لە -1 و تانەکان لە 1 دراوه سەرەکانی سیگۆشە-وێنەکەیی بریتین لە $J'(-3, 4)$ و $K'(-4, 2)$ و $L'(-1, -2)$.

ئاگاداریه!

لێکدانی ریزکراوەکان کرداریکی ئالگۆر نییه لەبەرئەوه دلتیایە کە ریزکراوی گۆراو لە چەپەوه نووسراوه

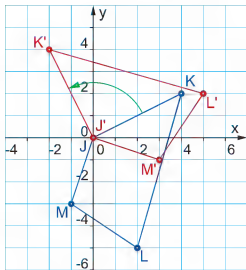
3. بۆئەو وێنەدانەوهی شێوەییە کە ئەندازەیی دەستکەوێت بەدەوری تەوهرەیی x دا ریزکراوی $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ لە ریزکراوی شێوەکە بدە، وێنەدانەوهی سیگۆشەیی نموونەیی 3 بەدەوری تەوهرەیی x دیاریکە پۆتوانی سەری سیگۆشە-وێنەکەیی بدۆزێوه و وێنەکەیی بکێشێ.



پیزکراوهی خولانهوه **Rotation Matrix** پیزکراوهی گۆرانه که وینهی شیوه ئەندازەییەکه مان دەستکەوێت بە خولانهوه. نموونە 4 جوړهکانی پیزکراوهی خولانهوه دەردهخات.

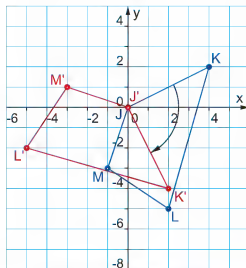
بەکارهێنانی پیزکراوهکان بۆ خولانهوهی شیوه ئەندازەییەکان

ئەم پیزکراوانە بەکاربێنە بۆ گۆڕینی چوارای $JKLM$ کاتیکی $J(0,0)$ و $K(4,2)$ و $L(2,-5)$ و $M(-1,-3)$ ، بێت خولانهوهی بەدهوری خالی بنەرەت. وینهی شیوه-وینهکە بکێشه باسیبکە



$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

وینهکە، وینهی چوارایەکە بە خولانهوهی بەگۆشە 90° بەپێچهوانەی ئاراستەی میلی کاتژمێر چەقی خولانهوهکە خالی بنەرەت بێت.



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

وینهکە، وینهی چوارایەکە بە خولانهوهی بەگۆشە 90° بە ئاراستەی میلی کاتژمێر چەقی خولانهوهکە خالی بنەرەت بێت.

4. پیزکراوهی $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ بەکاربێنە بۆ گۆڕینی سیگۆشە ABC کاتیکی $A(0,0)$ و $B(4,0)$ و $C(0,-3)$ بێت. بە خولانهوهی بە دەوری خالی بنەرەت. شیوهی-وینهکە بکێشه. باسیبکە



بیربکەوه و تاوتویبکە

1. ئەو جیگۆپکی ئەندازەییە که له ئەنجامی لیکدانی پیزکراوهی $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ له پیزکراوهی شیوه ئەندازەییەکە پەیدادەبێت باسیبکە.
2. ئەو گۆرانه پروونکەوه که به سەر پۆی خالەکاندا دێت له پیزکراوهی شیوهییەکی ئەندازەیی کاتیکی به یەکێک لهم پیزکراوانە لیکدەدرێت.
3. ریکخەریبە ئەم خستەیه دروستبکەوه و پاشان تەواوی بکە. Q پیزکراوهی سیگۆشە دەنویێت. لههەر چوارچۆیهکدا برهی پیزکراوهی گونجاو بنوسه.

جیگۆپکی	کردارەکە بەهۆی پیزکراوهوه
پاکێشانی سیگۆشەکه بەستوونی	
پاکێشانی سیگۆشەکه بەئاسۆیی	
گەورەکردن یان بچوک کردنی سیگۆشەکه	
وینهدانەوهکە به دەوری تەوهری صادی	
وینهدانەوهکە به دەوری تەوهری سینی	
خولانهوهی سیگۆشەکه به گۆشە 90° به دەوری خالی بنەرەت به ئاراستەی میلی کاتژمێر	
خولانهوهی سیگۆشەکه به گۆشە 90° به دەوری خالی بنەرەت به پێچهوانەی ئاراستەی میلی کاتژمێر	



رايئاني ئاراستهكراو

1 زاراوهكان ئۇ شۆۋە ئىندازىيەيى كە _____ پەيدايى دەكات ۈك ئۇۋە وايە يەككەك لە تەۋەرەكان

دەۋرى ئاۋىئەيەك بېيىت. (رېزىكراۋى ۋىئەدانەۋە يان رېزىكراۋى پاكىشان)

۱ پروانە ئىۋونە ويئەنى چۈرلەي $ABCD$ كاتىك $A(-2, 4)$ ۋ $B(3, 1)$ ۋ $C(1, -4)$ ۋ $D(-2, -2)$ بىت لەژىر كارى كىشانەۋى دىارىكراۋ لە پىرسىارى 2 ۋ 3 دا دىارىكراۋ. پۇۋتانى سەرەكانى ۋىئەكەي بدۆزەۋە ۋ ويئەنى بىكىشە.

2 دوو يەكە بەرەۋ لاي چەپ ۋ يەك يەكە بۇ سەرەۋە.

3 يەك يەكە بەرەۋ لاي راست ۋ سىفر يەكە بۇ خوارەۋە.

2 پروانە ئىۋونە رېزىكراۋ بەكاربىئە بۆگەۋرەكردن يان بچوۋكردنەۋى چۈرلەي $ABCD$ كاتىك $A(-2, 4)$ ۋ $B(3, 1)$ ۋ $C(1, -4)$ ۋ $D(-2, -2)$ بەيى ئۇ رېژەيەي لەپىرسىارى 4 ۋ 5 دا دىارىكراۋ. پۇۋتانى سەرەكانى شۆۋە-ۋىئەكە بدۆزەۋە ۋ ويئەنى بىكىشە

4 بچوۋكردنەۋى چۈرلەيەكە بە رېژەي 0.5

5 گەۋرەكردنى چۈرلەيەكە بە رېژەي 2

3 پروانە ئىۋونە ويئەنى چەندلەي $ABCDE$ كاتىك $A(-2, 3)$ ۋ $B(0, 4)$ ۋ $C(2, 3)$ ۋ $D(2, 1)$ ۋ $E(-1, -1)$ بىت ۈك لە پىرسىارى 6 ۋ 7 دا دىارىكراۋ دىارىيەك. پۇۋتانى سەرەكانى شۆۋە-ۋىئەكە بدۆزەۋە. ۋىئەكەي بىكىشە.

6 ۋىئەدانەۋەكەي بەدەۋرى تەۋەرى y

7 رېزىكراۋى $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ بەكاربىئە بۇ دۆزىنەۋى ۋىئەنى چەندلەيەكە بە ۋىئەدانەۋە بەدەۋرى راستەيلى $y = x$.

4 پروانە ئىۋونە رېزىكراۋ بەكاربىئە بۇ دۆزىنەۋى ۋىئەنى چۈرلەي $LMNO$ كاتىك $L(1, 3)$ ۋ $M(4, 2)$ ۋ $N(1, 1)$ ۋ $O(1, -1)$ بىت بەخولانەۋەيەك كە رېزىكراۋەكەي لە پىرسىارى 8 ۋ 9 دا راۋە. پۇۋتانى سەرەكانى شۆۋە-ۋىئەكە بدۆزەۋە ۋ ويئەكە بىكىشە.

8 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 9 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

جىبەجىكردنەكان

10 ويئەنى پاكىشانى چۈرلەي $ABCD$ كاتىك $A(0, 4)$ ، $B(-3, -1)$ ، $C(1, -5)$ ، $D(1, 0)$ بە 3 يەكە بۇلای راست ۋ 3 يەكە بۇ سەرەۋە. پۇۋتانى سەرەكانى شۆۋە-ۋىئەكە بدۆزەۋە ۋ ويئەكە بىكىشە.

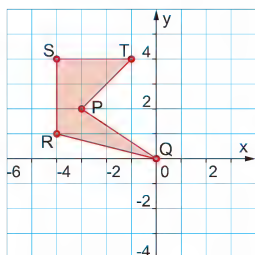
11 ويئەنى چۈرلەي $ABCD$ بدۆزەۋە كاتىك $A(1, 2)$ ، $B(-2, 3)$ ، $C(-3, 4)$ ، $D(-4, 1)$ بىت بەھاۋرېژەيەكى ئىندازەيى چەقەكەي خالى بىنەپەت بىت ۋ رېژەي $\frac{3}{2}$ بىت پۇۋتانى سەرەكانى شۆۋە-ۋىئەكە بدۆزەۋە ۋ ويئەكە بىكىشە.

12 ۋىئەدانەۋە چەندلەي $ABCDE$ بدۆزەۋە كاتىك $A(-2, 3)$ ، $B(0, 4)$ ، $C(2, 1)$ ، $D(2, 1)$ ، $E(-1, -1)$ بەدەۋرى تەۋەرى x . پۇۋتانى سەرەكانى شۆۋە-ۋىئەكە بدۆزەۋە ۋ ويئەكە بىكىشە.

رېزىكراۋ بەكاربىئە بۇ دۆزىنەۋى ۋىئەنى چەندلەي $PQRST$ كاتىك $P(-3, 2)$ ۋ $Q(0, 0)$ ۋ $R(-4, 1)$ ۋ $S(-4, -4)$ ۋ $T(-1, 4)$ بىت بەخولانەۋەيەك كە رېزىكراۋەكەي لە پىرسىارى 13 ۋ 14 دا راۋە پۇۋتانى سەرەكانى شۆۋەي-ۋىئەكە بدۆزەۋە ۋ ويئەكە بىكىشە.

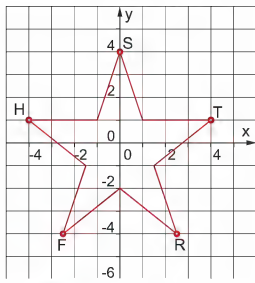
13 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 14 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

رايئانى ئازاد	
بۇ شىكارى	تەماشاي
رايئانى	نمونه
1	10
2	11
3	12
4	14-13



15 **نەخشە كېڭەش** چنار نەخشە ئارمىكى بۇ يانەى ژىنگە پارىزى خويندنگا كەيان دارشت لە شىۋەى

ئەستىرەى دەريادا. پۇتوانى سەرەكانى ئەستىرەكە برىتىن لە $R(2.5, -4), T(4, 1), S(0, 4)$ $H(-4, 1) F(-2.5, -4)$



ا رىزىكراۋەى $\begin{bmatrix} 0.81 & -0.59 \\ 0.59 & 0.81 \end{bmatrix}$ بەكارىيە بۇ خولانەۋەى ئەستىرەكە

بە رىزەى $\frac{1}{10}$ ى خولەككى تەۋاۋ بە دەۋرى خالىى بنەرەت. پۇتوانى سەرەكانى ئەستىرەى-ۋىنەكە بۇ نىزىكترىن نىۋەى يەكە نىزىكەۋە.

ب ئايا ئەستىرەكە بە ئاراستەى مىلى كاترۇمىر خولانەۋەى يان بە پىچەۋانەى ئەۋ رۈۋىكەۋە.

نىگار بۇ خشت رىزىكرەى كارىكى ھونەرى ۋىنەى شىۋە بنەرەتتەكە دەكشەرىت پاشان بەھۋى گۇرانى ئەندازەى چەندجارىك گۇرانى بەسەردا دەكەن تاهەموۋ ئەۋ رۈۋەرە بگرىتەۋە كەپپۇستە خشتىرپىزى بىرەت بى ئەۋەى ھىچ بۇشايەكە يان زىادەپۇۋى ھەبىت ھونەرمەندىك ۋىنەى ئەۋ شىۋەى لاي چەپى دروستكرە.

ا ھونەرمەندەكە شىۋەكەى گۇرپى بە خولانەۋەى بە گۇشەى 180°

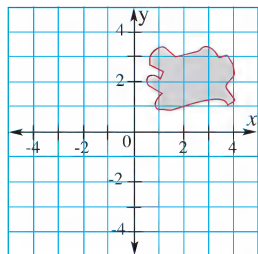
بەدەۋرى خالىى بنەرەت. رىزىكراۋەى ئەم گۇرپانە بنۈوسە.

ب پۇتوانى ھەر چۈار سەرەكەى شىۋەكە پاش گۇرپانەكە بنۈوسە.

ج پاشان ھونەرمەندەكە ھەستا بە راکىشەنى ئەۋ ۋىنەىيەى دەستى كەۋتۈۋە بە 4 يەكە بۇ سەرەۋە 2 يەكە بۇلاى راسە.

د پۇتوانى سەرەكانى شىۋەكە لە ئەنجامى ئەم راکىشەنە بدۇزەۋە.

ه لە رۈۋەختى پۇتوانەكاندا ۋىنەى شىۋە بنەرەتتەكە ۋ شىۋەى كۇتايى بكىشە.

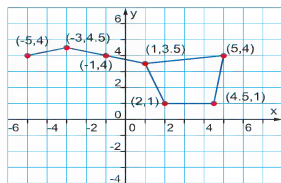


17 **بىرى رەخنەگر** $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ئەنجامى لىكەنى رىزىكراۋەى T لە رىزىكراۋەى شىۋەىيەكى

ئەندازەى رۈۋىكەۋە. پاشان ئەنجامى لىكەنى T لە ئەنجامى لىكەنى پىشۈۋ رۈۋىكەۋە.

ۋىنەى رۈۋىكرەنەۋەى بەرامبەر ئەستىرەى ۋرچى گەۋرە دەنۋىتتە. رىزىكراۋەىكە بنۈوسە پۇتوانەكانى

ۋىنەكە بنۋىتتە پاشان پۇتوانەكانى ۋىنەى ئەم بارانە بدۇزەۋە.



18 كشانى 2 يەكە بۇ سەرەۋە.

19 كشانى يەكە يەكە بۇ خوارەۋە، 3 يەكە بۇلاى چەپ.

20 گەۋرەكرەنەك بە رىزەى 2.

21 ۋىنەدانەۋە بە دەۋرى تەۋەرەى x .

22 خولانەۋەىكە بە دەۋرى خالىى بنەرەت بە گۇشەى 90° بە ئاراستەى مىلى كاترۇمىر.

23 خولانەۋەىكە بە دەۋرى خالىى بنەرەت بە گۇشەى 90° بە ئاراستەى پىچەۋانەى مىلى كاترۇمىر.

24 **بنۈوسە** ئەنجامى لىكەنى رىزىكراۋەى $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ لە رىزىكراۋەى شىۋەىيەكى ئەندازەى.

25 رىزىكراۋەى ئەۋ گۇرپانە ئەندازەىيە بنۈوسە كە نەخشەى $f(x)$ دەگۇرپت بۇ نەخشەى $h(x) = -f(x)$

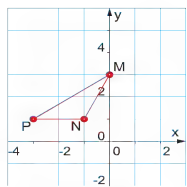
ۋ رىزىكراۋەى ئەۋ گۇرپانەى دەگۇرپت بە $g(x) = f(-x)$

ا رىزىكراۋەى ۋىنەى بەرامبەر بنۈوسە.

ب رىزىكراۋەى $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ لە رىزىكراۋەى سىگۇشەكە بدە.

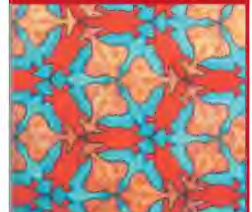
ج ۋىنەى سىگۇشە تازەكە بە بەكارھىنانى رىزىكراۋەى ئەنجامەكە بكىشە. باسى سىگۇشەكە بكە

د ھەنگاۋى ب و ج بەسەر سىگۇشە تازەكەدا جىبەجىبەكە، چى دەربارەى سىگۇشەى سىيەم دەلەيت.



دەروازەىكە

مىژۋى ھونەر



ھونەرمەندى بەناۋبانگ
ئىشەر (1898 - 1972) شىۋە
ئەندازەىيە ھاۋجىكانى
گۇرپۈتە سەر شىۋەى
چۆلەكە ۋ خىشۇكەكان ۋ
شىۋەيتەر.



27 سەرچۆن ھەستا بە گۆرپىنى شۆۋەيەكى ئەندازەيى، بە پېژەيەكى ئەندازەيى بە دوايدا خولانەوھەيك بە دەورى خالى بىنەپەت بە ئارپاستەي مىلى كاتژمىر بە گۆشەي 90° بە دوايدا وېنەدانەوھەيك بە دەورى تەوھرى y. كام زنجىرە لەمانە ئەو گۆرپانە يەك لە دواي يەكە دەنوئىت.

- Ⓐ لىكدانى پىزكراوھەكە لە ژمارە، كۆكردنەوھى دوو پىزكراوھەكە، لىكدانى دوو پىزكراوھەكە.
 Ⓑ لىكدانى پىزكراوھەكە لە ژمارە، لىكدانى دوو پىزكراوھەكە، لىكدانى دوو پىزكراوھەكە.
 Ⓒ كۆكردنەوھى دوو پىزكراوھەكە، لىكدانى دوو پىزكراوھەكە، كۆكردنەوھى دوو پىزكراوھەكە.
 Ⓓ لىكدانى دوو پىزكراوھەكە، كۆكردنەوھى دوو پىزكراوھەكە، لىكدانى پىزكراوھەكە لە ژمارە.
 28 ئەنجامى لىكدانى پىزكراوھى شۆۋەيەكى ئەندازەيى لە پىزكراوھى $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ چى دەبىت؟

- Ⓐ گەورەكردنى شۆۋەكە؛ پاشان خولانەوھە بە دەورى خالى بىنەپەت بە گۆشەي 90° بە ئارپاستەي مىلى كاتژمىر.
 Ⓑ بچوككردنى شۆۋەكە؛ پاشان خولانەوھى بە دەورى خالى بىنەپەت بە گۆشەي 90° بە پىچەوانەي مىلى كاتژمىر.
 Ⓒ بچوككردنى شۆۋەكە؛ پاشان وېنەدانەوھى بە دەورى تەوھرى x.
 Ⓓ گەورەكردنى شۆۋەكە؛ پاشان وېنەدانەوھى بە دەورى تەوھرى y.

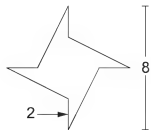
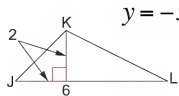
29 كام يەككە لەم پىزكراوانە بەكاردەھىنرەت بۆ جىگۆرپكىي شۆۋەيەك بە خولانەوھە بە دەورى بىنەپەت بە گۆشەي 180°

Ⓐ $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ Ⓑ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ Ⓒ $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ Ⓓ $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

بەرەنگارى و فراوانكردن

30 كام پىزكراوھە بەكاردەھىنرەت بۆ گۆرپىنى شۆۋەيەك بە وېنەدانەوھى بە دەورى راستەھىلىي $y = -x$

31 سىگۆشەي بەرامبەر لە پووتەختى پۆتانەكاندا بكىشە و پىزكراوھەيكە بنووسە.



- Ⓐ چۆن ئەم سىگۆشەيە دەگۆرپەت بۆ دەستكەوتنى شۆۋەكەي تر؟
 Ⓑ پىزكراوھەكان بەكاربىنە بۆ ھەستان بەم گۆرپانە. پۆتانى ھەر جوار سەرى شۆۋەكەي-وېنەكە بنووسە.

32 شۆۋەيەكى ئەندازەيى بە جىگۆرپكىي بگۆرە بە پىي ئەم پىزكراوھەيە $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ باسى ئەو جىگۆرپكىيە بكە.
 چى روودەدات ئەگەر ئەو شۆۋەيە چەندجاريك بەو جىگۆرپكىيە بگۆرپن.

پىداچوونەوھى لوولپىچ

11	8	5	2	كارتەكان
192 500	140 000	87 500	35 000	تېچوون

33 دىارىبكە پىدراوھەكانى ئەم خىشتەيە وەك نەخشەيەكى ھىلى پىناسەدەكات (پۆلەكەي پىشۇ)

دىارىبكە نايە ئەم جووتە پىكخراوانە شىكارن بۆ سىستەمى ئەم لاسەنگانە (وانەي 2-3)

$$\begin{cases} y > 0 \\ y \geq 2x - 11 \\ 5x + y < 5.5 \end{cases} (0, 5) \quad 35 \quad \begin{cases} y > 2x - 8 \\ y \leq \frac{1}{4}x + 2 \end{cases} (2, -4) \quad 34$$

ئەمانە ھەژماربەكە ئەگەر تۈانرا (وانەي 2-3)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad 38 \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad 37 \quad \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad 36$$

سنووردهرهكان و پيساي گرامر

Determinants and Cramer's Rule

4-3



كى نهمه بهكاردههينيت؟

شارهزايانى بواري خواردنى وهرزكاران پيوستيان بهشيكاركردى هاوكيشه هينيهكان بو دياريكردنى نهو بره گهرموكيانه و پپوتين و چهورى و كاربوهدرات كه پيوسته له خواردنهكپاندا ههينيت.

نامانجهكان

- ههژماركردى سنووردهرى
- ريزكراوهى 2×2 يان 3×3 دهكا.
- سسته مى هيلى شيكاردهكات به بهكارهينانى پيساي گرامر.

زاراوهكان Vocabulary

سنووردهر
Determinant

ريزكراوهى هاوكولكهكان
Coefficient matrix

پيساي گرامر
Cramer's rule

زانايانى بيركارى ريزكراوه چوارگوشهيهكان و ژمارهكان جوت دهكن. به مهرجيك ههر ريزكراوهيهكى

چوارگوشهيه بهرامبر ژمارهيهكى راستى بيت كه پيى دهوتريت سنووردهرى ريزكراوه Determinant .

هيمى $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ بهكاردههينيت بو دهرخستنى سنووردهرى ريزكراوهى $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. سنووردهرى ريزكراوهيه روليكى گرنگى ههيه. ههروهك لهمهودا دهيبينيت.

سنووردهرى ريزكراوهى 2×2

بهجهبرى	بهژماره	بهنووسين
$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ $= ad - bc$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ $= (1)(4) - (3)(2) = -2$	سنووردهرى Determinant ريزكراوهى $ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ پيناسه دهكرت.



دۆزينهوهى سنووردهرى ريزكراوهى 2×2

1 نمونه

سنووردهرى ريزكراوهكه بدۆزهوه.

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} \text{ ا}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 6 \times 3 - 5 \times 8$$

ئهنجامى ليكدانى دوو نيوانهكه له ئهنجامى ليكدانى دوو لايهكه دهرىكه.

سنووردهرى ريزكراوهكه دهكات 22- .

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -6 & 3 \end{vmatrix} \text{ ب}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \times 3 - \frac{2}{3}(-6) = 1 + 4 = 5$$

سنووردهرى ريزكراوهكه دهكات 5.

1. سنووردهرى ريزكراوهكه بدۆزهوه.



$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 4 & 2\pi \end{vmatrix} \text{ ج}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 3 \\ \frac{5}{6} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} \text{ د}$$

$$\begin{vmatrix} 0.2 & 30 \\ -0.3 & 5 \end{vmatrix} \text{ ه}$$

دەتوانیت سنووردەرەکان بەکاربھێنی بۆ شیکاری سیستمی ھاوکێشە ھێلییەکان. بۆ شیکاری سیستمی

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \text{ دەستپێکە بە نووسینی پیزکراوەی } \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \text{ کەپێی دەوتریت پیزکراوەی ھاوکۆلەکان}$$

Coefficient matrix پاشان سنووردەری D بدۆزەو ھەردوو سنووردەری لەگەڵ دۆزینەو

$$Dy = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \text{ و } Dx = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ ، ئیستاش پێسای گرامەر وەك لە خوارەودا دراوە بەکاربھێنە.}$$

پێسای گرامەر بۆ سیستمی 2×2

ئەگەر سنووردەری پیزکراوەی ھاوکۆلەکان D جیاوازییەت لە 0، ئەوا سیستمی $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ تەنھا یەك شیکاری ھەیە کە بریتییه لە $x = \frac{Dx}{D}$ و $y = \frac{Dy}{D}$ ، کاتیك $Dx = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ و $Dy = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

دەتوانیت سنووردەرەکانی D و Dx و Dy بەکاربھێنیت بۆ ئەوەی بزانیست سیستمەكە سنوورداری (تەنھایەك شیکاری ھەیە) یان ستمە (شیکاری نییە) یان بێسنوورە (ژمارەیکە بێسنوور شیکاری ھەیە). لەو پۆلینکردنە دیت وا دادەنێین کە a_1 و b_1 سفرنن لە ھەمان کاتدا، و a_2 و b_2 سفرنن لە ھەمان کاتدا.

پۆلینکردنی سیستمی دوو ھاوکێشە ھێلی دوو نەزانراو		
ئەگەر $D \neq 0$ و $Dx \neq 0$ و $Dy \neq 0$ ئەوا سیستمیکە سنووردارە	ئەگەر $Dx = Dy = D = 0$ ئەوا سیستمیکە بێسنوورە.	ئەگەر $D = 0$ و $Dx \neq 0$ یان $Dy \neq 0$ ئەوا سیستمیکە نەستەمە.

شیکاری سیستمی ھێلی 2×2 بە بەکارھێنانی پێسای گرامر

شیکارکردنی سیستمی ھێلی بە بەکارھێنانی پێسای گرامر.

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - y = -1 \end{cases} \quad \text{1}$$

ھەنگاوی 1 سنووردەری پیزکراوەی ھاوکۆلەکان بدۆزەو.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 2(-1) = 1 \quad \text{سیستمیکە سنووردارە چونکە } D \neq 0$$

ھەنگاوی 2 بەھای ھەر نەزانراویك ھەژماریکە. بە بەکارھێنانی پێسای گرامەر.

$$Dy = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \quad \text{و} \quad Dx = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

شیکار بریتییه لە $(-4, -7)$.

$$\begin{cases} y-2=3x \\ 3x-y=7 \end{cases} \quad \text{ب}$$

هەنگاوی 1 سیستەمە بە شێوە گشتیەکی بنووسە.

$$\begin{cases} 3x-y=-2 \\ 3x-y=7 \end{cases}$$

هەنگاوی 2 سنووردەری پێزکراوەی هاوکۆلەکان بدۆزەو.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - 3(-1) = 0$$

هەنگاوی 3 Dx هەژمار بکە.

لەبەر ئەوەی $D=0$ ، $Dx \neq 0$ ، $Dy \neq 0$ ئەوا سیستەمە ئەستەمە.

$$Dx = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 9$$

$$Dy = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 27$$

پۆشنایی

ئەگەر $D=0$ و
 $Dx=0$ ئەوا پێویستە
 Dy بدۆزیتەو بۆ ئەوەی
 بپار لەسەر سیستەمە
 بەدەی کە ئەستەمە یان
 سەربەخۆیە.

$$\begin{cases} 6x-2y=14 \\ 3x=y+7 \end{cases}$$

2. بە بەکارهێنانی پێسای گرامر سیستەمە شیکاربکە.



بۆ ئەوەی پێسای گرامر بۆ شیکارکردنی سیستەمی هێڵی 3×3 بەکاربێنیت. پێویستە
 هەژماری سنووردەری پێزکراوەکانی پله 3×3 بکەیت. ئەم هێڵکارییە خوارەو یەکێکە لە
 پێگاکان بۆ ئەنجامدانی ئەم کارە.

دوو ستوونی یەکەم لەلای راستی سنووردەرەکی
 بنووسە. ئەنجامەکانی لێکدانی ژمارەکانی هەر تیرەییەکی
 سوور **کۆیکەو**. پاشان سەرجهمی ئەنجامەکانی
 لێکدانی هەر تیرەییەکی شینی **لێدەرکە**.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} c_3 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} c_2 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} c_1$$

$$a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - (a_3 b_2 c_1 + b_3 c_2 a_1 + c_3 a_2 b_1)$$

هەژمارکردنی سنووردەری پێزکراوەی 3×3

3 **نمونه**

سنووردەری پێزکراوەی $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 10 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ بدۆزەو.

سنووردەرەکی بنووسە پاشان دوو ستوونی
 یەکەم لەلای راستی سنووردەرەکی بنووسە:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 10 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

هەنگاوی 1 هەژماری ئەنجامی لێکدانى ھەرتیرەھەیکى بەرھەزىرەكە و ئەنجامیان كۆیکەوہ $(4)(10)(-1) + (-2)(1)(2) + (0)(-3)(6) = -44$

هەنگاوی 2 هەژماری ئەنجامی لێکدانى ھەرتیرەھەیکى بەرھەزىرەكە و ئەنجامیان كۆیکەوہ $(2)(10)(0) + (6)(1)(4) + (-1)(-3)(-2) = 18$

هەنگاوی 3 ئەنجامى دووہم لە ئەنجامى یەكەم دەریكە $-44 - 18 = -62$

سنووردەرى پیزكراوہى A دەكاتە -62. بەبژمێرەكەت ساغ بكەوہ.

3. سنووردەرى پیزكراوہى $A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \\ 10 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ بدۆزەوہ. خالى جاويدارى

دەتوانين پيساي گرامر فراوان بكەين بۆئەوہى سستەمى ھيلى 3x3 بگريتەوہ.

پيساي گرامر بۆ سستەمى 3 x 3

ئەگەر سنووردەرى ريزكراوى ھاوكلەكەكان جياوازين لە سفر ئەوا سستەمى: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$

تەنھا يەك شىكاري ھەيە $Dz = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$ و $Dy = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ و $Dx = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ و $z = \frac{Dz}{D}$, $y = \frac{Dy}{D}$, $x = \frac{Dx}{D}$

كاتيک $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ھيماى سنووردەرى ھاوكلەكەكان بێت.

ئەگەر $D \neq 0$ ئەوا سستەمىكى ديارىكراو دەبێت.

ئەگەر $D = 0$ و ھيچ كام لە سنووردەرەكانى يەكسان نەبێت بە سفر ئەوا سستەمىكى ئەستەمە.

ئەگەر $D = 0$ و يەكێك لە سنووردەرەكانى يەكسان بێت بە سفر ئەوا سستەمىكى ناديار دەبێت.

جيبەجیكردن لەسەر خۆراكزانى

نمونه 4



گەرمۆكە لەھەر گرامێكدا	
خۆراك	گەرمۆكە
پپۆتین	4
كاربۆھیدرات	4
چەورى	9

يەكێك لە شارەزايانى خۆراك ئيش لەسەر دارشتنى سېستەمى خۆراكى ياريزانانى تۆبى پى دەكات. لەم سېستەمەدا داوا لە ياريزانان دەكات 3600 گەرمۆكە بەكاربېئىن لە بپى 750 g خۆراكى پۆژانە سەرچاوى ئەم گەرمۆكەيە پېويستە بپى پپۆتین و چەورى 60% ى كۆى گەرمۆكەكان بێت. چەند گرام لە پپۆتین و كاربۆھیدرات و چەورى پېويستە لەم سېستەمەدا.

ئەم سستەمە خۆراكیە پێكھاتووہ لە p گرام پپۆتین و c گرام كاربۆھیدرات و f گرام چەورى.

كۆى گەرمۆكەكان $4p + 4c + 9f = 3600$

بپى خۆراكى گشتى $p + c + f = 750$

گەرمۆكەكانى پپۆتین و چەورى دەكاتە $4p + 0c + 9f = 2160$ $60\%(3600) = 2160$

ئاگاداریە!

ورىابە لە گرنكى نووسىنى ژمارە 0 وەكو ھاوكلەكى نەزانراوى ناديار $4p + 0c + 9f = 2160$

$$Df = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 3600 \\ 1 & 1 & 750 \\ 4 & 0 & 2160 \end{vmatrix}, Dc = \begin{vmatrix} 4 & 3600 & 9 \\ 1 & 750 & 1 \\ 4 & 2160 & 9 \end{vmatrix}, Dp = \begin{vmatrix} 3600 & 4 & 9 \\ 750 & 1 & 1 \\ 2160 & 0 & 9 \end{vmatrix}, D = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -20$$

$$f = \frac{Df}{D} = \frac{-2400}{-20} = 120, c = \frac{Dc}{D} = \frac{-7200}{-20} = 360, p = \frac{Dp}{D} = \frac{-5400}{-20} = 270$$

ئەم سىستەمە پىكھاتوۋە لە 270 g پىرۇتېن و 360 g كاربۇھىدرات و 120 g چەۋرى

4. چى دەبىت ئەگەر...؟ سىستەمە پىرۇتېن داۋاي بەكاربىردى 3200 گەرمۇكەى گەرمى و 700 g خۇراك بىكەت، پىۋىستە ئەو گەرمۇكە گەرمىيە سەرچاۋەكەى كاربۇھىدراتىيە 70% كۆى گەرمۇكەكانى گەرمى بىت. چەند گرام لە پىرۇتېن و كاربۇھىدرات و چەۋرى پىۋىستە لەم سىستەمەدا؟



بىرىكەۋە و تاۋتۇيىكە

1. باسى رىزىكراۋەكە بىكە سىنوردەركەى سىر بىت.
2. چۇن دەزانىت سى سىنوردەركە چى لىدېت، كاتىك رىساي گرامەر لەسەر سىستەمى ھىلى بۇ دوو ھاۋكىشە بە دوو نەزانراۋ جىبەجىدەكرىت؟ ئەگەر يەككىيان لە ئەنجامى لىكەدان ئەۋىترىان لە ژمارەيكە، پەيداۋوبىت.
3. رىكخەرىيە ئەم خىشتەيە بنوسەۋە و تەۋاۋىكە. لەھەر چۈرچىۋەك رىساي گونجاۋى بۇ بنوسە

رىزىكراۋەى 3 x 3	رىزىكراۋەى 2 x 2	
		سىنوردەر
		رىساي گرامەر



4-3 رايىنانەكان

رايىنانى ئاراستەكراۋ

1 زاراۋەكان واتاي چىيە يەككە لە دانەكانى رىزىكراۋە ھاۋكۆلكەكان سىر بىت؟

سىنوردەرى ئەم رىزىكراۋە بىۋزەۋە.

$$\begin{bmatrix} -3 & 40 \\ -5 & 66\frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1.5 & 0.25 \\ 6 & 2.5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$$

2 رىساي گرامەر بەكاربىنە بۇ شىكارىردى ئەم سىستەمە ھىلىيانە.

$$\begin{cases} 2y = 2 - x \\ -3x + 6y = -9 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ 2.5x - y = 1.5 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + y + 6 = 0 \\ 8x + 2y = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x = 2 - y \\ 3x + 1 = 2y \end{cases}$$

3 پروانه نمونه

سنووردەرى ئەم رېزىكراوانە بدۆزەو.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad 12$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 0.5 & 3 \end{bmatrix} \quad 11$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad 10$$

4 پروانه نمونه

13 **بەكاربردن** هەتاو 2 kg فستق و 1.5 kg بادەم و 3 kg بندوقى كرى. برى 28 420 دىنار پارەيدا. بەلام دوينى ھاوپى 39 390 دىنار پارەى دا نرخی 4.5 kg فستق و 2 kg بندوق، نرخی ھەر كىلوگرامىك لەھەر جوړىكيان چەندە؟ ئەگەر بزانت نرخی يەك كىلوگرام فستق يەكسانە بەكوئى كىلوگرامىك بادەم و كىلوگرامىك بندوق.

جىيەجىكرنەكان

سنووردەرى ئەم رېزىكراوانە بدۆزەو.

$$\begin{bmatrix} r & -1 \\ -2r^2 & \pi r \end{bmatrix} \quad 17$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & 8 \\ -\frac{1}{2} & 10 \end{bmatrix} \quad 16$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 15$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.4 \\ 5 & 0.3 \end{bmatrix} \quad 14$$

رېئساي گرامەر بەكاربىنە بۆ شىكارى سىستەمى ھىلى

$$\begin{cases} 3y - x = 7 \\ 2x + 3y = -7 \end{cases} \quad 21$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + \frac{y}{2} = 2 \end{cases} \quad 20$$

$$\begin{cases} x + 2y = 3.5 \\ 3x - y = 2.7 \end{cases} \quad 19$$

$$\begin{cases} 0.5x + 6y = 2 \\ 0.25x + 3y = 0.5 \end{cases} \quad 18$$

سنووردەرى ئەم رېزىكراوانە بدۆزەو.

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad 24$$

$$L = \begin{bmatrix} -2.4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0.5 \\ 0 & 3.5 & 1 \end{bmatrix} \quad 23$$

$$A = \begin{bmatrix} 2.5 & 1.5 & 0 \\ 3.2 & 1 & -4 \\ 6.4 & -5 & 2.1 \end{bmatrix} \quad 22$$

25 **لەش جوانى (رشافە)** ئاراس ژمارەى كاتژمىرى ئەو مەشقانەى پىي ھەلدەستىت بە ژمارەى گەرمۆكەكانى گەرمى پوژانە پىويستىەتى تۆماركرد. ئاراس چەند گەرمۆكەى پىويستە لەھەر كاتژمىرىكدا بۆھەر جوړىك لەو مەشقانەى ئەنجامى دەدات. رېئساي گرامەر بەكاربىنە بۆ شىكارى پرسىارەكە.

تۆمارى كاتەكانى مەشقەكانى ئاراس				
پاسكىل سوارى	تۆپى سەرمىز	مەلەوانى	گەرمۆكەى پىويست	
1.5 h	1h	0.75 h	1620	دووشەممە
0.75 h		1 h	915	چوارشەممە
1 h	1.5 h		1320	پىنجشەممە

26 **زانستەكان** ئەم خىشتەى خوارەو بارستە گەردىلەكانى سى بابەت نىشان دەدات، سىستەمىكى

ھاوكىشەى ھىلى بنووسە رېئساي گرامر بۆ دىارىكردنى بارستە گەردىلەى ھەر يەك لە كاربۆن

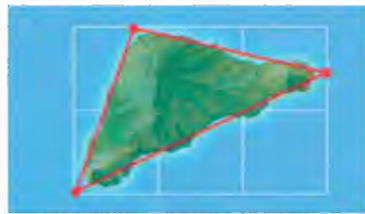
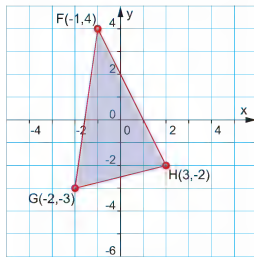
(C)، ھايدروجن (H)، ئوكسىجن (O) بەكاربەينە

ماددە	شىوگ	بارستەگەردىلە
مىتان	CH ₄	16
گلسىرۆل	C ₃ H ₈ O ₃	92
ناو	H ₂ O	18

ئەندازە سىگۆشەيەك سەردەكانى (x_1, y_1) و (x_2, y_2) و (x_3, y_3) پووبەرەكەى يەكسانە بە بەھاي

پووتى سنووردەرى $A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. ئەم زانىارىيە بەكاربىنە بۆ شىكارى پرسىارى 26 و 27.

27 پووبه‌ری دورگه‌یه‌ی خواره‌وه بدۆزه‌وه. 28 پووبه‌ری سیڭۆشه‌ی FGH بدۆزه‌وه.



29 **بیری ره‌خنه‌گری** به‌های c چهنده که‌وا له سنوردهری ریزکراوه‌ی هاوکۆلکه‌کانی سسته‌می $\begin{cases} 2x+y=6 \\ cy=3-x \end{cases}$ بکات یه‌کسانه بی‌ت به سفر؟ پوونیکه‌وه چۆن ده‌یدۆزیته‌وه.

30 **هه‌نته‌رنی‌ت** یه‌کێک له‌مالپه‌ره‌کانی هه‌نته‌رنی‌ت دا‌وی هه‌لسه‌نگاندنی بابته‌تیکی کرد. به‌پیدانی خالێک یان دوو خال یان 3 خال. ژماره‌ی هه‌لسه‌نگاران 38 که‌س بووه. ژماره‌ی هه‌وانه‌ی 3 خالێان دا‌بوو دوو هه‌وانه‌ی هه‌وانه‌ بوون که یه‌ک خالێان دا‌بوو. ژماره‌ی که‌سه‌کانی هه‌رجۆره هه‌لسه‌نگاندنێک چهنده؟ هه‌گه‌ر زانیت ژماره‌ی گشتی خاله‌کان 85 خاله.

سنوردهری هه‌م ریزکراوانه به‌ پی‌ی x بدۆزه‌وه.

$$C = \begin{bmatrix} 6x^2 & -6x+2x^2 \\ 3x & x-3 \end{bmatrix} \quad 33 \quad B = \begin{bmatrix} x-2 & x+2 \\ x+2 & x+6 \end{bmatrix} \quad 32 \quad A = \begin{bmatrix} x & x-1 \\ x+1 & x \end{bmatrix} \quad 31$$

34 **کانزای به‌نرخ** پارچه‌یه‌ک پارهی بچوک زیو 2.268 g و پارچه‌یه‌ک پارهی گه‌وره‌ی زیو 5 g . ئومێد 425 پارچه‌ پارهی له‌هه‌ردوو جۆره‌که‌ هه‌یه. کیشی هه‌مووی 1483 g بوو.

ا) ئومێد چهنده پارچه‌ پارهی له‌هه‌ر جۆرێک لایه.

ب) نرخ‌ی زیوه‌کان چهنده، هه‌گه‌ر نرخ‌ی پارچه‌ بچوک‌که‌ 30 000 دینار و پارچه‌ گه‌وره‌که‌ش 72 000 دینار بی‌ت؟

35 کۆمه‌لێک له 6 گه‌وره و 3 منداڵ پیکه‌اتبوون سه‌ردانی باخچه‌ی ئاژه‌لانیان کرد 48 000 دینار پارهیان دا. له‌کاتی‌که‌دا کۆمه‌لێکی تر له دوو گه‌وره و 10 منداڵ پیکه‌اتبوون 52 000 دینار پارهیان دا بۆ چوونه ژووره‌وه. نه‌زانرا‌وی x به‌کاربی‌نه بۆ نرخ‌ی بلیتی منداڵان و y بۆ نرخ‌ی بلیتی گه‌وره‌کان.

ا) هه‌و هاوکیشانه بنووسه که هه‌م پرسیاره پوونیکاته‌وه؟

ب) ریزکراوه‌ی هاوکۆلکه‌کان بنووسه و هه‌ژمار‌ی سنوردهره‌که‌ی بکه؟

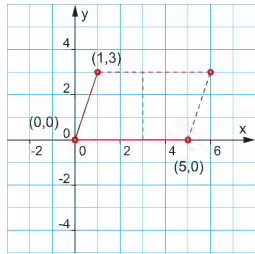
ج) پرسیاره‌که چهنده شیکاری هه‌یه؟

د) ریسای گرامه‌ر به‌کاربی‌نه بۆ دۆزینه‌وه‌ی به‌های دوو نه‌زانرا‌و؟

ه) نرخ‌ی بلیتی چوونه ژووری گه‌وره‌کان چهنده؟ نرخ‌ی بلیتی چوونه ژووره‌وه‌ی منداڵان چهنده؟

36 **بنووسه** چۆن ساغیده‌که‌یته‌وه که هاوپرێژیه‌ک راسته؟ و چۆن ساغیده‌که‌یته‌وه که سنوردهری ریزکراوه‌ی 2×2 ده‌کاته سفر. به‌راوردی بکه.

37 **ههنگاوی جوړاوجوړ** دوو خالی (5, 0) و (1, 3) د دوسه لاری لاتهریپکښ، یه کیک له سه رده کانی خالی



بنه پته له پروته ختی پوتانه کاند، وک له وینه یه نیشاندراوه.

ا پووبه لاری لاتهریبه که بدوژهوه.

ب هه ردو خاله که به پز له $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ دابنی هه ژماری

به های سنورده رده که بکه. په یوه ندی چیه له نیوان

به های سنورده رده که و پووبه لاری لاتهریبه که؟

ج دریزی و پانی لاتهریبه که بگوړه، پاشان هه ژماری پووبه رده کی و به های سنورده رده کی بکه.

نایا نهو په یوندییه دی دوزیتوه رسته له نیوان سنورده رده که و پووبه رده که؟

د نالوگوړ بکه له نیوان دوو خالی لقی (ب) به شیوه یه ک خالی (x_1, y_1) بیته خالی (1, 3)

سه رله نوی هه ژماری سنورده رده کی و پووبه رده کی بکه. کاریگری نهو نالوگوړکردنه چیه

له سه ر به های سنورده رده کی؟

نامادکردن پوتاقیکردنهوه

38 کام باسیک له مانه رسته له سه ر نهو سسته مه هیلیه $\begin{cases} 3x = y - 1 \\ x + 2y = 16 \end{cases}$ ؟

ا بیسنور؛ ژماره یه کی نادیار شیکاری هیه (ج) نه سسته مه؛ شیکاری نیه

ب نه سسته مه؛ شیکاری زوره (د) سنورداره؛ یه ک شیکاری هیه

39 کام ریزکراوه سنورده رده کی 1 ؟

ا $\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} 3 & -11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} -3 & 11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

40 **کورته وه لام** به های x بدوژهوه نه گه ر بزانت $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 25$

به رده نگاری په رده پیدان

41 وادابنی یه کیک له ستوننه کان یان ریزه کانی ریزکراوه 3×3 هه مووی سفره.

کاریگری چی ده بیته له سه ر سنورده رده کی.

42 ریزکراوه یک بنووسه که سنورده رده کی $x^2 + y^2$ بیته.

43 به های a و b و c بدوژهوه نه گه ر $x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{5}$ و $y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & a \\ b & c \end{vmatrix}}{5}$

نه نجامی راپرسی		
بهش	له گه دانان	دژی دانان
باکوور	47%	53%
باشوور	85%	15%
کوی	49%	51%

44 **شارستانی** به مه به سستی دانانی په یکه ری که له یه کیک

له گوړه پانه کانی شاریک. که له بهشی باکوور و باشوور

پیکهاتووه راپرسییه که له نیوان دانیشتوننه کهیدا نه نجامدرا.

نه نجامی نهو راپرسییه به ریژه ی سدی نووسراوه له خشته ی

به رامبه ردا له بهشی باشوور له گه ل دانانی په یه که رده که ن

نه گه ر بزانت ژماره ی نهوانه ی به شداری راپرسییه که یان

کردووه 4 826 که سن.

ژماره ی نهو هاو لاتیه نه ی بهشی باشوور چه نده؟ که دهنگیان بو نهو راپرسیه داوه.

پیداچوونہوہی لوولیچی

45 **بہکاربردن** ساقان 135 000 دیناری پیبوو. کاتیڭ چووہ دوکانی پیلاوی ژنان پیلاویکی بینی نرخہکھی بہرپڑھی 25% داشکابوو. لاسہنگہیہک بنووسہ کہ نرخہ بنہرہتیہکے پاسہدان بکات. ئہگہر بزانیٹ ساقان پیلاوہکھی کری. (پولہکانی پیشوو)

ئہم ھاوکیٹشانہ بہ لہجیاتیدانان شیکاربکہ. (پولہکانی پیشوو)

$$\begin{cases} 2x = y \\ 4x + y = -2 \end{cases} \quad \mathbf{48}$$

$$\begin{cases} x + y = -5 \\ 2x - y = -7 \end{cases} \quad \mathbf{47}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}y \\ 6x - 6y = 16 \end{cases} \quad \mathbf{46}$$

پیزکراوہ بہکاربیئہ بؤ گۆپینی چوارلای $DEFG$ کاتیڭ $D(1, 1)$ و $E(4, -2)$ و $F(-2, -3)$ و $G(-1, -1)$ بیٹ. (وانہی 3-3)

49 راکیشانی 5 یہکے بؤلای راست و 3 یہکے بؤ سہرہوہ.

50 وینہدانہوہی بہدہوری تہوہری یہکہم.

51 راکیشانی یہک یہکے بؤلای چہپ و دوو یہکے بؤ خوارہوہ.

52 ھاورپڑہیہکی ئہندازہیی رپڑہکھی 3 بیٹ.

تاقىردنەۋەى نىۋەى بەش

1-3 رېزىكراۋەكان و پىدراۋەكان

سىفەتە مېدالىكانى يارى ئۆلۈمى			
بېۋىزى	زىو	زىپ	
453.6 gr	567 gr	567 gr	كىش
90	7.5	7.5	مس
18.45	18.30	19.65	ژمارەى كاتۇمىرى دروستكردن

خشتەكە بەكارىپنە بۇ شىكاركردى رايۇنانى 1 تا 4

1 رېزىكراۋەى M بەكارىپنە بۇ نىشاندىنى پىدراۋى ناو خشتەكە.

2 رېزىكراۋەى M چ جورىكە؟

3 بەھاي M_{32} چەندە؟ ئەم بەھايە چى دەنۇنۇت؟

4 ناۋنىشانى دانەى 90 چەندە؟

ئەم رېزىكراۋەى بەكارىپنە بۇ شىكاركردى رايۇنانى 5 تا 8

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -1.5 & 2 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

8 $C - 3A$

7 $C - D$

6 $2B$

5 $A + C$

2-3 لىكانى رېزىكراۋەكان

جورى رېزىكراۋەكانى $S_{5 \times 2}, R_{1 \times 5}, Q_{2 \times 5}, P_{5 \times 2}$ بۇ شىكاركردى پىسارەكانى 9 تا 12.

دىاربىكە نايانە نىجامى لىكانەكە پىئاسەكراۋە. ئەگەر پىئاسەكراۋە بوو جورەكەى بنووسە.

12 SP

11 RS

10 QR

9 PQ

ئەم رېزىكراۋەى خوارەۋە بەكارىپنە بۇ شىكاركردى رايۇنانى 13 تا 16

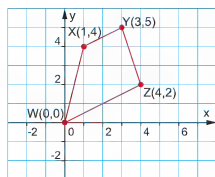
$$H = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.75 & -1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 5 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

16 G^2

15 HG

14 FH

13 EF



3-3 جىگوركى ئەندازەىيەكان بە بەكارىپنەى رېزىكراۋەكان

ئەم جىگوركى ئەندازەىيەكان پۇتۋانى سەرى چارلايەكەى بدۆزەۋە و وىنەى بكىشە.

17 پاكىشانى يەك يەكە بۇلاى چەپ و دوو يەكە بۇ خوارەۋە.

18 بچوكردنەۋەىيەك بەرپۇزەى $\frac{2}{3}$ 19 گورپىنى رېزىكراۋەكەى بە $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ جورى وىنەكە دىاربىكە.

20 گورپىنى رېزىكراۋە بە $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ جورى وىنە دىاربىكە 21 گورپىنى رېزىكراۋە بە $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ جورى وىنە دىاربىكە

4-3 سنووردەكان

سنووردەرى ئەم رېزىكراۋەى بدۆزەۋە.

25 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

24 $\begin{bmatrix} 0.5 & 1.2 \\ -0.2 & 2.0 \end{bmatrix}$

23 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

22 $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

بە بەكارىپنەى رېساي گرامەر. ئەمانە شىكارىكە.

28 $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y = 2z + 1 \\ z = x + 2 \end{cases}$

27 $\begin{cases} x - y = 2 \\ y - x + 4 = 0 \end{cases}$

26 $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ y = 1 - x \end{cases}$



هه‌لگه‌پاوه‌ی ریزکراوه‌کان

Matrix Inverse

5-3

ئامانجه‌کان

- بریارده‌دا ریزکراوه‌یه‌ک هه‌لگه‌پاوه‌ی هه‌یه‌ یان نا.
- سیستمی هاوکی‌شه‌ی هی‌لی.
- به‌به‌کاره‌یتانی هه‌لگه‌پاوه‌ی ریزکراوه‌کان شیکاره‌کات.

زاراوه‌کان

Vocabulary

هه‌لگه‌پاوه‌ی ریزکراوه
Matrix inverse

هاوکی‌شه‌ی ریزکراوه‌کان
Matrix equation

ریزکراوه‌ی نه‌زانراوه‌کان
Variable matrix

ریزکراوه‌ی نه‌گۆره‌کان
Constant matrix

ده‌توانیت نامه به جفره بنووسیت به هۆی ریزکراوه‌کان. ئەو که‌سه‌ی نامه‌که‌ی پێده‌گات. پێچه‌وانه‌ی کرداره‌که به‌کارده‌هێنیت. بۆ کردنه‌وه‌ی جفره‌که و خویندنه‌وه‌ی نامه‌که. بۆته‌وه‌ی ریزکراوه هه‌لگه‌پاوه‌ی هه‌بیت پێوسته چوارگۆشه‌یی بیت. هه‌رچه‌نده ئەم مه‌رجه به‌س نییه، چونکه هه‌ندیک ریزکراوه‌ی چوارگۆشه‌یی هه‌لگه‌پاوه‌ی نییه. کاتیک ئەنجامی لیکدانی ریزکراوه‌ی A له ریزکراوه‌ی B یه‌کسان بیت به ریزکراوه‌ی یه‌که I ئەو $AB=BA=I$. لهما باره‌دا به ریزکراوه‌ی B ده‌وتریت هه‌لگه‌پاوه‌ی ریزکراوه‌ی **Matrix Inverse A**. هیما‌ی A^{-1} بۆ داده‌نریت.

نمونه 1 دیاریکردنی ریزکراوه‌یه‌که هه‌لگه‌پاوه‌ی ریزکراوه‌یه‌کی تر بیت

دیاریبکه نایا ریزکراوه‌ی B هه‌لگه‌پاوه‌ی ریزکراوه‌ی A یه.

$$B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

له‌به‌رئه‌وه‌ی ئەنجامی لیکدانیان ریزکراوه‌ی یه‌که‌یه که‌واته ریزکراوه‌ی B هه‌لگه‌پاوه‌ی A یه.

$$B = \begin{bmatrix} -10 & 6 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & 6 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

به پشت به‌ستن به‌وه‌ی پێشو. ریزکراوه‌ی B هه‌لگه‌پاوه‌ی ریزکراوه‌ی A نییه.

1. دیاریبکه نایا ریزکراوه‌ی A هه‌لگه‌پاوه‌ی ریزکراوه‌ی B یه.

$$B = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0.4 \\ 1.2 & 1 & -1.4 \\ 0.4 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

له‌بیرت بیت

ریزکراوه‌ی یه‌که‌ی n پله
ریزکراوه‌یه‌کی چوارگۆشه‌یه
له‌جۆری n که هه‌موو
دانه‌کانی 0. جگه له
دانه‌کانی تیره‌ی سه‌ره‌کی
نه‌بیت. که هه‌موویان
یه‌کسان به 1. ریزکراوه‌ی
یه‌که له جۆری 3 بریتیه له:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





هه‌لگه‌پاوه‌ی ریزکراوه‌ی چوارگۆشه‌یی پله 2

ئەگەر سنووردەری ریزکراوه‌ی $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یەكسان نەبێت بەسەر ئەوا ئەو ریزکراوه‌یه هه‌لگه‌پاوه‌ی دەبێت و بریتییه له $M^{-1} = \frac{1}{|M|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

ریزکراوه هه‌لگه‌پاوه‌ی نابێت ئەگەر سنووردەرەكە یەكسان بێت بە سفر.

2 نمونە

دۆزینه‌وه‌ی هه‌لگه‌پاوه‌ی ریزکراوه‌ی چوارگۆشه‌یی پله دوو

هه‌لگه‌پاوه‌ی ئەم ریزکراوه بدۆزەوه ئەگەر هه‌بوو.

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{ا}$$

هه‌ژماری سنووردەرەكە یەكە.

$$|M| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (-2)(-4) - 2 \times 3 = 2 \neq 0$$

له‌به‌رئەوه‌ی سنووردەرەكە یەكسان نییه به سفر كه‌واته هه‌لگه‌پاوه‌كە بریتییه له:

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{ب}$$

هه‌ژماری سنووردەرەكە یەكە.

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times 12 - 2 \times 3 = 0$$

له‌به‌رئەوه‌ی سنووردەرەكە یەكسان به سفر، كه‌واته ریزکراوه‌كه هه‌لگه‌پاوه‌ی نییه.

2. هه‌لگه‌پاوه‌ی ریزکراوه‌ی $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ بدۆزەوه.



دەتوانیت ریزکراوه‌كان به‌کاربێنیت بۆ شیکارکردنی سسته‌می هاوکی‌شه‌ی هێلی. به‌به‌کارهێنانی

ریزکراوه‌كان سسته‌می هاوکی‌شه‌كان ده‌گۆرێته سه‌ر کرداریکی هاوشیوه‌ی هاوکی‌شه‌ی هێلی وه‌ك $5x = 20$

. به‌لێكدانی هه‌ردوولای هاوکی‌شه‌كه له‌هه‌لگه‌پاوه‌ی هاوکی‌له‌کی 5 واته $\frac{1}{5}$.

بۆ ئەنجامدانی ئەم کاره سسته‌می هاوکی‌شه‌كان ده‌گۆریت بۆ هاوکی‌شه‌ی ریزکراوه‌ی **Matrix** $AX=B$

equation، کاتی‌ك A هێمای ریزکراوه‌ی هاوکی‌له‌کانی سسته‌مه‌كه بێت. به‌لام X هێمای ریزکراوه‌ی

نه‌زانراوه‌كان **Variable matrix** بێت. هه‌روه‌ها B هێمای ریزکراوه‌ی نه‌گۆرێکان **Constant matrix** بێت.

ئەو هاوکی‌شه‌ ریزکراوه‌یییه‌ی سسته‌می ئەم دوو هاوکی‌شه‌ هێلییه‌ ده‌نوی‌نێت $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ بریتییه له:

$$A \cdot X = B$$

ریزکراوه‌ی هاوکی‌له‌کان $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow$ ریزکراوه‌ی نه‌گۆرێکان

ریزکراوه‌ی نه‌زانراوه‌كان

بۆ شیکار کردنی ھاوکیڭشە پیزکراوہی $AX=B$ ھەردوولا لیکدانی ھەلگەپراوہی پیزکراوہی A

بکە. «وادابنی ھەییە»: $A^{-1}AX = A^{-1}B$
 ئەنجامی لیکدانی پیزکراوہی A لە ھەلگەپراوہکە
 بریتیە لە پیزکراوہی یەکە I
 $IX = A^{-1}B$
 $X = A^{-1}B$

3 نموونە

شیکارکردنی سیستمی ھاوکیڭشە ھێلی بە بەکارھێنانی ھەلگەپراوہی پیزکراوہ

ھاوکیڭشەیکە پیزکراوہی بنووسە کە ئەم سیستمە ھێلیە بنوینیت $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ پاشان شیکاربکە.

ھەنگاوی 1 ئەو ھاوکیڭشە پیزکراوہیە بنووسە کە ئەم سستەمی دوو ھاوکیڭشەییە بنوینیت.

$$A \quad X = B$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ھەنگاوی 2 سنوردەری پیزکراوہی ھاوکۆلکەکان بدۆزەوہ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 1 \times 2 = -1 \neq 0$$

ھەنگاوی 3 ھەلگەپراوہی پیزکراوہی ھاوکۆلکەکان بدۆزەوہ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

ھەنگاوی 4 شیکاربکە.

$$X = A^{-1} B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 15 \end{bmatrix}$$

کەواتە شیکارکە: $x = -7$ و $y = 15$.

ئاگاداریە!

لەبەرئەوہی لیکدانی پیزکراوہ کرداری ئالۆگۆر نییە. بۆیە پێویستە گرنکی بەدی بە لیکدانی ھەلگەپراوہکە بە ھەمان پیزی ھەردوولا یەکسانەکە پێویستە A^{-1} لە ھەردوولا بکەوێتە یەکەمی لای چەپ.

ئەو ھاوکیڭشە پیزکراوہیە بنووسە کە ئەم سیستمە دەنوینیت $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$ پاشان شیکاری بکە.



25	ل	13	پ	1	ئ
26	ل	14	ز	2	ا
27	م	15	ژ	3	ه
28	ن	16	س	4	ب
29	ه	17	ش	5	پ
30	و	18	ع	6	ت
31	وو	19	غ	7	ج
32	ۆ	20	ف	8	چ
33	ی	21	ڤ	9	ح
34	ئ	22	ق	10	خ
0	ب	23	ک	11	د
		24	گ	12	ر

ئەو پیزکراوانە ھەلگەپراوہیان ھەییە بەکاردێن بۆ جفرەکردنی نامەکان. وا دابنی دەرئەوێت ئەم نامەییە جفرەبکە: «بابان لە پێی» قوئای یەکەم لە کرداری جفرەکردن بریتیە لە گۆرینی نامەکە بۆ ژمارە یەکەدوای یەک. بە بەکارھێنانی خستە جفرەکردن. ھەر پیتێک دەگۆرێت بۆ ژمارە یەک «نامەنێر» نامەوەرگر ھەمان خستە جفرەکردن بەکاردێن «دەتوانیت خستە بەرامبەر بەکاربێنیت. کاتیگ ھێمای بۆشایی نیوان دوو وشە بیت. نامەکە پیت بە پیت بنووسە. لەگەڵ بەکارھێنانی ھێمای — بۆ جیاکردنەوہی وشەکان.

ب ه ی ا ن ی — ز ه م ا و ه ن د ه
 3 11 28 3 30 2 27 3 14 0 33 28 2 33 3 4

ئەم یەکەدوای یەکە لە پیزکراوہیەکی دوو ریزدا بنووسە لە راستەوہ بۆ چەپ. ئەم پیزکراوہیەت دەستدەکەوێت.

$$A = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 33 & 28 & 2 & 33 & 3 & 4 \\ 3 & 11 & 28 & 3 & 30 & 2 & 27 & 3 \end{bmatrix}$$

کردنەوہی جفری ئەم نامەییە کاریکی گران نییە بۆیە نامەنێر پیزکراوہیەکی چوارگۆشەیی کە ھەلگەپراوہی ھەبێت بەکاردێنێت بۆ شاردنەوہی یەکەدوای یەکە ژمارەییەکی پێش ناردنی. نامە وەرگر ھەلگەپراوہی پیزکراوہکە بەکاردێنێت بۆ لابردنی شاردنەوہکە لەسەر ئەو یەکەدوای یەکە ژمارەییە پێی دەگات پیزکراوہی شاردنەوہی $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ بەکاربێنە و لیکدانی پیزکراوہی A بکە ئەمەت دەست دەکەوێت.

$$B = MA \begin{bmatrix} 45 & 11 & 127 & 87 & 36 & 101 & 36 & 15 \\ 76 & 22 & 221 & 146 & 70 & 169 & 69 & 26 \end{bmatrix}$$

نامەنۆر ئەم يەكبه‌دواى يەكە دەنۆرۆت:

$$76 \ 22 \ 221 \ 146 \ 70 \ 169 \ 69 \ 26 \ 45 \ 11 \ 127 \ 87 \ 36 \ 101 \ 36 \ 15$$

نامەوەرگەر پۆیۆستە ئەم يەكبه‌دواى يەكە بە پیزکراوہى دوو پیز لە راستەوہ بۆ چەپ. ئەم پیزکراوہی دەستدەکەوۆت.

$$C = \begin{bmatrix} 45 & 11 & 127 & 87 & 36 & 101 & 36 & 15 \\ 76 & 22 & 221 & 146 & 70 & 169 & 69 & 26 \end{bmatrix}$$

پاشان لۆکدانى ھەلگەپراوہى پیزکراوہى M ى دەکەین کە بریتییە لە $M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ ئەنجامى لۆکدانى $M^{-1}C$ بریتییە لە:

$$A = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 33 & 28 & 2 & 33 & 3 & 4 \\ 3 & 11 & 28 & 3 & 30 & 2 & 27 & 3 \end{bmatrix}$$

وەرگەر دانەکانى ئەو پیزکراوہکەى بە دەستى ھێناوہ بەیەك بەدواى يەكى ژمارەیی دەنۆسۆت بە دەستپۆکردن لە لای راستى پیزى يەكەم ئەمەى دەستدەکەوۆت.

$$3 \ 11 \ 28 \ 3 \ 30 \ 2 \ 27 \ 3 \ 14 \ 0 \ 33 \ 28 \ 2 \ 33 \ 3 \ 4$$

لەژۆر ھەر ژمارەیکدا پیتەکەى بەرامبەرى لە خستەى جفرەکەوہ دەنۆسۆت.

$$3 \ 11 \ 28 \ 3 \ 30 \ 2 \ 27 \ 3 \ 14 \ 0 \ 33 \ 28 \ 2 \ 33 \ 3 \ 4$$

بە یانى $—$ زەم ا وە ن د ه
نامەکە دەخوینۆتەوہ «بەیانى زەماوہندە»

نمونه 4 جیبه‌جۆکردن لەسەر جفرە

ھەژار ئەم نامەییە لە لاوینی ھاوپیۆوہ پیگەیشت

25 6 11 33 51 85 25 9 15 36 63 119 . لاوین و ھەژار پیزکراوہى شارندنەوہى

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ بەکاردههێنن. نامەکەى لاوین چییە؟}$$

ھەنگاوى 1 ھەلگەپراوہى پیزکراوہى M بدۆزەوہ.

$$M^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ھەنگاوى 2 ئەو نامەییە ھەژار بە دەستى گەیشتوہ لە راستەوہ بۆ چەپ بەشیۆہى

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 9 & 15 & 36 & 63 & 119 \\ 25 & 6 & 11 & 33 & 51 & 85 \end{bmatrix}$$

ھەنگاوى 3 $M^{-1}A$ ھەژماریکە.

$$\begin{aligned} M^{-1}A &= \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 9 & 15 & 36 & 63 & 119 \\ 25 & 6 & 11 & 33 & 51 & 85 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 25 & 0 & 3 & 27 & 27 & 17 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 12 & 34 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ههنگاوی 4 ریزکراوهکه به شیوهی یه کبه دوا ی یه ک بنوسه.

0 3 4 3 12 34 25 0 3 27 27 17

ههنگاوی 5 جفری نامه که بکه وه.

0 3 4 3 12 34 25 0 3 27 27 17

ش م م ه ل ی ر ه ب ه ب

(شهمه لیربه) نامه که ی لاینه.

4. ریزکراوهی شارندهوی $M = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ به کاربینه بو کردنهوی ئەم نامهیه

. 0 20 60 27 36 12 0 46 148 69 75 31



بیربکه وه و تاوتویبکه

1. ئەگەر زانیت ریزکراوهی A هه لگه پراوهی ههیه. چ ئەنجامیک درئه نجام ده کهیت؟
2. هه لگه پراوهی ریزکراوهی یه که چهنده؟
3. ریکخه ریه ئەم خشتهیه دروستبکه و تهواوی بکه، بهراوردبکه له نیوان هه لگه پراوهی ریزکراوه و هه لگه پراوهی ژماره ی راستی.

ریزکراوهکان	ژماره راستیهکان
	نوسین له گه ل نمونه
	چۆن هیمای هه لگه پراوهی ریزکراو یان هیمای هه لگه پراوهی ژماره ناماده ده کهیت
	سیفهنی ئالوگۆرکردن



راهینانهکان

5-3

راهینانی ئاراسته کراو

1 زارواکهان چۆن سیستمی هاوکی شهی هیل ی به دوو نه زانراو به شیوهی ریزکراوه دهنوسیت.

دیاریبکه ئەگەر هه ر ریزکراوهیه که هه لگه پراوهی ریزکراوه که ی تریان بیته.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 4 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 1 \\ 1.2 & 0 & 0.8 \\ -1.6 & 0.2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 12.5 & 3 \\ -1.6 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -10 \end{bmatrix} \quad 3 \quad \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \quad 2$$

هه لگه پراوهی ریزکراوه که بدۆزه وه ئەگەر هه بوو.

$$\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 8 \end{bmatrix} \quad 9 \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad 8 \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 3 \\ \frac{3}{2} & 9 \end{bmatrix} \quad 7 \quad \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad 6 \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad 5$$

3 پروانه نمونه

نهم سیستمی هاوکیشانه به شیوهی ریزکراوهیی بنووسه.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \quad \text{12} \quad \begin{cases} 5x + 9y = 1 \\ 2 - 4x - 7y = 4 \end{cases} \quad \text{11} \quad \begin{cases} 3x - y = 5 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \quad \text{10}$$

4 پروانه نمونه

13 جفره سیروان نامهیهکی له ئامانجی هاوړپیهوه پیگه‌یشت. کاتی دیداری هردوکیانی تیدا دیاری کردوه. ئه‌م‌ش نامه‌کویه: 298 199 255 82 14 221 126 85 105 34 6 93 ریزکراوهی $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ به‌کاره‌ینابوو بۆ شارندنه‌وی نامه‌کویه، کاتی دیداری هردوکیانی چنده؟

راهیتان و شیکارکردنی پرسیاره‌کان

نایا ههریه‌ک لهم ریزکراوانه هه‌لگه‌پاوهی نه‌ویتریانه؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.2 & -0.2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{16} \quad \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{16}{15} & -\frac{4}{15} \\ -\frac{2}{15} & -\frac{8}{15} \end{bmatrix} \quad \text{15} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{14}$$

هه‌لگه‌پاوهی نهم ریزکراوانه بدۆزه‌وه ئه‌گهر هه‌لگه‌پاوهی هه‌بوو.

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 7 & 11 \end{bmatrix} \quad \text{21} \quad \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{20} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{19} \quad \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{18} \quad \begin{bmatrix} -0.25 & -0.5 \\ -1.5 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{17}$$

ههریه‌ک لهم سستمانه به شیوهی ریزکراوهیی بنووسه.

$$\begin{cases} 4x + 7y = 10 \\ 3x + 5y = 9 \end{cases} \quad \text{24} \quad \begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + y = 9 \end{cases} \quad \text{23} \quad \begin{cases} x - y = 5 \\ 2y - x = 6 \end{cases} \quad \text{22}$$

25 جفره ئاری له هاوړپیکه‌یه‌وه نهم نامه‌یهی پیگه‌یشت. ناوی ئه‌و شارهی تیدا دیاریده‌کات که ئیستا لی

ده‌ژیت نامه‌که بریتیه له: 14 40 33 6 43 3 62 59 167 136 27 198 15 277

ریزکراوهی شارندنه‌وی $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ به‌کاره‌اتوووه بۆ شارندنه‌وی نامه‌که. ناوی ئه‌و شاره چییه؟

26 گونجاندن (توضیب) هه‌تاو سی جۆر میوه‌ی پیشاندراوی به‌راوردکرد. هاوکیشی ریزکراوهیی بۆ

بنووسه و شیکاری بکه. بۆ دۆزینه‌وه‌ی نرخ‌ی هه‌ر کیلوگرامیک هه‌رمی و خوځ و هه‌لوژه.



27 هه‌نگاوی جۆراوجۆر یانه‌ی بابل گه‌شتیکی ده‌ریایی ریک‌خست که به‌له‌می تیدا به‌کاره‌اتبوو دوو

جۆر بوون، گه‌وره‌کان 6 که‌سی ده‌گرت. بچوکه‌کانیان دوو که‌سی ده‌گرت. ژماره‌ی گه‌شتیاران 34 که‌س بوو پرسیاره‌که ده‌رده‌برد‌ریت به‌م سستمه‌هه‌لییه $\begin{cases} 6x + 2y = 34 \\ x + y = 7 \end{cases}$. کاتی‌ک x هه‌مای ژماره‌ی به‌له‌مه گه‌وره‌کانه و y ژماره‌ی به‌له‌مه بچوکه‌کانه.

ا ریزکراوه‌ی هاوکۆلکه‌کان بنووسه؟

ب سستمه‌که‌ی پیشوو له‌سه‌ر شیوه‌ی ریزکراوه بنووسه؟

ج هه‌لگه‌پاوه‌ی ریزکراوه‌ی هاوکۆلکه‌کان بنووسه؟

د شیکاری هاوکیشی ریزکراوه‌یی بکه بۆ دۆزینه‌وه‌ی ژماره‌ی به‌له‌مه‌کانی هه‌رجۆریک؟

28 **بیری پەخەنگەر** ئەو پەيوەندىيە چىيە. پىزىكراو و ھەلگەپراو ھەي و پىزىكراو ھەي يەكە بەيەكەو دەبەستىت؟

29 ھەكار نامەيەكى جفرە كرد و دەيەوئىت بۇ ھاورپىيەكەي بينيئىت نامە جفرەكراو ھەي پىزىكراو ھەي C دا نووسى. پىزىكراو ھەي شاردنەو ھەي M ي بەكارھيئا. نامەيەكى شارو ھەي جفرەكراو ھەي D دەستكەوت. ئەو مەرجانە چىن پىيوستە پەچاوبىكرىن بۇ پىزىكردى پىزىكراو ھەي.

30 **ھەلە لە شىكرىدەو** ھەريەكە لە شوان و ساغان. ھەژمارى ھەلگەپراو ھەي پىزىكراو ھەي $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ يان كرد. ئايا كاميان ھەلەي كرەو؟ ھەلەكە پوونبەو.

ب	ساغان	ا	شوان
$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$		$M^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$	

31 **بۇ خوئشى** باوكت ووتى 5000 دىنار لە گىرفانمدايە، پىكھاتوو لە جوړى 50 دىنارى و 100 دىنارى دەيدەم بە تۆ ئەگەر بزانييت چەند پارچە لەھەر جوړىك لە گىرفانمدايە، بۇ يارمەتيدانت ووتى ژمارەي پارچەكان ھەمووى 73 پارچەيە. ھەلگەپراو ھەي پىزىكراو بەكارپىنە بۇ بردنەو ھەي 5000 دىنارەكە.

32 **ناو** شارهوانى شارىك بۇرپىيەكى ئاوى لە يەكەك لە باخچە گشتىيەكانى شار دانا. بۆئەو ھەي گەشتياران بەكارپىنە. ئەم بۇرپە 24 كاتزمىر لە پوژىكدا ئىش دەكات دەتوانرىت بەسى خىرايى ھىواس و ناوئەند و خىرا بەكارپىنە. ئەم خستەيەي خوارو ھەي پىدراو ھەي بەكارھيئانى بۇرپىيە ئاوەكەيە. لەماو ھەي سى پوژدا. خىرايى ھەرسى جوړەكە بە كىلوئىتر بۇ ھەر كاتزمىرەك بدوژو.

ھىواس	ناوئەند	خىرا	بەركەي
ژمارەي كاتزمىرەكان	ژمارەي كاتزمىرەكان	ژمارەي كاتزمىرەكان	بە كىلوئەتر
15	7	2	199
16	4	4	208
12	8	4	236

33 **چى دەبىت ئەگەر...** وا دابنىين كە دانەكانى پىزىكراو ھەي $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ بکەيت بە دوو ئەوئەندە؟

- ا دانەكانى ھەلگەپراو ھەي پىزىكراو ھەي چۆن دەگوڤىت؟
 ب دەستەواژەيەك بنوسە لەسەر چۆنيەتى گوڤانى دانەكانى ھەلگەپراو ھەي پىزىكراو ھەي سنووردار. ئەگەر پىزىكراو ھەي لىكدانى ژمارە k بکەيت؟
 34 ھەريم 24 000 دىنارى دا بۇ نرخى چوونەژوورەو ھەي 7 بلىتى منالان و 2 بلىتى گەورە بۇ باخچەي ئاژەلان. مازن 46 000 دىنار پارەي دا نرخى 4 بلىتى گەورە و 13 بلىتى منالان. نەزانراوى x بەكارپىنە بۇ نرخى بلىتى گەورە و نەزانراوى y بۇ نرخى بلىتى منالان.
 ا بەھوى سستەمى ھاوگىشەكانەو ئەم پرسىارە دەرپەر.
 ب ئايا سنووردەري پىزىكراو ھەي ھاوگىلەكان يەكسانە بە سفر؟ ژمارەي شىكارەكانى چەندە؟
 ج شيوەي پىزىكراو و ھەلگەپراو ھەي پىزىكراو بەكارپىنە بۇ دوژىنەو ھەي x و y .
 د نرخى بلىتى گەورە چەندە؟ نرخى بلىتى منالان چەندە؟

35 بیرکردنه‌وه‌ی رهنه‌گرانه **ا** بیسه‌لمینه هه‌لگه‌پاوه‌ی پیزکراوه‌ی $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بریتیه له $\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

ب هه‌لگه‌پاوه‌ی پیزکراوێک $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ سنوورده‌ره‌که‌ی 1 بیٲ چنده؟

ج ئەو هۆیه چییه که واده‌کات دانه‌کانی هه‌لگه‌پاوه‌ی پیزکراوه‌ی $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ژماره‌ی ته‌واو بیٲ. کاتی‌ک دانه‌کانی پیزکراوه‌که ژماره‌ی ته‌واوین و سنوورده‌ره‌که‌ی 1 بیٲ.

36 به‌های x بدۆزه‌وه کاتی‌ک پیزکراوه‌ی $\begin{bmatrix} 2 & x \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ هه‌لگه‌پاوه‌ی نه‌بیٲ.

37 هه‌لگه‌پاوه‌ی ئەو پیزکراوه‌یه چنده که ته‌نها یه‌ک دانه‌ی هه‌یه $[a]$ ؟

38 **کیمیا** سانا برێک له گیراوه‌یه‌ک 15% ی ترشی گوگرد بیٲ تی‌که‌ل کرد له‌گه‌ل گیراوه‌یه‌کی تر که 40% ئەو ترشه‌ی تی‌داب بیٲ. بری 50L به‌ده‌سته‌ئینا پێژه‌ی ترشی گوگرد تی‌یدا 35% بو. نایا چهند لیتر له‌هه‌ریه‌ک له گیراوه‌کان تی‌که‌ل کرا؟

39 **بنووسه** ئەنجامی لیکدانێ $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$ بدۆزه‌وه. په‌یوه‌ندی چییه له‌نیوان ئەم دوو پیزکراوه‌یه؟



ناماده‌کردن بۆ تاقیکردنه‌وه



40 کام له‌مانه‌ی خواره‌وه هاوکێشه‌ی پیزکراوه‌یی سسته‌می $\begin{cases} 3x+2y=8 \\ x=y+1 \end{cases}$ ؟

ا $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$ **ب** $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

ج $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$ **د** $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

41 کام له‌مانه‌ی خواره‌وه راسته‌ بۆ ئەم پیزکراوه‌یه $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$ ؟

ا پیزکراوه‌که هه‌لگه‌پاوه‌ی هه‌یه. چونکه سنوورده‌ره‌که‌ی یه‌کسان نییه به‌ سفر.

ب پیزکراوه‌که هه‌لگه‌پاوه‌ی هه‌یه. چونکه سنوورده‌ره‌که‌ی یه‌کسانه به‌ سفر.

ج پیزکراوه‌که هه‌لگه‌پاوه‌ی نییه. چونکه سنوورده‌ره‌که‌ی یه‌کسانه به‌ سفر.

د پیزکراوه‌که هه‌لگه‌پاوه‌ی نییه. چونکه سنوورده‌ره‌که‌ی یه‌کسان نییه به‌ سفر.

42 دانه‌ی b_{11} چنده؟ ئەگه‌ر B هه‌لگه‌پاوه‌ی پیزکراوه‌ی $A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ بیٲ؟

ا 1 **ب** $-\frac{1}{9}$ **ج** 3 **د** $-\frac{1}{27}$

43 کام له‌مانه‌ی خواره‌وه راسته‌ له‌سه‌ر پیزکراوه‌ی $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $M =$ ئەگه‌ر سنوورده‌ره‌که‌ی یه‌کسان نه‌بیٲ به‌ سفر و کاتی‌ک $a > 0$ و $b < 0$ و $c < 0$ و $d > 0$ ؟

ا هه‌موو دانه‌کانی M^{-1} سالب نییه. **ب** پیزکراوه‌ی M^{-1} ته‌نها یه‌ک دانه‌ سالبی تی‌دایه.

ج پیزکراوه‌ی M^{-1} ته‌نها دوو دانه‌ سالبی تی‌دایه **د** پیزکراوه‌ی M^{-1} ته‌نها سی دانه‌ سالبی تی‌دایه.

44 کورته وهلام پيشانگايهکی تابلوکانی هونه. تابلویهکی هونهری تیچونهکهی 25 000 دیناره پيشکesh بهو کهسه دهکات که 500 000 دینار دهبهخشیت. تابلویهکی تیچونهکهی 50 000 دینار دهبهخشیتته ئهوه کهسهی 1 000 000 دینار دهبهخشیت. پيشانگاکه 24 000 000 دیناری له بهخشینهکان کوکردهوه بهرامبه پیدانی 35 تابلو. ژمارهی بهخشینهکان لهههر جوریک چهندهبوو؟

بههنگاری و فراوانکردن

45 خولیاکان نمرهکانی کوئیایی سالی خویندکاریک بهرزدهکریتهوه بههاوکولکهی جیاواز به پیی ههر بابتهیک. ئهم خشتهیهی خوارهوه نمرهکانی 4 خویندکار له 4 بابته و سههجهمی ههریهکهیان رووندهکاتهوه. پیویسته لهسههت بهرزکردنهوهی ههر بابتهیک بدوژیتتهوه.

نمرهکانی تاقیکردنهوهی کوئیایی سال					
خویندکار	بیرکاری	زانست	زمانی عههههی	زمانی بیانی	سههجهم
هیاوا	65	72	55	50	1038
رپیهر	40	45	66	60	890
رهوهند	55	65	60	65	1030
عیماو	85	75	65	75	1275

46 بههای دانهکانی ریزکراوهی $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بدوژهوه بوئهوهی یهکسان بیته به ههلهگهراوهکهی.

47 ژیکال له باوکیهوه ئهم نامهیهی پیگهیشته 18, 0, 30, 15, -33, -8, 7, -5, -3, 5, 3, 12, 4, 8, 33, 6, 0, 0. بو کردنهوهی نامهکه ریزکراوهیهکی شاروهی 3×3 که ههموو دانهکانی ژیرتیرهی سهههکی سفره، له کاتیکدا دانهکانی تر ههموویان یهکسانن به 1.

أ ئهوه نامهیه چییه که ژیکال پیی گهیشتهوه؟

ب ریزکراوهی شاردهوه که کامهیه؟

ج ژیکال وهلامی نامهکهی باوکی داوه بهم شیوهیه «بهلین دهههم». ئهوه نامهیه چییه که باوکی پیی دهگات.

پیداچوونهوهی لولپیچی

شیکاریکه (پولهکی پیشوو)

50 $125\%x = 117$

49 $\frac{0.5}{0.2x} = \frac{100}{7}$

48 $\frac{2x}{10} = \frac{12}{30}$

رئگای لابردن بهکاربیته بو شیکارکردنی سیستمی ئهم هاوکیشانه. (وانهی 2-5)

52
$$\begin{cases} y - x - 3z = 4 \\ 2x + y - 4z = -3 \\ 0.25x + 8z + 3 = 2y \end{cases}$$

51
$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 3y - 6z = 5 \\ -4z - 5y + 0.25z = -9 \end{cases}$$

سنووردهی ئهم ریزکراوانه بدوژهوه. (وانهی 3-4)

56
$$\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 9 & -81 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

55
$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

54
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 3 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$$

53
$$\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

شیکارکردنی سیستمی هیلی به به کارهینانی بهرنامهی Excel



په یوهنده به وانهی 3-5

چالاکي

$$\begin{cases} 7x + 2y = -8 \\ -3x + y = 9 \end{cases}$$

د توانیت بهرنامهی Excel به کاربښت بڼه ژمارکردنی سنووردهی پیزکراوهکه و هه لگه پراوهی پیزکراوهکه. به نیازی شیکارکردنی سسته می $AX = B$ به نوو سینی $X = A^{-1}B$ و هه ژماری پیزکراوهی $A^{-1}B$ بڼه دوزینه وهی A^{-1} . ده سیکه به هه ژماری سنووردهی پیزکراوهی A له بیرت بیت. سنووردهی پیزکراوهی $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بریتیه له $|A| = ad - bc$

	A	B	C	D
1				
2	Matrix A	7	2	
3		-3	1	
4				
5	Determinant A		13	

هه چوار هاوکولکه کانی سسته که a له $B2$ له b له $C2$ له c له $B3$ له d له $C3$ بخه ناو بژمیره که وه. بڼه ژمارکردنی سنووردهی پیزکراوه هه مانه $B2 * C3 - B3 * C2$ له خانهی C5 تۆماریکه.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ یان } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{|A|} & -\frac{b}{|A|} \\ -\frac{c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{bmatrix}$$

بریتیه له A^{-1} بڼه دوزینه وهی $A^{-1}B$ له خانهی C7 بخه ناو خانهی C7 بڼه ژماری $\frac{d}{|A|}$ و بڼه ژماری $\frac{a}{|A|}$ له خانهی D8 تۆماریکه.

	A	B	C	D	E
6					Matrix B
7	Inverse A or A ⁻¹	0.076923	-0.15385	-8	
8		0.230769	0.538462	9	
9					
10	Solution A ⁻¹ B			-2	
11					

شیکاری پیزکراوهکه له ستوونیک پیکدیت هه ویش $A^{-1}B$ دوو ژماره لای راستی هاوکیشه که واته (8- و 7) له دوو خانهی E7 و E8 به وداي یه کدا تۆماریکه. بڼه ژماری پیزکراوهی $A^{-1}B$ هه مانه تۆماریکه.

$$D10 = C7 * E7 + D7 * E8$$

$$\text{و } D11 = C8 * E7 + D8 * E8 \text{ له خانهی D11.}$$

	A	B	C	D	E
6					Matrix B
7	Inverse A or A ⁻¹	0.076923	-0.15385	-8	
8		0.230769	0.538462	9	
9					
10	Solution A ⁻¹ B			-2	
11					

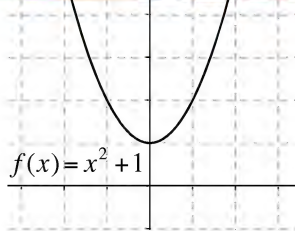
شیکار بریتیه له $x = -2$ و $y = 3$. بهرنامه یه کت داپشت بڼه شیکارکردنی سسته می هاوکیشه هیلیه کانی 2×2 . یه کیک له هاوکولکه کانی سسته می پیشو بگوره یان یه کیک له ژماره کانی لای راست بگوره. تبیینی بکه چوڼ هه نجامه کان ده گوریت.

هه ولبد

- 1 هه ردو ژماره لای راستی دوو هاوکیشه که بگوره به دوو ژماره 5- و 9، سسته می نوی شیکاریکه به به کارهینانی هه بهرنامه ی داترشتووه.
- 2 چوڼ راستی هه نجامه کت ده سه لمینیت به کارهینانی بهرنامه ی Excel ؟
- 3 بیري پرخنه گر هه بهرنامه یه به کاربښه بڼه شیکارکردنی سسته می کی هه سته م که پیشتر زانیوته. و یه کیک تر دیارینه کراو بیت. چوڼ بهرنامه ی Excel به کارده هیلیت بڼه وهی بزانتی که هه سته م هه سته م یان دیارینه کراوه.

ژماره ئاویتەکان

Complex Numbers



بۆچی ئەمە فیژدەبین؟

دەتوانیڤ ژماره ئاویتەکان بۆ شیکاری ئەو ھاوکێشه دووجایانە بەکاربهێنریت کە لە ژماره راستیهکاندا شیکاریان نییه (نموونه 4)

دەتوانیت بە پروونکردنەوهی دڵنیابیت کە نهخشی $f(x) = x^2 + 1$

شیکاری نییه لە کۆمهڵی ژماره راستیهکاندا. ئەگەر ههولبدهیت شیکاری ئەم ھاوکێشه دووجایه $x^2 + 1 = 0$ بکەیت کە ئاوێڵیەتی ئەوا $x = \pm\sqrt{-1}$ دەستدەکەوێت. ئەمەش دڵنیات دەکات کە پەگەکانی راستی نین. بەلام بۆئەوهی لەتواناندا هەبێت ئەم جوړه ھاوکێشانه شیکاریکەیت پێویستە پەگی دووجای ژماره سالب بزانی. زانیانی بیرکاری ئەم جوړه پەگانهیان خستەناو زانستی بیرکاریهوه و ناویان لێنا **ژماره ئاویتەکان Complex numbers**. یەکهمین ژماره لەم ژمارانه $i = \sqrt{-1}$ ناویان لێنا یەکهی **خەیاڵی Imaginary Unit**. دەتوانیت پەگی دووجا بۆهەر ژمارهیهکی سالب بە بەکارهێنانی یەکهی خەیاڵی بنووسیت.

ئامانجەکان

- ناسینەوهی ژماره خەیاڵیهکان و ئاویتەکان و چۆنیەتی بەکارهێنانیان
- ھاوکێشه دووجاکان کە لەژماره راستیهکاندا پەگیان نییه شیکاردەکات.

زاراوهکان Vocabulary

یەکهی خەیاڵی
Imaginary unit
ژماره خەیاڵی
Imaginary number

ژماره خەیاڵیهکان

بەجەبر	بەژماره	بەنوسین
ئەگەر b ژمارهیهکی راستی مۆجەب بێت ئەوا: $\sqrt{-b} = i\sqrt{b}$ $\sqrt{-b^2} = ib$ $(\sqrt{-b})^2 = -b$	$\sqrt{-1} = i$ $\sqrt{-2} = \sqrt{-1}\sqrt{2} = i\sqrt{2}$ $\sqrt{-4} = \sqrt{-1}\sqrt{4} = 2i$ $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$	ژماره خەیاڵی Imaginary Number پەگی دووجای ژمارهیهکی سالبه دەتوانریت ههموو ژمارهیهکی خەیاڵی لەسەر شێوهی bi بنوسریت کاتێک b ژماره راستی و i یەکهی خەیاڵی بێت. دووجای هەر ژمارهیهکی خەیاڵی دەکاتە ئەو ژماره سالبهی بۆ پێناسهکردنی بەکارهاتوو.



ژماره ئاویتە
Complex number
بەشی راستی
Real part
بەشی خەیاڵی
Imaginary part
ئاوێڵی ژماره ئاویتە
Complex conjugate

سادەکردنی پەگه دووجاکانی ژماره سالبهکان

1 نموونه

هەر بڕهیهک به پێی i بنووسه.

$3\sqrt{-16}$ ا	$3\sqrt{(16)(-1)}$	-16 شیتەل بکە
$3\sqrt{16}\sqrt{-1}$	$3\sqrt{16}\sqrt{-1}$	سیفەتی لێکدانی پەگەکان
$3 \times 4\sqrt{-1}$	$3 \times 4\sqrt{-1}$	سادەبکە
$12\sqrt{-1}$	$12\sqrt{-1}$	لێکبە
$12i$	$12i$	به پێی i بنووسه
$-\sqrt{-75}$ ب	$-\sqrt{(75)(-1)}$	-75 شیتەل بکە
$-\sqrt{75}\sqrt{-1}$	$-\sqrt{75}\sqrt{-1}$	سیفەتی لێکدانی پەگەکان
$-\sqrt{25}\sqrt{3}\sqrt{-1}$	$-\sqrt{25}\sqrt{3}\sqrt{-1}$	سیفەتی لێکدانی پەگەکان
$-5\sqrt{3}\sqrt{-1}$	$-5\sqrt{3}\sqrt{-1}$	سادەبکە
$-5\sqrt{3}i = -5i\sqrt{3}$	$-5\sqrt{3}i = -5i\sqrt{3}$	به پێی i بنووسه

1. هەر بڕهیهک به پێی i بنووسه.



$$-\frac{1}{3}\sqrt{-63} \quad \text{ج}$$

$$2\sqrt{-36} \quad \text{ب}$$

$$\sqrt{-12} \quad \text{ا}$$

نمونه 2

شیکارکردنی ئەو هاوکێشه دووجایانهی که دوو پەرگه‌که‌ی خه‌یالین

هاوکێشه‌که شیکاریکه.

$$x^2 = -81 \quad \text{ا}$$

$$3x^2 + 75 = 0 \quad \text{ب}$$

$$x = \pm\sqrt{-81} \quad \text{په‌گی دووجای هه‌ردوولا وه‌ریگره}$$

$$3x^2 = -75 \quad -75 \text{ بۆ هه‌ردوولا زیاده‌که}$$

$$x = \pm 9i \quad \text{به‌پێی } i \text{ بنووسه}$$

$$x^2 = -25 \quad \text{هه‌ردوولا دابه‌شی بکه}$$

$$x = \pm\sqrt{-25} \quad \text{په‌گی دووجای هه‌ردوولا وه‌ریگره}$$

$$x = \pm 5i \quad \text{به‌پێی } i \text{ بنووسه}$$

پاسادانیکه

$3x^2 + 75 = 0$	پاسادانیکه	$x^2 = -81$	$x^2 = -81$
$3(\pm 5i)^2 + 75$	0	$(-9i)^2$	-81
$3(25)i^2 + 75$	0	$81i^2$	-81
$75(-1) + 75$	0 ✓	$81(-1)$	-81 ✓

2. هاوکێشه‌که شیکاریکه.



$$9x^2 + 25 = 0 \quad \text{ج}$$

$$x^2 + 48 = 0 \quad \text{ب}$$

$$x^2 + 36 = 0 \quad \text{ا}$$

ژماره ئاوێته‌کان C

$3+7i \quad 3+\frac{2}{3}i \quad 4-i$

ژماره راستیه‌کان (R)

$-\frac{1}{2} \quad 1.73 \quad 0 \quad \pi$
 $-9.6 \quad \sqrt{2}$

ژماره خه‌یالیه‌کان

$i \quad 3i \quad -5i$
 $\sqrt{-7}$

Complex Number ژماره‌ی ئاوێته

ژماره‌یه‌که ده‌توانیت به‌شێوه‌ی $a+ib$

بینووسیت کاتیگ a و b ژماره‌ی

راستی بن، $i = \sqrt{-1}$ کۆمه‌له‌ی ژماره‌ی

راستییه‌کان R به‌شێکه له کۆمه‌له‌ی

ژماره ئاوێته‌کان C واته $R \subseteq C$

هه‌موو ژماره‌یه‌کی ئاوێته به‌شێکی راستی **Real Part** (a) و به‌شێکی خه‌یالی **Imaginary Part** (b) هه‌یه.



ژماره راستیه‌کان ژماره‌یه‌کی ئاوێته‌ن که به‌شه خه‌یالییه‌کانیان سفره. ژماره خه‌یالییه‌کانیان

ژماره‌ی ئاوێته‌ن که به‌شه راستیه‌کانیان سفره. به‌شه خه‌یالییه‌که‌یان سفر نییه. دوو ژماره‌ی ئاوێته یه‌کسان

ده‌بن ئەگه‌ر به‌شه راستیه‌کانیان یه‌کسان بن و به‌شه خه‌یالییه‌کانیان یه‌کسان بن.

یه‌کسانبوونی دوو ژماره‌ی ئاوێته

نمونه 3

به‌های هه‌ریه‌که له x و y بدۆزه‌وه به‌مه‌رجێگ ئەم یه‌کسانبوونه دروستبێت. $3x - 5i = 6 - (10y)i$

$$3x - 5i = 6 - (10y)i$$

دوو به‌شه راستیه‌که دوو به‌شه خه‌یالییه‌که

$$-(10y) = -5 \quad \text{دوو به‌شه خه‌یالییه‌که یه‌کسان ده‌بن}$$

$$y = \frac{1}{2}$$

$$3x = 6 \quad \text{دوو به‌شه راستیه‌که یه‌کسان ده‌بن}$$

$$x = 2$$

3. بهای هریکه له x و y بدۆزهوه بۆئوهی یهکسانبوونهکه دروستییت.

ب $-8 + (6y)i = 5x - i\sqrt{6}$

ا $2x - 6i = -8 + (20y)i$



دۆزینهوهی سفره ئاویتتهکانی نهخشه دووجاکان

4 نمونه

هردوو سفری نهخشه دووجاکه بدۆزهوه.

ب $g(x) = x^2 + 10x + 35$

ا $f(x) = x^2 - 2x + 5$

$x^2 + 10x + 35 = 0$ هاوکیشهکه بنوسه

$x^2 - 2x + 5 = 0$ هاوکیشهکه بنوسه

$x^2 + 10x + 25 = -35 + 25$ زیادبکه بۆ ئوهی

$x^2 - 2x + 1 = -5 + 1$ زیادبکه بۆ ئوهی

$(x+5)^2 = -10$ بییت بهدووجای تهواو

$(x-1)^2 = -4$ بییت بهدووجای تهواو

$x+5 = \pm\sqrt{-10}$ پهگی دووجا وهریگره

$x-1 = \pm\sqrt{-4}$ پهگی دووجا وهریگره

$x = -5 \pm i\sqrt{10}$ سادهبکه

$x = 1 \pm 2i$ سادهبکه

4. هردوو سفری نهخشه دووجاکه بدۆزهوه.

ب $g(x) = x^2 - 8x + 18$

ا $f(x) = x^2 + 4x + 13$



له نمونهی 4- ب دا پهیوهندییهکه هیه هردوو سفری نهخشهکه $-5 + i\sqrt{10}$ و $-5 - i\sqrt{10}$ به یهکهوه دهبهستییت. ئهی دوو ژماره ئاویتتهیه ئاوئلی یهکتردهین. بهشه راستیهکانیان یهکسانن و بهشه خهیاالییهکانیان دژه کوئی یهکتردهین. ژماره ئاوئ **Conjugate Number** بۆ ژماره ئاویتتهی $a+bi$ بریتییه له ژماره ئاویتتهی $a-bi$ ئهگهر هردوو پهگهکانی هاوکیشهیهکی دووجا هاوکۆلهکانیان ژماره راستی بن و خوین راستی نهبوون ئهوا پهگهکانیان دوو ژماره ئاویتتهی ئاوئلی یهکتردهین.

پۆشنایی

ئهگهر هاوکۆلهکانی هاوکیشهیهکی دووجا ژماره راستی بن، یهکێک له پهگهکانیمان زانی و ژماره ئاویتته بوو ئهوا پهگی دووهم دهبیته ئاوئلی ئهوا پهگی.

دۆزینهوهی ژماره ئاوئ بۆ ژمارهیهکی ئاویتته

5 نمونه

ئاوئلی ئهم ژماره ئاویتتانه بدۆزهوه.

ب $-4i$

ا $2i - 15$

$0 + (-4)i$ بهشیوهی $a+bi$ بنوسه

$-15 + 2i$ بهشیوهی $a+bi$ بنوسه

$0 - (-4)i$ بدۆزهوه $a-bi$

$-15 - 2i$ بدۆزهوه $a-bi$

$4i$ سادهبکه

5. ئاوئلی ئهم ژماره ئاویتتانه بدۆزهوه.

ج $-8i$

ب $i + \sqrt{3}$

ا $9 - i$



بیریکهوه و تاوتویبکه

ژماره ئاویتتهکان

ژماره خهیاالییهکان

1. ئهگهر زانیت $3 + i$ پهگیکی هاوکیشهیهکی دووجایه که

هاوکۆلهکانی ژماره راستین چون پهگهکهی تر دهمۆزیهوه

2. ژماره ئاویتتهی $a+bi$ بنوسه کاتیک $a \neq 0$ و $b = 0$ پاشان ژماره

ئاویتتهی $a+bi$ بنوسه کاتیک $a = 0$ و $b \neq 0$ وهلامهکهت پوونبکهوه

3. پیکهههه ئهم هیلکاریه دروستبکه و پاشان تهواوی بکه. لهههر

جوار چیهیهکدا پیناسه و نمونهی گونجاو بنوسه.



راهیانی ئاراسته‌کراو

1 زاراوه‌گان ژماره 7 بریتیه له _____ له ژماره $\sqrt{5} + 7i$ (بهشی راستی یان بهشی خه‌یالی).

1 پروانه نمونه

ژماره‌که به‌پیی i بنوسه.

$$\sqrt{-144} \quad 5$$

$$-\sqrt{-32} \quad 4$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{-16} \quad 3$$

$$5\sqrt{-100} \quad 2$$

2 پروانه نمونه

هاوکیشه‌که شیکاریکه.

$$x^2 + 121 = 0 \quad 9$$

$$4x^2 = -16 \quad 8$$

$$2x^2 + 72 = 0 \quad 7$$

$$x^2 = -9 \quad 6$$

3 پروانه نمونه

به‌های x و y بدۆزه‌که واده‌که‌ن ئهم به‌کسانیه دروست بیّت.

$$-4 + yi = -12x - i + 8 \quad 11$$

$$-2x + 6i = (-24y)i - 14 \quad 10$$

4 پروانه نمونه

سفره‌کانی نه‌خشه‌که بدۆزه‌که.

$$g(x) = x^2 + 6x + 34 \quad 13$$

$$f(x) = x^2 - 12x + 45 \quad 12$$

5 پروانه نمونه

ژماره‌ی ئاوڤل بدۆزه‌که.

$$6 + i\sqrt{2} \quad 17$$

$$8i - 3 \quad 16$$

$$\sqrt{5} + 5i \quad 15$$

$$-9i \quad 14$$

راهیانی و شیکارکردنی پرسیاره‌گان

ژماره‌که به‌پیی i بنوسه.

$$\sqrt{-50} \quad 21$$

$$6\sqrt{-12} \quad 20$$

$$-\frac{1}{3}\sqrt{-90} \quad 19$$

$$8\sqrt{-4} \quad 18$$

هاوکیشه‌که شیکاریکه.

$$\frac{1}{2}x^2 = -32 \quad 25$$

$$3x^2 + 27 = 0 \quad 24$$

$$5x^2 = -80 \quad 23$$

$$x^2 + 49 = 0 \quad 22$$

ه‌ردو به‌های x و y بدۆزه‌که واده‌که‌ن به‌کسانیه دروست بیّت.

$$5(x-1) + (3y)i = -15i - 20 \quad 27$$

$$9x + yi - 5 = -12i + 4 \quad 26$$

سفره‌کانی نه‌خشه‌که بدۆزه‌که.

$$g(x) = 4x^2 - 3x + 1 \quad 29$$

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 \quad 28$$

$$g(x) = 3x^2 - 6x + 10 \quad 31$$

$$f(x) = x^2 + 4x + 8 \quad 30$$

ژماره‌ی ئاوڤل بدۆزه‌که. پاشان هاوکیشه دووجا‌که که په‌گه‌کانی ئهم ژماره‌و ئاوڤله‌که‌یتی بنوسه‌وه:

$$\frac{i}{10} - 1 \quad 35$$

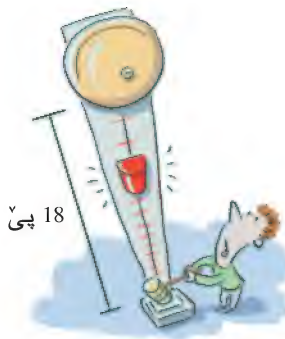
$$-2.5i + 1 \quad 34$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} - 2i \quad 33$$

$$i \quad 32$$

راهیانی نازاد

سهری	بۆشیکارکردنی
راهیانه‌گان	نمونه
1	21-18
2	25-22
3	27-26
4	31-28
5	35-32



36 چى دەبىت نەگەر؟ لە يەككە لە يارىيەكانى شارى يارى پيوسته ياريكەرەكە چەندى لەتوانادابىت سپرنگك رابكىشيت بۆئەوى گۆيە ئاسنەكە بە ئاراستەى زەنگەكە هەلبدات. ياريكەرەكە يارييەكە دەباتەو نەگەر گۆيەكە بەر زەنگەكە بكەوئيت، نەخشەى $d(t) = 16t^2 - 32t + 18$ نموونەى هەژمارکردنى دوورەى d بەپى لەنۆوان گۆ و زەنگەكە بە پى ژمارەى چركەكان t لەو كاتەو كە ياريكەرەكە لەتوانايداىە يارييەكە بباتەو؟

رەگى دوو دەمى ئەو هاوكيشە بدۆزەو كە هاوكۆلكەكانى راستين نەگەر بزانى ژمارە پيدراو كە يەككە لەرەگەكانى

$$\begin{array}{lll} 4i - 2\sqrt{5} & 37 & 1 + 14i \\ \frac{5}{7}i & 38 & \\ -\frac{17}{3}i & 39 & \\ 9 - i\sqrt{2} & 40 & -12 - i \\ & 41 & \end{array}$$

هەردوو بەهەى c و d بدۆزەو كە وادەكەن يەكسانىيەكە دروست بىت

$$\begin{array}{lll} c^2 + 4i = d + di & 42 & \\ c + 3ci = 4 + di & 43 & 2ci + 1 = -d + 6 - ci \\ & 44 & \end{array}$$

هاوكيشەكە شىكارىكە.

$$\begin{array}{lll} 2x^2 + 12.5 = 0 & 45 & \\ \frac{1}{3}x^2 = -27 & 46 & 8x^2 = -8 \\ 2x^2 + 16 = 0 & 47 & \\ x^2 = -30 & 48 & \frac{1}{2}x^2 + 72 = 0 \\ x^2 - 12x + 44 = 0 & 49 & \\ x^2 + 10x + 29 = 0 & 50 & x^2 - 4x + 8 = 0 \\ -149 = x^2 - 24x & 51 & \\ x^2 + 18 = -6x & 52 & x^2 + 2x = -5 \\ & 53 & \end{array}$$

ئەم دەستەوازانەى خوارەو هەميشە دروستن يان هەندىك جار دروست نين يان هەميشە نادروستن. نەگەر هەندىك جار دروست بوون نموونەيەك بىنەو پالېشتى ولامەكەت بكات.

$$\begin{array}{lll} \text{ژمارەى خەيالى ژمارەيەكى ئاوئيتەيە.} & 54 & \text{ژمارەيەكى راستى، ژمارەيەكى خەياليە.} \\ \text{ژمارەى ئاوئيتە ژمارەيەكى خەياليە.} & 55 & \text{ژمارەى پۆزەيى ژمارەيەكى ئاوئيتەيە.} \\ \text{هاوكيشە دووجاكان رەگى راستيان نيە.} & 56 & \text{ژمارەيەكى راستى، ژمارەيەكى ئاوئيتەيە.} \\ \text{هاوكيشە دووجاكان رەگى راستيان نيە.} & 57 & \text{هاوكيشەى دووجا رەگى راستى و رەگىكى ئاوئيتەى هەيە.} \end{array}$$

سفرەكانى نەخشەكە بدۆزەو.

$$\begin{array}{lll} h(x) = x^2 - 10x + 50 & 67 & g(x) = x^2 + 2x + 17 \\ h(x) = x^2 - 16x + 68 & 68 & f(x) = x^2 - 10x + 26 \\ & 69 & f(x) = x^2 + 16x + 73 \end{array}$$

70 بىرى رەخنەگر ئايا دەتوانيت دوو سفرى نەخشەى $f(x) = x^2 + 64$ بە پونكردنەوئى بدۆزيتەو؟ وەلامەكەت پونكەو.

71 بىرى رەخنەگر ئەو ژمارە ئاوئيتەيەى ئاوئىلى ژمارەيەكى راستىە چيە؟

72 بنووسە ئەو رېگايە چيە بەكاريدېنيت بۆ شىكارکردنى هاوكيشەيەكى دووجا كە رەگى راستى نيە؟

73 ياريكەرەك تۆپىكى بۆ سەرەو ليدا نەخشەى $h(t) = -4.9t^2 + 40t$ نموونەيە كە بۆهژمارکردنى بەرزى تۆپەكە بە مەتر لەدواى t چركە لەكاتى ليدانيدا.

أ گۆرەپانەكە سەقفىكى بەتۆپى هەبىت بەرزىەكەى 72 مەتر بيت هاوكيشەى $-4.9t^2 + 40t = 85$ شىكارىكە.

ب پشتبەستن بەوى لە پرسىارى (أ) دا دۆزيتەو ئايا تۆپەكە دەگاتە تۆرەكە؟ ئەو پونكەو.

ج بەرزترين بەرزى چەندەكە تۆپەكە دەتوانيت بيگاتى. بەپشت بەستن بە نموونەكە؟

دەروازەيەك

مىژووى بىركارى



زانای بىركارى سويسرى

ليونارد ئۇلر Euler

(1707-1783) يەكەم كەس

بوو هيمای i بەكارهينا بۆ

$\sqrt{-1}$ وە $f(x)$ بەكارهينا

بۆ بەهەى نەخشەى f

كاتىك گۆراوى x گۆراوىكى

ئازاد بىت.



- 76 كام له مانه ئاوڤلى ژماره ئاوڤتهى $-2+i$ يه؟
 (أ) $2+i$ (ب) $2-i$ (ج) $i-2$ (د) $-2-i$
- 77 كام له مانه دهكاتە $\sqrt{-225}$ نوسراوه به پيى i ؟
 (أ) $15i$ (ب) $-15i$ (ج) $i\sqrt{15}$ (د) $-i\sqrt{15}$
- 78 كام له مانه دوو سفرى نهخشهى $f(x) = x^2 - 2x + 17$ ؟
 (أ) $1 \pm 4i$ (ب) $4 \pm i$ (ج) $-1 \pm 4i$ (د) $-4 \pm i$
- 79 كام بهها بۆ نهزانراوى c دا له م يهكسانىيه $11 - (9 + ci) = 3 - 4i$ دروست بئت؟
 (أ) -2 (ب) -4 (ج) 2 (د) 4
- 80 كام له م هاوكيشانهى خواروه ئه م دوو پهگهى $-6i$ و $6i$ ههيه؟
 (أ) $-\frac{1}{6}x^2 = 6$ (ب) $\frac{1}{4}x^2 = 9$ (ج) $x^2 - 30 = 6$ (د) $20 - x^2 = -16$
- 81 **كورتە وه لām** جوړى شيكارهكانى ئه و هاوكيشانهى له سهر شيوهى $x^2 = a$ دهنوسريت كاتيك $a > 0$ و كاتيك $a < 0$ پروونكهوه؟

به رهنگارى و په رهيډان

- 82 ژماره ئاوڤتهى $a + bi$ بدۆزه و كاتيك $5a + 3b = 1$ و $-5b = 7 + 4a$.
- 83 نايا دهگونجيت هاوكيشهيهكى دووجا يهك پهگى راستى ههبيت؟ يهك پهگى خهيالى ههبيت؟ يهك پهگى ئاوڤتهى ههبيت؟
- 84 نهجامى ههر مهرجيك له سهر شيكاركردى هاوكيشهى $x^2 + bx + c = 0$ دياريبكه.
 (أ) $b = 0$ (ب) $c \leq 0$ (ج) $c > 0$ (د) كام مهرجه وا له بهشى خهيالى شيكارهكه دهكات يهكسان نهبيت به سفر؟

پيداچوونه وهى لولپيچى

ئهم ريزكراوانهى خواروه بهكاربيته بۆ شيكارى پرسيارهكانى 85 تا 88 ههژماريان بكه نهگهر توانرا (وانهى 3-2)

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 0 & -1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

85 T^2 86 TV 87 ST 88 S^2

بۆههر نهخشهيهك: (أ) دياريبكه نايا ويته پونكردنه وهديهكهى له سهر وه بۆ خواروه دهكريتهوه. (ب) تهوهرى هاوجيپوونى ويته پونكردنه وهديهكهى بدۆزهوه. (ج) سهرى ويته پونكردنه وهديهكهى بدۆزهوه. (د) يهكتربرهكهى لهگهڵ تهوهرى دووهم بدۆزهوه و ويته پونكردنه وهديهكهى بكيشه. (پولهكانى پيشوو)

89 $f(x) = \frac{1}{5}x^2 + x - 10$ 90 $f(x) = -x^2 + 3$
 91 $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ 92 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$

هاوكيشهكه به شيته لكردن شيكاربكه (پولهكانى پيشوو)

93 $x^2 + 5x = 14$ 94 $6x^2 = -x + 2$ 95 $4x^2 + 9 = 15x$
 96 $4x^2 = 1$ 97 $x^2 + 11x = -24$ 98 $x^2 = -7x$

کرداره‌کان له‌سەر ژماره ئاویتته‌کان

Operations With Complex Numbers

بوچی ئەمه فیژده‌بین؟

ژماره ئاویتته‌کان به‌کارده‌هێنرێن له‌و پرېسایانه‌ی شیوه‌ له‌یه‌ک‌بووه‌کان پیکده‌هێنیت. (پرسایاری 84)

ئامانجه‌کان

- چوار کرداره‌که له‌سەر ژماره ئاویتته‌کان ئەنجام دهدات.

زاراوه‌کان

Vocabulary

پووته‌ختی ئاویتته

Complex plane

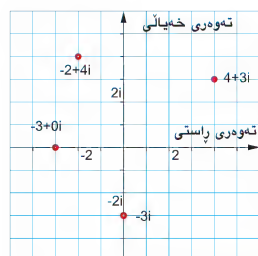
به‌های پووتی ژماره‌ی ئاویتته

Absolute value of a

complex number



له‌وانه‌کانی پێشوو ژماره‌ پاستیه‌کانت به‌ خال له‌سەر ته‌وه‌ری ژماره‌کان نواند. له‌م وانه‌یه‌دا فیژده‌بیت چۆن ژماره ئاویتته‌کان له‌ پووته‌ختی پووتانه‌کاندا به‌ خال بنوینیت. پووته‌ختی ئاویتته **Complex plane** پووته‌ختی پووتانه ته‌وه‌ری یه‌که‌می کۆمه‌له‌ی ژماره‌ پاستیه‌کان و ته‌وه‌ری دووه‌می ژماره‌ خه‌یالییه‌کان ده‌نوینیت.



نواندنی ژماره‌ی ئاویتته:

هه‌ریه‌که له‌م ژماره ئاویتته‌کان به‌ پوونکردنه‌وه‌یی بنوینه.

ج $4+3i$

ا $-3+0i$

د $-2+4i$

ب $-3i$

رۆستایی

ته‌وه‌ری راستی ته‌وه‌ری یه‌که‌مه و ته‌وه‌ری خه‌یالی ته‌وه‌ری دووه‌مه. بیربکه‌وه له نمونه‌ی $a+bi$ که بریتیه $x+iy$ له

1. هه‌ریه‌که له‌م ژماره ئاویتته‌کان به‌ پوونکردنه‌وه‌یی بنوینه.

د $3+2i$

ج $-2-i$

ب $2i$

ا $3+0i$



له‌بیرت بێت که به‌های پووتی ژماره‌یه‌کی راستی ده‌کاته ئه‌و دوو‌ریه‌ی ده‌که‌وێته ئێوان ئه‌و خاله‌ی که ژماره ده‌نوینیت له‌سەر ته‌وه‌ری ژماره‌کان و خالی بنه‌رپت له‌سەر هه‌مان ته‌وه‌ره. هه‌مان پرېگا به‌کارده‌هێنرێن بۆ پێناسه‌ی به‌های پووتی ژماره‌ی ئاویتته **Absolute value** که بریتیه له‌و دوو‌ریه‌ی ئێوان ئه‌و خاله‌ی ژماره‌که ده‌نوینیت له‌ پووته‌ختی ئاویتته‌که و خالی بنه‌رپت له‌و پووته‌خته‌دا.

به‌های پووتی ژماره‌ی ئاویتته

نمونه	به‌جه‌بر	به‌نووسین
$ 3+4i = \sqrt{3^2 + 4^2}$ $= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$	$ a+bi = \sqrt{a^2 + b^2}$	<p>به‌های پووتی ژماره‌ی ئاویتته $a+bi$</p> <p>Absolute value ده‌کاته دوو‌ری ئێوان خالی (a, b) و خالی بنه‌رپت له‌ پووته‌ختی پووتانه‌دا. به‌های پووتی ژماره‌ی ئاویتته $a+bi$ به‌ شیوه‌ی $a+bi$ ده‌نووسریت.</p>



نمونه 2

هه ژمارکردنی بهای پروتی ژماره ناوخته

بهای پروتی ئەم ژماره ناوخته هه ژماریکه.

ا	ب	ج
$ -9+i $	$ 6 $	$ -4i $
$ -9+i $	$ 6+0i $	$ 0-4i $
$\sqrt{(-9)^2+1^2}$	$\sqrt{6^2+0^2}$	$\sqrt{0^2+4^2}$
$\sqrt{81+1}=\sqrt{82}$	$\sqrt{36}=6$	$\sqrt{16}=4$

2. بهای پروتی ئەم ژماره ناوخته هه ژماریکه.

ا	ب	ج
$1-2i$	$-\frac{1}{2}$	$23i$



کۆکردنه وه و لیدهرکردنی ژماره ناوخته کان هاوشیوهی کۆکردنه وه و لیدهرکردنی ئەو بره جهریانهیه که چهند رادهیهکی هاوشیوهی تیدایه. بۆ کۆکردنه وهی ژماره ناوخته کان به شه راستیه کان بهیه که وه و به شه خه یالیه کانیش بهیه که وه کۆدهرکینه وه.

کردارهکانی کۆکردنه وه و لیدهرکردن و لیکدان له کۆمهلهی ژماره ناوخته کان هه مان سیفه تهکانی ئەو کردارانه یان ههیه له کۆمهلهی ژماره راستیه کان. بۆیه ده توانیت سیفه تهکانی ئالوگۆر و به کتر به ستن و به شینه وه به کار به یئیت بۆ نووسینی بره ناوخته کان به ساده ترین شیوه.

نمونه 3

کۆکردنه وه و لیدهرکردنی ژماره ناوخته کان

کۆیکه وه یان دهریکه. ئەهجامه که له سه ر شیوهی $a+bi$ بنوسه.

دویه شه راستیه که به جیاو دوویه شه	ا	$(3-11i)+(-2+4i)$
خه یالیه که به جیا کۆیکه وه		$(3-2)+(-11i+4i)$
		$1-7i$
به شینه وه بکه	ب	$(4-i)-(5+8i)$
هه ردو به شه راستیه که کۆیکه وه		$(4-i)-5-8i$
ههروه ها دوویه شه خه یالیه که		$(4-5)+(-i-8i)$
		$-1-9i$
دویه شه راستیه که کۆیکه وه ههروه ها	ج	$(6-2i)+(-6+2i)$
دویه شه خه یالیه که		$(6-6)+(-2i+2i)$
		$0+0i$
		0
به شینه وه بکه	د	$(10+3i)-(10-4i)$
دویه شه راستیه که کۆیکه وه		$(10+3i)-10-(-4i)$
ههروه ها دوویه شه خه یالیه که		$(10-10)+(3i+4i)$
		$0+7i=7i$

رۆشناایی

ژماره ی ناوخته ی $a+bi$ دژه
کۆیکه ی ده کاته $-a-bi$

3. کۆیکه وه یان دهریکه. ئەهجامه که به شیوهی $a+bi$ بنوسه.

ا	ب	ج
$(-3+5i)+(-6i)$	$2i-(3+5i)$	$(4+3i)+(4-3i)$

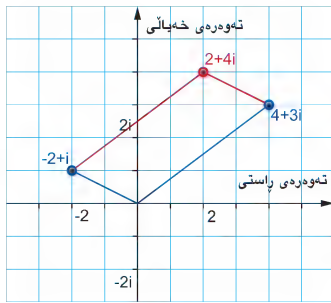


ده توانیت ژماره ناوخته کان کۆیکه یته وه به به کاره یئانی پروته ختی پۆوتان.

نمونه 4

کۆکردنه‌وه‌ی ژماره ئاویتته‌کان له‌سه‌ر پووتهختی ئاویتته

سه‌رجه‌می $(-2+i) + (4+3i)$ به‌پوونکردنه‌وه‌یی بدۆژه‌وه.



هه‌نگاوی 1 هه‌ردوو ژماره‌ی ئاویتته‌ی $4+3i$ و $-2+i$ له

پووتهختی ئاویتته‌که‌دا به‌پوونکردنه‌وه‌یی

دیاریده‌که‌ین. به‌پارچه‌ی پاسته‌هیڵێک هه‌ر

خاڵێکیان ده‌گه‌یه‌نین به‌خاڵی بنه‌په‌ت.

هه‌نگاوی 2 لاتهریبه‌که‌ ته‌واوبه‌. سه‌ری چواره‌می

لاتهریبه‌که‌ بریتییه‌ له‌ کۆی دوو ژماره‌ ئاویتته‌که‌

ده‌کاته $2+4i$

که‌واته $(4+3i) + (-2+i) = 2+4i$

ساغکردنه‌وه‌ دوو ژماره‌ ئاویتته‌که‌ کۆده‌که‌ینه‌وه‌. به‌شی پاستی به‌یه‌که‌وه‌ و به‌شه

خه‌یالییه‌کانیش به‌یه‌که‌وه‌. $(4+3i) + (-2+i) = (4-2) + (3i+i) = 2+4i$

4. به‌پوونکردنه‌وه‌یی هه‌ژماریکه‌.



ب $(-4-i) + (2-2i)$

ا $(3+4i) + (1-3i)$

ده‌توانیت ژماره‌ ئاویتته‌کان لیکبه‌ده‌یت به‌به‌کاره‌ینانی به‌شینه‌وه‌. به‌په‌فتارکردن له‌گه‌ڵ به‌شه

خه‌یالییه‌کان وه‌ک راده‌ له‌یه‌که‌چووه‌کان. به‌گۆڕینی i^2 به‌ژماره‌ -1 له‌هه‌ر شوێنێکدا هه‌بوو.

لیکدانی ژماره ئاویتته‌کان

نمونه 5

لیکبه‌ده‌. ئه‌نجامه‌که‌ به‌ شیوه‌ی $a+bi$ بنوسه‌.

ج $(5-6i)(4-3i)$

ا $2i(3-5i)$

$20-15i-24i+18i^2$

$6i-10i^2$

$20-39i+18(-1)$

$6i-10(-1)$

$2-39i$

$10+6i$

د $(6i)(6i)$

ب $(7+2i)(7-2i)$

$36i^2$

$49-14i+14i-4i^2$

$36(-1)$

$49-4(-1)$

-36

53

5. لیکبه‌ده‌. ئه‌نجامه‌که‌ له‌سه‌ر شیوه‌ی $a+bi$ بنوسه‌.



ج $(3+2i)(3-2i)$

ب $(4-4i)(6-i)$

ا $2i(3-5i)$

ده‌توانیت هێژه‌کانی یه‌که‌ی خه‌یالی i بدۆزیته‌وه‌. وه‌ک چۆن له‌م خسته‌یه‌ی خواره‌دا پوونکراوه‌ته‌وه‌.

هێژه‌کانی ژماره‌ i		
$i^9 = i$	$i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i$	$i^1 = i$
$i^{10} = -1$	$i^6 = i^4 \times i^2 = 1 \times (-1) = -1$	$i^2 = -1$
$i^{11} = -i$	$i^7 = i^4 \times i^3 = 1(-i) = -i$	$i^3 = i^2 \times i = (-1) \times i = -i$
$i^{12} = 1$	$i^8 = i^4 \times i^4 = 1 \times 1 = 1$	$i^4 = i^2 \times i^2 = (-1)(-1) = 1$

پۆشنایی

سه‌رنج بده‌ ئه‌و شیوازه‌ی دووباره‌بوونه‌وه‌ له‌هه‌ر پیزێک یارمه‌تیت ده‌دات بۆ هه‌ژمارێ هه‌ر هێژێک له‌ هێژه‌کانی ژماره‌ i که‌ بریتییه‌ له‌ ژماره‌کانی $1, -i, -1, i$

نمونه 6

ههژمارى هیزهکانى ژماره i

ا $-3i^{12}$ به سادهترین شیوه بنووسه.

$$\begin{aligned} -3i^{12} &= -3(i^2)^6 \\ &= -3(-1)^6 = -3 \times 1 = -3 \end{aligned}$$

ب i^{25} به سادهترین شیوه بنووسه.

$$\begin{aligned} i^{25} &= i \times i^{24} \\ &= i(i^2)^{12} \\ &= i(-1)^{12} = i \times 1 = i \end{aligned}$$

6. ئەمانه به سادهترین شیوه بنووسه.

ب i^{42}

ا $\frac{1}{2}i^7$



بیربکهوه ئەو برهێ به سادهترین شیوه دهینووسیت نابیت ژیرهکەى پەگى تێدابیت. لهبەرئەوهى i پەگى دووجایه بۆیه نووسینی برێكى ئاوێته به سادهترین شیوه پێویست دهکات ژیرهکەى پزگار بکەین له i به پزیهی کردنی ژیره. به لیکدانى سه ره و ژیره له ئاوهلی ئەو ژماره ئاوێتهیهى که له ژیره دایه.

نمونه 7

دابهشکردنى ژماره ئاوێتهکان

ا به سادهترین شیوه بنووسه $\frac{3+7i}{8i}$

$$\begin{aligned} \frac{3+7i}{8i} &= \frac{3+7i}{8i} \times \left(\frac{-8i}{-8i} \right) \\ &= \frac{-24i-56i^2}{-64i^2} \\ &= \frac{-24i+56}{64} \\ &= \frac{-3i+7}{8} = \frac{7}{8} - \frac{3}{8}i \end{aligned}$$

ب به سادهترین شیوه بنووسه $\frac{5+i}{2-4i}$

$$\begin{aligned} \frac{5+i}{2-4i} &= \frac{5+i}{2-4i} \times \left(\frac{2+4i}{2+4i} \right) \\ &= \frac{10+20i+2i+4i^2}{4+8i-8i-16i^2} \\ &= \frac{10+22i-4}{4+16} \\ &= \frac{6+22i}{20} = \frac{3}{10} + \frac{11}{10}i \end{aligned}$$

7. ئەمانه به سادهترین شیوه بنووسه.

ب $\frac{3-i}{2-i}$

ا $\frac{3+8i}{-i}$



بیربکهوه و تاوتویبکه

1. پوونبکهوه کەى ژمارهى ئاوێتهى $a+bi$ و ئاوهلهکەى یهکسان دهبن؟
2. ئەنجامى لیکدانى $(a+bi)(c+di)$ بدۆزهوه بهشى راستى و خهياىلى ئەنجامهکەى دیاریبکه.
3. پیکهههیه ئەم هیلکارییه دروست بکه و پاشان تهواوى بکه. لهههه چوارچۆیهیهکدا نمونهیهکى گونجاو دابنێ.

کۆکردنهوه	بههائى پروت
ژماره ئاوێتهکان	
ژمارهى ئاوهل	لیکدان



راهنانی ئاراسته‌کراو

1 **زاراوه‌گان** له پروته‌ختی ئاویتته دا ته‌وه‌ری یه‌که‌م ژماره‌ی ————— ده‌نوینت، به‌لام ته‌وه‌ری دووهم ژماره‌ی ————— ده‌نوینت. (پاستی، پژهیی، خه‌یالی).

1 پروانه‌ نمونه

ئهم ژماره ئاویتته‌یه به‌ پروونکردنه‌وه‌یی بنوینه.

2 4 3 $-i$ 4 $3+2i$ 5 $-2-3i$

2 پروانه‌ نمونه

به‌های پرووت بدۆزه‌وه.

6 $|4-5i|$ 7 $|-33.3|$ 8 $|-9i|$ 9 $|5+12i|$ 10 $|-1+i|$ 11 $|15i|$

3 پروانه‌ نمونه

کوچکه‌وه یان لیده‌ریکه. ئه‌نجامه‌که به‌ شیوه‌ی $a+bi$ بنووسه.

12 $(2+5i)+(-2+5i)$ 13 $(-1-8i)+(4+3i)$ 14 $(1-3i)-(7+i)$ 15 $(4-8i)+(-13+23i)$ 16 $(6+17i)-(18-9i)$ 17 $(-30+i)-(-2+20i)$

4 پروانه‌ نمونه

به‌ پروونکردنه‌وه‌یی سه‌رجه‌م بدۆزه‌وه.

18 $(3+4i)+(-2-4i)$ 19 $(-2-5i)+(-1+4i)$ 20 $(-4-4i)+(4+2i)$

5 پروانه‌ نمونه

لیکیده. ئه‌نجامه‌که به‌ شیوه‌ی $a+ib$ بنووسه.

21 $(1-2i)(1+2i)$ 22 $3i(5+2i)$ 23 $(9+i)(4-i)$ 24 $(6+8i)(5-4i)$ 25 $(3+i)^2$ 26 $(-4-5i)(2+10i)$

6 پروانه‌ نمونه

ئهمانه به‌ ساده‌ترین شیوه بنووسه.

27 $-i^9$ 28 $2i^{15}$ 29 i^{30}

7 پروانه‌ نمونه

دابه‌شبه‌که. ئه‌نجامه‌که به‌ شیوه‌ی $a+ib$ بنووسه.

30 $\frac{5-4i}{i}$ 31 $\frac{11-5i}{2-4i}$ 32 $\frac{8+2i}{5+i}$ 33 $\frac{17}{4+i}$ 34 $\frac{45-3i}{7-8i}$ 35 $\frac{-3-12i}{6i}$

راهنان و شکیارکردنی پرسیاره‌گان

ئهم ژماره ئاویتته‌یه به‌ پروونکردنه‌وه‌یی بنوینه.

36 -3 37 $-2.5i$ 38 $i+1$ 39 $4-3i$

به‌های پرووت بدۆزه‌وه.

40 $|2+3i|$ 41 $|-18|$ 42 $|\frac{4}{5}i|$ 43 $|6-8i|$ 44 $|-0.5i|$ 45 $|10-4i|$

راهنانی ئازاد

بۆشیکارکردنی پرسیاره‌گان	ته‌ماشای نمونه
39-36	1
45-40	2
51-46	3
54-52	4
60-55	5
63-61	6
69-64	7

کۆبکه‌وه یان دهریکه. نه‌جامه‌که به شیوه‌ی $a + bi$ بنوسه.

$$\begin{array}{lll} (4-2i)+(-9-5i) & \boxed{48} & 4i-(11-3i) & \boxed{47} & (8-9i)-(-2-i) & \boxed{46} \\ -16+(12+9i) & \boxed{51} & (3-i)-(-3+i) & \boxed{50} & (13+6i)+(15+35i) & \boxed{49} \end{array}$$

سه‌رجه‌م به پوونکردنه‌وه‌یی بدۆزه‌وه.

$$\begin{array}{lll} (-3-3i)+(4-3i) & \boxed{54} & (5+4i)+(-1+2i) & \boxed{53} & (4+i)+(-3i) & \boxed{52} \end{array}$$

لیکبه‌ده. نه‌جامه‌که به شیوه‌ی $a + ib$ بنوسه.

$$\begin{array}{lll} (7+2i)(7-2i) & \boxed{57} & (3-5i)(2+9i) & \boxed{56} & -12i(-1+4i) & \boxed{55} \\ -4(8+12i) & \boxed{60} & (7-5i)(-3+9i) & \boxed{59} & (5+6i)^2 & \boxed{58} \end{array}$$

به ساده‌ترین شیوه بنوسه.

$$\begin{array}{lll} 5i^{10} & \boxed{63} & -i^{11} & \boxed{62} & i^{27} & \boxed{61} \end{array}$$

دابه‌شیکه. نه‌جامه‌که به شیوه‌ی $a + ib$ بنوسه.

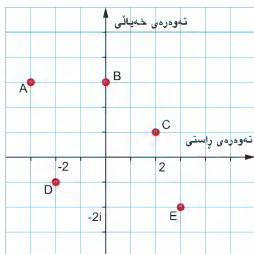
$$\begin{array}{lll} \frac{3}{-1-5i} & \boxed{66} & \frac{5-2i}{3+i} & \boxed{65} & \frac{2-3i}{i} & \boxed{64} \\ \frac{6+3i}{2-2i} & \boxed{69} & \frac{8+4i}{7+i} & \boxed{68} & \frac{19+9i}{5+i} & \boxed{67} \end{array}$$

ئه‌و ژماره ئاویتیه به بنوسه که خاله‌که ده‌نیوئیت.

$$\begin{array}{lllll} E & \boxed{74} & D & \boxed{73} & C & \boxed{72} & B & \boxed{71} & A & \boxed{70} \end{array}$$

به‌های پوونی ژماره ئاویتیه که بدۆزه‌وه.

$$\begin{array}{llll} -1-8i & \boxed{78} & 2\sqrt{2}-i\sqrt{3} & \boxed{77} & 7i & \boxed{76} & \frac{3}{2}-\frac{1}{2}i & \boxed{75} \end{array}$$



شیوه له‌یه‌کبووه‌کان Fractals شیوه له‌یه‌کبووه‌کان شیوازیکن له به‌کاره‌یانی ژماره ئاویتیه‌کان و دووباره‌کردنه‌وه‌ی یاسا بیرکارییه‌کان په‌یداده‌بن. ژماره‌ی یه‌که‌م له یاساکه‌دا له جیاتیکه پاشان نه‌جامه‌که بدۆزه‌وه. نه‌جامه‌که جاریکی تر له یاساکه‌دا له جیاتی بکه‌وه ... و هه‌روه‌ها ده‌توانریت هه‌ر ژماره‌یه‌کی ئاویتیه که له‌م کرداره دووباره‌بووه‌یه ده‌ستمان ده‌که‌ویت به‌کاربه‌یتریت بۆ دیاریکردنی په‌نگی بیکسل (یان خال) له‌سه‌ر شاشه‌ی بژمیره‌که، وینه‌ی به‌رامبه‌ر نمونه‌یه‌ک پوونده‌کاته‌وه له‌وه‌ی ده‌ستمان ده‌که‌ویت. زۆر له شیوازه‌کانی شیوه له یه‌کبووه‌کان پشت ده‌به‌ستن به یاسای کۆمه‌له‌ی جولیا Julia که بریتیه له $Z_{n+1} = (Z_n)^2 + c$ کاتیک $c = 0.25$ ژماره‌یه‌کی نه‌گۆرپیت، یاسای کۆمه‌له‌ی جولیا به‌کاربه‌ینه کاتیک

$$Z_1 = 0.5 + 0.6i \quad \boxed{ا}$$

$$Z_3 \text{ هه‌ژماره‌که به به‌کاره‌یانی ژماره‌ی } Z_2 \text{ که له لقی } \boxed{ب} \text{ دۆزیه‌وه.}$$

$$Z_4 \text{ هه‌ژماره‌که به به‌کاره‌یانی ژماره‌ی } Z_3 \text{ که له لقی } \boxed{ج} \text{ دۆزیه‌وه.}$$

دوای ساده‌کردن بره ئاویتیه‌که به شیوه‌ی $a + ib$ بنوسه.

$$\begin{array}{lll} (6-5i)^2 & \boxed{82} & (-2.3+i)-(7.5-0.3i) & \boxed{81} & 6i-(4+5i) & \boxed{80} \\ (2-i)(2+i)(2-i) & \boxed{85} & (5+7i)(5-7i) & \boxed{84} & (-2-3i)^2 & \boxed{83} \end{array}$$

ده‌روازه‌یه‌ک

شیوه له‌یه‌کبووه‌کان



شیوه‌ی له‌یه‌کبووه‌کان Fractal شیوه‌یه‌که یه‌ک له‌یه‌کتری په‌یداده‌بن له‌سه‌ر هه‌مان شیوازه‌اته به‌شه‌کانی شیوه‌که هاوشیوه‌ی شیوه گشتیه‌یه‌که له سروشتدا وینه له‌یه‌کبووه‌کان زۆرن وه‌ک ده‌ماری گه‌لاکانی دره‌ختیک کله به‌فره‌کانی به‌دوای یه‌کدا ده‌بارن.

زاناکان شیوه له‌یه‌کبووه‌کان به‌کارده‌هینن بۆ دروستکردنی نمونه له‌م چه‌شنانه.

$$i^{35} - i^{24} + i^{18} \quad \boxed{88}$$

$$\frac{4+2i}{6+i} \quad \boxed{91}$$

$$\frac{6}{\sqrt{2}-i} \quad \boxed{94}$$

$$i^{52} - i^{48} \quad \boxed{87}$$

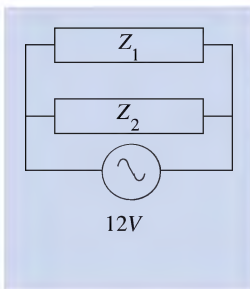
$$\frac{18-3i}{i} \quad \boxed{90}$$

$$\frac{4}{2-3i} \quad \boxed{93}$$

$$3 - i^{11} \quad \boxed{86}$$

$$\frac{12+i}{i} \quad \boxed{89}$$

$$\frac{1+i}{-2+4i} \quad \boxed{92}$$



ههنگای جۆراوجۆر تهوژمی کارهبا کاتیگ به تهنیکی دیاریکراودا دهپوات پروویهرووی بهرگرییه که دهبیتهوه که بهئوم دهپویریت. ئەندازیاره کارهبا ییهکان بێنیا که ئەم بهرگرییه به Z دهردهپریریت، به بهکارهینانی ژماره ئاویتیهکان زانیانی فیزیا وای دادهننن که ئەم بهرگرییه گشتیه بۆ سوپیکی کارهبا یی پیکدیت له دوو سووپی هاوپیک بهرگرییهکانیان Z_1 و Z_2 هاوتای بهرگری سووپیکی کارهبا ییه. که بهرگرییه که $Z_{eq} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$

95 بهرگری گشتی سووپه کارهبا ییه که بدۆزهوه که له دوو سووپی هاوپیک پیکهاتوون

$$\text{به رگرییه که یان } Z_1 = 3 + 2i \text{ و به رگری دووهمیان } Z_2 = 1 - 2i$$

96 بهرگری گشتی سووپه کارهبا ییه که بدۆزهوه که له دوو سووپی هاوپیک پیکهاتوون

$$\text{به رگری یه که میان } Z_1 = 2 + 2i \text{ و به رگری دووهمیان } Z_2 = 4 - i$$

پرونییه که دهسته واژه که هه می شه دروسته یان هه ندیک جار دروسته یان هه می شه نادرسته. ئەگەر دهسته واژه که هه ندیک جار نادروست بوو نمونه یه که بهینه وه له سه ر باریک که تییدا دروست بی، نمونه یه که تر له سه ر ئەو باره ی که تییدا نادروسته. ئەگەر دهسته واژه که هه می شه نادروست بوو نمونه یه که بهینه وه هه می شه نادروست بی، بۆ پالپشتی وه لاهه که ت.

97 سه رجه می هه ر ژماره یه کی ئاویتیه $a + bi$ و ئاو له که ی ژماره یه کی راستیه.

98 جیاوازی نیوان ژماره یه کی ئاویتیه $a + bi$ ($b \neq 0$) و ئاو له که ی ژماره یه کی راستیه.

99 ئەنجامی لیکدانی ژماره یه کی ئاویتیه $a + bi$ ($b \neq 0$) له ئاو له که ی ژماره یه کی راستی موجه به.

100 ئەنجامی لیکدانی ژماره یه کی خه یالی bi ($b \neq 0$) له یه کیکی تر di ($d \neq 0$) ژماره یه کی راستی موجه به.

101 **هه له له شیکردنه وه** ئەمه ی خواره وه دوو هه ولدانه بۆ نووسینی ژماره ئاویتیه ی $\frac{3}{2+i}$ به ساده ترین شیوه. کام هه ولیان هه له یه؟ هه له که پرونییه که وه.

$$\begin{aligned} \frac{3}{2+i} &= \frac{3}{2+i} \times \frac{(2-i)}{(2-i)} \\ &= \frac{6-3i}{4-i^2} \\ &= \frac{6-3i}{5} \end{aligned} \quad \text{ب}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2+i} &= \frac{3}{2+i} \times \frac{(2+i)}{(2+i)} \\ &= \frac{6+3i}{4+i^2} \\ &= \frac{6+3i}{3} = 2+i \end{aligned} \quad \text{ا}$$

102 **بیری ره خه نگر** بۆچی به های پروتی ژماره ی ئاویتیه یه که سانه به به های پروتی

ئاو له که ی؟ نواندنی پرونکردنه وه یی به کار بیته بۆ پرونکردنه وه ی وه لاهه که ت.

103 **بنوسه** له په یوه ندی نیوان جیاوازی نیوان دوو دوجا و $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ و

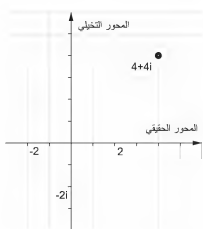
ئەنجامی لیکدانی ژماره یه کی ئاویتیه و ئاو له که بکۆله وه.

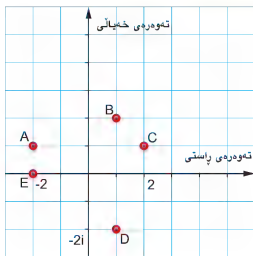
104 فیروویت چۆن دوو ژماره ی ئاویتیه به پرونکردنه وه یی کۆیکه یته وه.

ا سی جووت ژماره ی ئاویتیه بدۆزه وه که سه رجه می هه رجوتیک بکاته $4 + 4i$

ب کرداری کۆکردنه وه ی هه رییه که یان له هه مان پروته ختی ئاویتیه به پرونکردنه وه یی بنوینه.

ج ئەوه ی ده ستکه وتوه با سیکه.





وېتەنى پۈۈنكۈرۈنەۋەيى بەرامبەر بەكاربېنە بۆ شىكاركۈرۈنى
پرسىيارەكانى 105 و 106.

105 كام خال لە وېنەكە ژمارەى ئاۋىتەى $1-2i$ دەنۋىنېت.

ا) خالى A ب) خالى B ج) خالى C د) خالى D

106 ئەو ژمارە ئاۋىتەيەى كە خالى E دەنۋىنېت كامەيە.

ا) -2 ب) 2 ج) $-2i$ د) $2i$

107 كام لەم ژمارە ئاۋىتەنەى خوارەۋە سادەترىن شېۋەى بېرى $(2+5i)-(2-5i)$ ؟

ا) $10i$ ب) $4+10i$ ج) $-10i$ د) $4-10i$

108 كام لەم ژمارە ئاۋىتەنەى خوارەۋە سادەترىن شېۋەى بېرى $(-5+3i)^2$ ؟

ا) $16-15i$ ب) $16-30i$ ج) $34-15i$ د) $34-30i$

بەرەنگارى و فراوانكردن

109 ئەۋەى فېرى بوۋىت لە ھىزەكانى يەكەى خەيالى i بەكاربېنە بۆ شىكارى ئەم پرسىيارە.

ا) ئەم خىشتەيەى خوارەۋە تەۋاۋىكە و شېۋازىك پوختەبەكە.

$i^{-5} =$	$i^{-4} =$	$i^{-3} =$	$i^{-2} =$	$i^{-1} =$	$i^0 =$	$i^1 =$
------------	------------	------------	------------	------------	---------	---------

ب) ئەو شېۋازى دەستكەۋتۈۋە پەيۋەندى بە ھىزەكانى تۈانى سالىبى يەكەى خەيالى i ۋە ھەيە پۈۈنكەۋە. ئەو بەھايانەى كە لەتۈانادايە ئەم ھىزانە ۋەرىبگرن چىن؟

ج) i^{-12} و i^{-37} و i^{-90} بەسادەترىن شېۋە بنۈۋسە.

شېۋەى گىشتى ئەنجامى ھەريەكە لەم دوۋكردارەى خوارەۋەى سەر ژمارە ئاۋىتەكە بنۈۋسە:

$$\frac{a+bi}{c+di} \quad 111$$

$$(a+bi)(c+di) \quad 110$$

پىداچۈۋنەۋەى لوۋلىپىچى

112 بارە ئەم خىشتەيەى خوارەۋە خەرجى ھەفتانەى خوارەنى بەيانىانى دىلۋىز دەنۋىنېت لەماۋەى ھەفتەدا. پىدراۋەكان بە پۈۈنكۈرۈنەۋەى بنۋىنە راستەھىلى نىزىكتىرىن نۈۋەن بۆئەم خالانە بكىشە و ھاۋكىشەكەى بنۈۋسە. (ۋانەكە)

5	4	2	6	5	3	7	5	ژمارەى ژەمەكان
11	10	5	8	9	8	13	10	تىچۈۋن بەھەزاران دىنار

لاسەنگەكە بە جەبرى شىكارىكە.

$$10 < x^2 - 4x - 11 \quad 114$$

$$3x^2 - 6x \leq 0 \quad 113$$

$$3 - x^2 < 7 - 5x \quad 116$$

$$-6 \geq 2x^2 + 7x - 21 \quad 115$$

دىارىبەكە ئەم نەخشانە نەخشەيەكى دوۋجا دەنۋىن يان نا پۈۈنكەۋە.

x	0	2	4	6	118
y	18	10	2	-6	

x	-2	-1	0	1	117
y	5	-1	-3	-1	

رېبەرى خويندن: پىداچونەو

پىدراوەكانى ھەر خىشتەيەك لەپىزكراوہيەك رېكبەخە.

لېكەنى پىزكراوہكان بەكاربېنە بۆدۆزىنەوہى داھاتى پۆزانە.

داھاتى پۆزانەى فروشتنى بلىتى گەرە و

فروشتنى بلىتى مندا لان بدۆزەوہ.

پىزكراوہكان بەكاربېنە بۆدۆزىنەوہى وېنەى چارالاي $A(-2, -1)$, $B(-1, 3)$, $C(2, 4)$, $D(0, 0)$ بەپېى ئەم جىگۆرپكىنە:

پاكىشنى 2 يەكە بۆلای راست و يەكە يەكە بۆسەرەوہ

گەرەكردى چارالايەكە بە ھاوكلەكى 1.5

بە بەكارھيەننى پىزكراوہى $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ باسى جىگۆرپكىكە بەكە

بە بەكارھيەننى پىزكراوہى $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باسى جىگۆرپكىكە بەكە

پىزكراوہى $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ بەكاربېنە بۆ جىگۆرپكىكى سىگۆشەى

$C(3, -2)$, $B(0, 1)$, $A(-1, -2)$ وېنەى سىگۆشەكە و

وېنەى شىوہەكى بكيشە. جۆرى جىگۆرپكىكە دياربەكە.

سنوردەرى پىزكراوہكە بدۆزەوہ.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -0.5 & 3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 9 & -13 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

رېساي كرامەر بەكاربېنە بۆ شىكاركردى ھەر سىستېمىكى ھيلى.

$$\begin{cases} 2x + 5y + 21 = 0 \\ 7y + 47 = 6x \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 8y = 7 + 7z \\ 6x - 4y + 10z = -34 \\ 2x + 4y = 29 + 3z \end{cases} \quad \begin{cases} 4.5x + 3y = 10.5 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 2.4x = 0.8 \\ 3x + 0.5z = 2.25 \\ 3.5y + z = 8.5 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + z = 5 \\ y - x - z = 2 \\ x - y + z = 7 \end{cases}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 6 & -8 & 4 \\ -10 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

بەرەكە بدۆزەوہ ئەگەر تۈانرا.

$$0.2Q \quad P - 2Q$$

$$\frac{1}{2}(2P + R) \quad \frac{1}{2}R - \frac{1}{3}P$$

پىدراوہكانى خوارەوہ بەكاربېنە بۆ شىكاركردى

پرسىبارى 5 تا 7

لە ھەلمەتى پاككردەوہى سەيرانگايەك خويندكارانى پۆلى يازدەھەم 125 قووتوى ساردى و 45 كارتۇنيان كۆكردەوہ. خويندكارانى پۆلى دە 95 قووتوى ساردى و 65 كارتۇنيان كۆكردەوہ.

پىزكراوہى A بەكاربېنە بۆ پيشاندانى پىدراوہكانى سەرەوہ

پىزكراوہى D بنووسە جياوازى كۆكردەوہى ھەردو پۆلەكە دەرېخا

لە پۆزى داھاتودا ھەرپۆلىك دووئەوہندەى لەھەر

جۆرىكى پۆزى يەكەم كۆكردەوہ. پىزكراوہيەك بنووسە

ئەمە پونبىكاتەوہ.

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

بەرەكە بدۆزەوہ ئەگەر پېناسەكراوہو.

$$BC \quad AC \quad CA \quad AB$$

$$(BA)^2 \quad C^2 \quad A^2$$

ئەم دوو خىشتەيەى خوارەوہ نرخى بلىتەكان بە

دىنار فروشراوہكانى سى پۆز پووندەكاتەوہ.

نرخى بلىتەكان

مندا	گەرە	
2 500	5 000	سېشەمە
4 250	7 500	چارشەمە
5 750	9 000	پېنجشەمە

بلىتە فروشراوہكان

پېنجشەمە	چارشەمە	سېشەمە	
245	196	67	گەرە
154	75	104	مندا

هاوكيشهكه شيكاريكه.

$$x^2 = -81 \quad 45$$

$$6x^2 + 150 = 0 \quad 46$$

$$x^2 + 6x + 10 = 0 \quad 47$$

$$x^2 + 12x + 45 = 0 \quad 48$$

$$x^2 - 14x + 75 = 0 \quad 49$$

$$x^2 - 22x + 133 = 0 \quad 50$$

ئاوهلى ژماره ئاويتهكه بدؤزهوه.

$$5i - 4 \quad 51$$

$$3 + i\sqrt{5} \quad 52$$

بههاي پووت ههژماريكه.

$$|-3i| \quad 53$$

$$|4 - 2i| \quad 54$$

$$|12 - 16i| \quad 55$$

$$|7i| \quad 56$$

بپهكه لهسهه شيوه $a + bi$ بنووسه.

$$(1 + 5i) + (6 - i) \quad 57$$

$$(9 + 4i) - (3 + 2i) \quad 58$$

$$(5 - i) - (11 - i) \quad 59$$

$$-5i(3 - 4i) \quad 60$$

$$(5 - 2i)(6 + 8i) \quad 61$$

$$(3 + 2i)(3 - 2i) \quad 62$$

$$(4 + i)(1 - 5i) \quad 63$$

$$(-7 + 4i)(3 + 9i) \quad 64$$

$$i^{32} \quad 65$$

$$-5i^{21} \quad 66$$

$$\frac{2+9i}{-2i} \quad 67$$

$$\frac{5+2i}{3-4i} \quad 68$$

$$\frac{-12+26i}{2+4i} \quad 69$$

$$\frac{8-4i}{1+i} \quad 70$$

33 خالى يهكترپىنى دوورپاستههيلي $2x + 3y = 8$ و

$$y = x + 1$$

پيزكراوهى هاوكولكهكان بنووسه سنوردهرهكهى ههژماريكه

ب سيستمهكه شيكاريكه به بهكارهيناني پيساي گرامر

ههگهراوهى پيزكراوهكه بدؤزهوه.

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad 35 \quad \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad 34$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad 37 \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix} \quad 36$$

$$\begin{bmatrix} -1.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0.5 \end{bmatrix} \quad 38$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \end{bmatrix} \quad 39$$

سيستمه هيليهكه به بهكارهيناني پيزكراوهكان بنووسه.

پاشان شيكاريان بكه.

$$\begin{cases} x = 1 + y \\ x + y = 9 \end{cases} \quad 41 \quad \begin{cases} \frac{3}{2}x = 20 + y \\ x + 6y = 80 \end{cases} \quad 40$$

$$\begin{cases} 2x + 9 = 2z \\ 5x + y + 32 = 7z \\ 2(3x + y) = 8z - 39 \end{cases} \quad 42$$

$$\begin{cases} 2x + 9 = 2z \\ 5x + y + 32 = 7z \\ 2(3x + y) = 8z - 39 \end{cases} \quad 43$$

44 دوكانيكى فروشتنى دياريهكهكان ديارى بو

كپيارهكانى پيشكهش دهكات. دياريهكه بچووك كه

نرخهكهى 5000 ديناره دهكات بهو كپيارهكه بههائى

كرينهكانى له نيوان 25 000 دينار و 74 999 دينار

دايه. دياريهكهى مام ناوهندى 8 000 دينارى دهكات

بهو كپيارهكه بههائى كرينهكانى له نيوان 75 000 و

149 999 دينار دياريهكهى گهوره كه بههائى 12 500

ديناره پيشكهش بهو كپياره دهكات كه بههائى

كرينهكهى له 150 000 دينار كه متر نهبيت. دوكانهكه

ديارى پيشكهش كرد كه بههائى گهيشته 102 دينار.

ژماره دياريهكه بچووكهكان 6 نهوهندى ژماره

دياريهكه گهورهكان بوو.

ا سيستمى هاوكيشهكان بنووسه هم پرسپاره دهربرپيت.

ب رپساي گرامر بهكاربينه بو شيكارى سيستمهكه و

دياريكردنى ژماره دياريهكهكان لهههه جۆرئك.

تاقیکردنه‌وه‌ی به‌ش

سیستمه‌که به پرسیای کرامهر شیکاریکه.

$$\begin{cases} x+3z=3+2y & 19 \\ 3x+22=y+3z \\ 2x+y+5z=8 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y=1 & 18 \\ 3x-y=10 \end{cases}$$

ئه‌گهر توانرا هه‌لگه‌پراوه‌ی ریزکراوه‌که بدۆزه‌وه.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad 21 \quad \begin{bmatrix} 2 & 0.7 \\ 4 & 1.4 \end{bmatrix} \quad 20$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad 23 \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad 22$$

24 نرخ‌ی 2.5 kg هه‌نجیر و 1.5 kg خورما 14420 دیناره

نرخ‌ی 3.5 kg هه‌نجیر و 1 kg خورما 16910 دیناره

ریزکراوه‌کان به‌کاربینه‌ی بۆ دۆزینه‌وه‌ی نرخ‌ی 1 kg

له‌ههر جۆریکیان.

سیستمه‌ی هیللیه‌کان به‌شیوه‌ی ریزکراوه‌ی بنووسه، پاشان

شیکاریان بکه.

$$\begin{cases} 5x-2y=3 & 26 \\ 2.5x-y=1.5 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x+y=2 & 25 \\ 3x-2y+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-z=3+y & 28 \\ x+2=y+5 \\ 4z+x+y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y=3.5 & 27 \\ 3x=2.7+y \end{cases}$$

بره‌که‌ی به‌شیوه‌ی $a+bi$ بنووسه.

$$(6-2i)(2-2i) \quad 30 \quad (1-2i)-(5+2i) \quad 29$$

$$\frac{1-8i}{4i} \quad 32 \quad -2i^{18} \quad 31$$

هاوکێشه‌که شیکاریکه.

$$x^2+12x=-40 \quad 34 \quad x^2+25=0 \quad 33$$

$$2x^2-x+5=0 \quad 36 \quad (x-1)^2+7=0 \quad 35$$

ئاوه‌لی ژماره‌ی ئاویتته‌که بدۆزه‌وه.

$$-2+i\sqrt{2} \quad 39 \quad 6-7i \quad 38 \quad 5+3i \quad 37$$

پیدراوه‌کانی خسته‌که به‌کاربینه‌ی بۆشیکارکردنی پرسیاری

1 تا 4

خه‌لانه‌کان				
کۆی خاله‌کان	پله‌ی سییه‌م	پله‌ی دووهم	پله‌ی یه‌که‌م	
41	2	1	5	فیان
42	1	5	3	شاناز
29	4	1	3	شیرین

1 ریزکراوه‌یه‌که به‌کاربینه‌ی پیدراوه‌کانی خسته‌که ده‌ربخات

2 جۆری ریزکراوه‌که چیه‌؟

3 به‌های دانه‌ی a_{31} چه‌نده‌؟

4 ناویشانی ئه‌و دانه‌یه‌ی به‌هایه‌که‌ی 2 چه‌نده‌؟

ریزکراوه‌کان له پرسیاری 5 تا 10 به‌کاربینه‌ی ئه‌نجامه‌کان

هه‌ژماریه‌که ئه‌گهر توانرا.

$$G = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

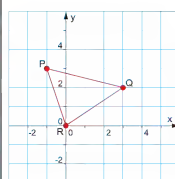
$$K = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$FE \quad 7 \quad EF \quad 6 \quad E+F \quad 5$$

$$FK \quad 10 \quad G^3 \quad 9 \quad H^2 \quad 8$$

ریزکراوه‌ی به‌کاربینه‌ی بۆ جیگۆرکێی سێگۆشه‌ی PQR به

جیگۆرکێی دیاریکراو (جیگۆرکێی سنوردان).



11 پاکیشانی دوو یه‌که‌ بۆ سه‌ره‌وه

یه‌که‌ بۆلای راست.

12 گه‌وره‌کردنێک به‌ هاوکۆله‌ی $\frac{3}{2}$

13 جیگۆرکێکردن به

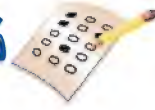
ریزکراوه‌ی و وینه‌که‌ی باسبکه.

سنوورده‌ری ریزکراوه‌که بدۆزه‌وه.

$$\begin{bmatrix} 0.25 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \quad 15 \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad 14$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad 17 \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad 16$$

تاقیکردنه‌وهی که‌له‌که‌بوو



1 ته‌مه‌نی هیوا دووسال که‌متره له چوارته‌وهندی ته‌مه‌نی هی‌رش، ته‌مه‌نی سەردار 6 سال زیاتره له‌نیوهی ته‌مه‌نی هیوا. هی‌مای x بۆته‌مه‌نی هی‌رش و هی‌مای y بۆته‌مه‌نی هیوا دابنئ. کام له‌م برانه ته‌مه‌نی سەردار ده‌نوینئ؟

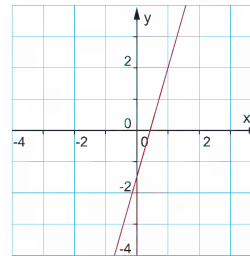
ا $\frac{1}{2}x+6$

ب $2x+5$

ج $4x+\frac{1}{2}y+4$

د $\frac{1}{2}(4x+2)-6$

2 وینه‌ پوونکردنه‌وه‌یه‌که‌ راسته‌هێلێک ده‌رده‌خات که‌ هێلێ سنووری ناوچه‌ شیکاری لاسه‌نگه‌یه‌کی هێلێیه‌، ئەم دوو جووته‌ پێک‌خراوه‌ (21, 83) و (16, 62) سەربه‌ کۆمه‌له‌ شیکاره‌که‌ی نین. کام له‌مانه‌ دروسته‌؟



ا هێلێ سنوور پێویسته‌ خا‌خال بێت، ناوچه‌ی

سەره‌وه‌ی هێله‌که‌ په‌نگراوبێت.

ب پێویسته‌ هێلێ سنوور نه‌پساو بێت، ناوچه‌ی

سەره‌وه‌ی هێله‌که‌ په‌نگراوبێت.

ج پێویسته‌ هێلێ سنوور خا‌خال بێت، ناوچه‌ی

ژێره‌وه‌ی هێله‌که‌ په‌نگراوبێت.

د پێویسته‌ هێلێ سنوور نه‌پساو بێت، ناوچه‌ی

ژێره‌وه‌ی هێله‌که‌ په‌نگراوبێت.

3 کام بره‌ی پیزکراوی یه‌کسانه‌ به‌ $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$ ؟

ا $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 22 & 28 \end{bmatrix}$

ب $2 \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$

ج $\begin{bmatrix} -6 & 17 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -13 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

4 خێرای فرۆکه‌ی $X-43A$ که‌ ئازانسی بۆشایی ئاسمانی ئەمریکی (ناسا) په‌ره‌پێدا گه‌یشه‌ 7 ما‌ک واته‌ حه‌وت ئەوه‌ندی خێرای ده‌نگ. ئەمه‌ش مانای ئەم فرۆکه‌یه‌ 16 میل له‌ 12 چرکه‌دا ده‌پێت. کام یه‌کێک له‌م نه‌خشانه‌ی خواره‌وه‌ ئەو دووریه‌ ده‌نوینئ که‌ فرۆکه‌که‌ به‌پێی کات بریویه‌تی کاتی که‌ به‌خێرای 7 ما‌ک ده‌پێت.

ا $f(s)=16x+12s$ ب $f(s)=\frac{3}{4}s$

ج $f(s)=16s$ د $f(s)=1\frac{1}{3}s$

5 دلشاد هاویه‌شی کۆنگره‌یه‌کی کرد. له‌ کۆنگره‌که‌دا به‌شدارێ چهند وه‌رشه‌یه‌کی کاری کرد. دلشاد هه‌ستا به‌ هه‌له‌سه‌نگاندنی ئەو وه‌رشه‌کارانه‌ی که‌ به‌شدارێ تیدا‌کردبوو به‌ پێدانی هه‌ریه‌کیکیان هه‌له‌سه‌نگاندنێک له‌ 1 - 10 پێکهاتوو ئەم خسته‌یه‌ی خواره‌وه‌ ماوه‌ی هه‌ر وه‌رشکارێک وه‌له‌سه‌نگاندنی دلشاد بۆی پوونده‌کاته‌وه‌.

32	120	48	93	53	ژماره‌ی خوله‌که‌کان
8	9	5	4	7	هه‌له‌سه‌نگاندن

هاوکۆله‌ی په‌یوه‌ستی په‌یوه‌ندی نیوان ماوه‌ی وه‌رشکاره‌که‌ و هه‌له‌سه‌نگاندنی دلشاد بۆی چهنده‌؟ نزیکیکه‌وه‌ بۆ نزیکترین به‌ش له‌سه‌د؟

ا 0.01

ب 0.12

ج 0.88

د 0.13

6 $M = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ و $N = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$. کام له‌مانه‌ی خواره‌وه‌ پیزکراوه‌ی $2MN$ ده‌نوینئ؟

ا $\begin{bmatrix} -24 & 184 & 0 \\ -12 & 124 & 192 \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} -12 & 92 & 0 \\ -6 & 62 & 96 \end{bmatrix}$

ج $\begin{bmatrix} -24 & -12 \\ 184 & 124 \\ 0 & 192 \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} -12 & -6 \\ 92 & 62 \\ 0 & 96 \end{bmatrix}$

7 ئەم یه‌کتربه‌رپه‌نانه‌ی خواره‌وه‌ له‌گه‌ڵ ته‌وه‌ره‌کان سە به‌کام پووته‌ختن. پۆوتانه‌کان (20, 0, 0)، (0, 40, 0)، (0, 0, 5)

ا $20x+40y+5z=0$ ب $20x+40y+5z=1$

ج $4x+8y+z=5$ د $2x+y+8z=40$

8 کام له مانه ی خواروه په کسانه به بری $\frac{5(6-8i)}{2-i}$ ؟

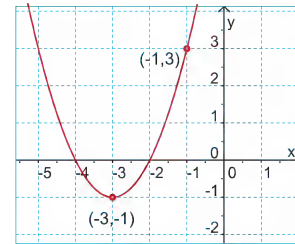
- ا $-20 + 10i$ (ب) $15 - 8i$
ج $15 - 40i$ (د) $20 - 10i$

9 کام له مانه هه لگه پړاوه ی ئه م پیزکړاوه یه $\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ؟

- ا $\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
ج $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$

10 کام له مانه ی خواروه هاوکښه ی نه خشه پروونکړاوه کیه.

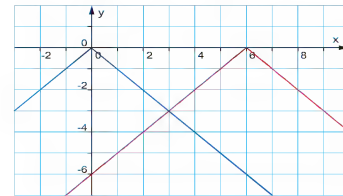
- ا $y = (x-3)^2 - 1$ (ب) $y = (x+3)^2 - 1$
ج $y = (x-1)^2 - 3$ (د) $y = (x+1)^2 - 3$



کورته وه لوم

11 پروونکړنه وه ی ئه م دوونه خشه یه $f(x) = -|x|$ و

$g(x) = f(x-h)$ بېشکنه. بهای h چنده؟



12 پیزکړاوه به کاربښنه بؤ جیگورکړکړدنی سیگوشه ی ABC

کاتیک $A(-1, 0)$ ، $B(4, 3)$ ، $C(2, -1)$ بښت.

ا $A'B'C'$ وښنه ی پراکښراوی ABC بښت. یه که

بؤلای راس و 4 یه که بؤ سهره وه. پووتانی

سهره کانی سیگوشه ی $A'B'C'$ بدوژه وه.

ب $A''B''C''$ وښنه ی وښنه دانه ی $A'B'C'$ بښت. به

دهوری ته وهری دووهم. پووتانی سهره کانی

سیگوشه ی $A''B''C''$ بدوژه وه.

13 سنوورده ری پیزکړاوه ی $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0.4 & 10 \end{bmatrix}$ بدوژه وه.

14 ئه م خسته یه ی خواروه کرښی وه ستانی ئو تومبيله کانه له

گه راجی فرؤکه خانه یه که. به پیی ماوه ی وه ستانه که یان.

لاری ئه و نه خشه هیلییه ی کرښی وه ستانی به دینار

دهنوینیت چنده؟ به پیی ماوه ی وه ستان به کاترمیر؟

ماوه	1	3	5	7
کرښی	3350	5050	6750	8450

15 کام بهای گوپړای c و له م سسته مه هیلییه ده کات

$$\begin{cases} 2y - x + 10 = 0 \\ 3x - 6y - c = 16 \end{cases} \text{ بی سنووربښت.}$$

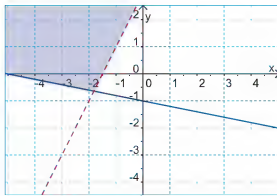
وه لومی راس ته وخو

16 سیستمی ئه و لاسه نگانه بنووسه که ئه م شیوانه ی

خواروه پروونکړدنه وه ییه که یان دهنوینیت.

(ب)

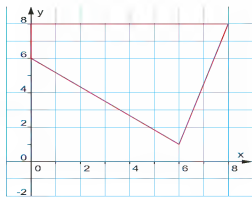
(ا)



17 لیکنه چوونی نیوان دوو سیستمه که له پرسپاری پېشودا

پروونیکه وه. وښنه ی پروونکړدنه وه یی خواروه ناوچه ی

گونجاو پړوگرامیکي هیلی پروونده کاته وه.



ا مهرجه کانی ئه م پرسپاره بنووسه.

ب گه ورته ترین بهای بؤ نه خشه ی به سوودی

$P = 3x - 4y$ له م پرسپاره دا بدوژه وه.

دریژه وه لوم

18 هاوکښه ی هیلی $2x - 3y = -15$ به کاربېښنه.

ا پروونیکه وه چوون ئه م هاوکښه یه دهنووسیت به

شیوه ی لاری - یه کتربرپن.

ب ئه و هوپه چپیه که و ده کات شیوه ی لاری - یه کتربرپن

باشترین شیوه بښت بؤ نووسینی ئه م جوړه هاوکښانه

پېش کښانی ئه و راس ته هیلییه دهنوینیت.

ج هه نگاوه کانی کښانی ئه و راس ته هیلییه ئه و

هاوکښه دهنوینیت. هه نگاوه به هه نگاوه بنووسه.

نەخشە توانییەکان و لوگاریتمییەکان

Exponential and Logarithmic Functions

بەشی چوارەم

وانەکان

1-4 نەخشە توانییەکان و گەشە
و پووکانەوه

لاپەرە تەکنۆلۆژیا دەرختنی
نەخشە پێچەوانە

2-4 نەخشە پێچەوانە

3-4 نەخشە لوگاریتمییەکان

تاقیکردنەوهی نیووی بەش

4-4 سیفەتەکانی لوگاریتم

5-4 لوگاریتمی سروشتی

6-4 ھاوکیشتە و لاسەنگە توانییەکان
و لوگاریتمییەکان.

7-4 نموونە توانییەکان و
لوگاریتمییەکان

لە کەوانە کە e بدۆزەوه

کەوانە دەرۆزە لە شاری سانت

لوئیس لە ئەمریکا بەناوبانگترین

ئادگارەکانی ئەمریکایە، ئەو

کەوانە شۆپەییەکی چەماوەی ھەیە

ھاوشۆپە برێگی ھاوتایە ئەو

جۆرە چەماوانە لەم بەشەدا

دەخوینیت.

ئايا تۆ ئامادەيت؟

زاراۋەكان ✓

ھەر زاراۋەيەك بەۋ پېئاسەي لەلای چەيدا ھاتوۋە بېستەۋە.

- | | | | |
|---|----------|---|--|
| 1 | نەگۆر | ا | ھېمايەكە بۆ نواندىنى ژمارەيەك بۆي ھەيە بەھا جياۋازەكان ۋەربگرېت |
| 2 | نەخشە | ب | كۆمەلە ژمارەيەك بەكارھاتوۋە لە ژماردن ۋ پېچەۋانەكەيان. |
| 3 | پەيوەندى | ج | پەيوەندىيەكە ھەر بەھايەك لە بەھايەكانى گۆراۋى ئازاد تەنھا بە يەك بەھاي گۆراۋى پەيوەست دەبەستېتەۋە. |
| 4 | گۆراۋ | د | رادەيەكە گۆراۋەكانى تېدا نېيە. |
| | | ه | كۆمەلەك جووتە رېكخراۋە. |

سېفەتەكانى ھېز ✓

ئەم برانەي خوارۋە بەسادەترين شېۋە بنووسە.

- | | | | | | | | |
|---|-----------------------|----|----------------------|----|-------------------|----|-------------------------------|
| 5 | $x^2(x^3)(x)$ | 6 | $3y^{-1}(5x^2y^2)$ | 7 | $\frac{a^8}{a^2}$ | 8 | $y^{15} \div y^{10}$ |
| 9 | $\frac{x^2y^5}{xy^6}$ | 10 | $(\frac{x}{3})^{-3}$ | 11 | $(3x)^2(4x^3)$ | 12 | $\frac{a^{-2}b^3}{a^4b^{-1}}$ |

سوۋدى سادە ✓

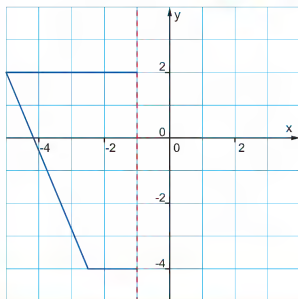
ياساسى سوۋدى سادە $I = Prt$ بەكاربېتە. كاتېك I بۆ سوۋد ھېما دەكرېت، ۋ P ھېماي گۆژمە بنەرەتېيە، بەلام r ھېماي « رېژەي سوۋدى سالانەيە » t ھېمايە بۆ ماۋە بەسال.

- | | |
|----|--|
| 13 | سوۋدى گۆژمەي 30 مليون دېنار بدۆزەۋە، بۆ دوو سال خرابېتە كار بەسوۋدى سالانەي 3%. |
| 14 | سوۋدى گۆژمەي 2 مليون دېنار بدۆزەۋە، بۆ دوو سال خرابېتە كار سوۋدى 90 000 دېنارى بەدەستھېناۋە. |
| 15 | كارۋان برە پارەيەكى بۆ ماۋەي سى سال بە سوۋدى سادەي 6% قەرزكرد بەھاي ئەۋ قەرزە چەندە؟ ئەگەر بزانت كارۋان ئەۋ برە پارەيەي لەسەري بوۋ داۋيەتەۋەكە 5310 مليون دېنار بوۋ. |

شىكاركردى ھاۋكىشە بەپېي گۆراۋىك ✓

بەھاي گۆراۋى x بە پېي گۆراۋەكانى تر ھەژمارېكە.

- | | | | | | | | |
|----|--------------|----|---------------|----|------------------------|----|----------------------------------|
| 16 | $3x - y = 4$ | 17 | $y = -7x + 3$ | 18 | $\frac{x}{2} = 3y - 4$ | 19 | $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ |
|----|--------------|----|---------------|----|------------------------|----|----------------------------------|



ھاۋجېۋون ✓

- | | |
|----|---|
| 20 | ۋېنەي بەرامبەر دروستېكە، بەبەكارھېئانى تەۋەرە سوۋرەكەي ھاۋجېۋون تەۋاۋېكە. |
|----|---|

شېۋەي زانستى ✓

بە شېۋەي زانستى بنووسە.

- | | | | | | |
|----|---------------|----|--------------|----|-------|
| 21 | 7 000 000 000 | 22 | 0.0000000093 | 23 | 16.75 |
|----|---------------|----|--------------|----|-------|

رېبەرى خويندن: تېروانين لەسەر بەشەكە

Vocabulary

زاراوەکان

Asymptote	دەرکەنار
Base	بنچینە
Common logarithm	لۆگاریتمی ئاسایی
Exponential equation	هاوکێشەى توانى
Inverse function	پێچەوانەى نەخشە
Logarithmic equation	هاوکێشەى لۆگاریتمى
Logarithmic function	نەخشەى لۆگاریتمى
Natural logarithm	لۆگاریتمى سروشتى

رۆشناييهك لەسەر زاراوەکان

- بۆ ئەوەى لەگەڵ ھەندێک لەم زاراوانەدا رابىيى كە لەم بەشەدا ھاتوو ەم ھەنگاوانە پەيرەويكە:
1. دەتوانیت بىر لە بنچینە بکەیتەو. وەك ئاوەلى توان، كام ژمارە بنچینەيە لە $10^3 = 1000$
 2. لۆگاریتمى دەيى (ئاسايى) بریتیيە لە توان لە ھیزی ژمارە 10. چۆن بەھای لۆگاریتمى ئاسايى ژمارە 1000 دەبينیت.
 3. لە کویدا. پيشبینى دۆزینەوہى نەزانراوى x لە ھاوکێشەيەكى توانيدا دەکەیت.
 4. دابەشکردن بریتیيە لە کردارى پێچەوانەى لیکدان. چۆن پيشبینى کاریگەرى نەخشەى پێچەوانە بۆ نەخشەى پیدراو دەکەیت.
 5. بنچینەى لۆگاریتمى سروشتى بریتیيە لە ژمارە e ، كام بەھای نەگۆرى تر بە پیت ھيما دەکړئ.
 6. Asymptote وشەيەكى یۆنانیە واتە بەيەك نەگەيشتن. چۆن پەيوەندى نیوان چەماوہيەك و ھيلى دەرکەنارەكەى دەبينیت؟

لە رابردوودا

خويندووتە

- بەکارھێنانى سيفەتەکانى ھيز بۆ نووسينى بریک بە سادەترین شیوہ.
- جيبەجیکردنى کردارە پێچەوانەکان.
- شیکارکردنى ئەو پرسيارانەى نەخشە ھيلىيەکان و دووجاكان و رادەدارەکان لە خو دەگرئ.

لەم بەشەدا

ئەمانە فيردەبیت

- نەخشە توانيیەکان.
- لۆگاریتمەکان و نەخشە پێچەوانەکان.
- شیکارکردنى ئەو پرسيارانەى نەخشە توانيیەکان و لۆگاریتمیيەکان لە خۆدەگرئ.

لە داھاتوودا

دەتوانیت کارامەبيەکانى ئەم بەشە بەکاربئنیت

- بۆ شیکارکردنى ئەو پرسيارانەى سوودى ئاویتە لە خۆدەگرن.
- لە بوارى زانستى وەك زیندەزانى و کۆمەلناسى، کاتيک پیدراوہکان کۆ دەکړئوہ و ریکدەخرين و شیدەکړئوہ.
- لە قۇناغى بەرزتردا، کە ئامار و بىرکارى کار وەردەگرئ.

بىركارى بە خوئندەو و نووسىن



ستراتىيەتى نويسىنەو: شىۋازى خۆت بەكاربەيئە

كاتىك بىرۈكەيەكى دژوار لە بىرۈكەكانى بىركارى دەخوئىت، دووبارە بىرۈكەكە بە شىۋازى خۆت بنووسەو. ئەمەش يارمەتت دەت بۆ تىگەيشتنى ئەو دەخوئىت بە شىۋەيەكى باشتر. لەوانە بەسوود ترىت بۆ روونكرندنەوى بىرۈكەكە باشتر واىە نمونەيەكى تايەت بە خۆت پىشكەش بىكەت بۆ روونكرندنەوى بىرۈكەكە.

پلەى رادەدار بەبەكارهينانى رادەى بەرزترين پلە ديارى دەكرىت. رادەدارى يەك گۆراو بەشۋەى گشتيەكەى نو سراو. كاتىك رادەكانى بەريزكردى سەربەرەوژىرى پلەكانى نو سرايىت. بەو شىۋەيش كاتىك رادەدارىك بە شىۋە گشتيەكەى نو سراو ئەوا پلەى رادەى يەكەم دەبىتە پلەى رادەدارەكە. ھاوگۆلكەى رادەى يەكەم دەبىت بە ھاوگۆلكەى سەرەكى رادەدارەكە.

رادەدارەكان

بنووسە برگەى پىشوو بنووسە بەبەكارهينانى رستەى كورت بۆ روونكرندنەوى بىرۈكەى گرنگ كە رادەدارەكانى تىدائىت.

دنيا بون باسى نمونەيەك بىكە، دوق و بىركارى بەيەكەو بەستىتەو.

1. پلەى رادەدار پلەى بەرزترين رادەيە
 2. شىۋەى گشتى: رادەكان بەريزىكى سەربەرەو ژىر بە پى پلەكانى نو سراو.
 3. لە شىۋەى گشتيدا. پلەى رادەى يەكەم برىتيە لە پلەى رادەدارەكە.
 4. ھاوگۆلكەى رادەى يەكەم برىتيە لە ھاوگۆلكەى سەرەكى.
- ھاوگۆلكەى رادەى يەكەم برىتيە لە ھاوگۆلكەى سەرەكى
- نمونە: شىۋەى گشتى $2x^4 - 5x^3 + 3x - 9x + 10$
- پلەى رادەدارەكە : 4
- ھاوگۆلكەى سەرەكى: 2

هەولبە

ئەم برگەيەى دىت بخوئەو و دووبارە بە شىۋازى خۆت بنووسەو. لە سەلمىنراوى رەگى نارىژەيدا ھاتو. كە رەگە نارىژەيەكانى ھاوگۆلكەكانى ژمارەى رىژى بن ئاوەلى يەكتى دەبن. بۆ نمونە ئەگەر بزائىت $1 + \sqrt{2}$ رەگىكە لە رەگەكانى ھاوگۆلكەى $x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$ دەوترىت $1 - \sqrt{2}$ ش رەگىكە لە رەگەكانى. بىرت بىت ژمارە راستيەكان دوو جوړن، ژمارە رىژەيەكان و ژمارە نارىژەيەكان دەتوانىت سەلمىنراوى رەگى رىژەيى و سەلمىنراوى رەگى نارىژەيى بەيەكەو بەكاربەيئىت بۆ دۆزىنەو. ھەموو رەگەكانى ھاوگۆلكەى $P(x) = 0$.

نەخشە توانیپەکان، و گەشە و پووکانهو (گەرانهو)

Exponential Functions, Growth and Decay

کۆ ئەمە بەکار دەهێنێت؟

ئەوانەى شتە دەگمەنەکان کۆدەگەنەو، دەتوانن نەخشەى توانى بەکاربێنن بۆ دارشتنى نموونەى ئەکە بەهەى ئەو شتانەى کۆدەگەنەو بێنویست. وەک ئامێرە دەگمەنەکانى مۆسیقا (نموونە 2).

ئامانجەکان

- برە توانیپەکان بۆ نواندنى بارەکانى گەشە و پووکانهو دەنوسیت. و بەهەى ئەم برانە هەژمار دەکات.

زاراوەکان

Vocabulary

نەخشەى توانى

Exponential function

بنچینە

Base

دەرکەنار

Asymptote

گەشەى توانى

Exponential growth

پووکانهوئەى توانى

Exponential decay

لەدەقى یاسای مۆر Moore کە لە پێشەسازى بژمێردا بەکار دێت هاتوو. ژمارەى ترانزیستەرەکان کە پیکهاتەکانى بژمێرێک لە خۆ دەگرێت هەموو سالیێک ئەوەندەى خۆى زیاد دەکات. ئەم خشتەى خوارەو ژمارەى ترانزیستەرەکان بە نزیکەى پوونەکاتەو کە پیکهاتەکانى بژمێرەن لە سەرەتای دروستبوونى ئەم پێشەسازىیەو.

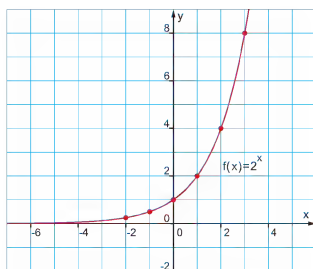
ژمارەى ترانزیستەرەکان لە پیکهاتەکاندا							
سال	1971	1970	1969	1968	1967	1966	1965
ژمارە	3840	1920	960	480	240	120	60

$$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$$

دەتوانرێت ئەو گەشەبوونە کە هەموو سالیێک دوو ئەوەندە دەبێت، بەبەکارهێنانى نەخشەى ئەوانەى گۆراویک لە خۆ بگرێت بنویست. ئەم نەخشەى پێیان دەوترێت **نەخشەى توانى**، نەخشەى بنەرەتى بۆ **نەخشە توانیپەکان Exponential functions** بریتىیە لە نەخشەى $f(x) = b^x$. کاتیێک **Base** b ژمارەى ئەکە نەگۆر و x گۆراویکی سەرەخۆ بێت.

بنچینە توان

$$f(x) = b^x \quad \text{و} \quad b > 0, b \neq 1$$



وێنەى بەرامبەر پوونکردنەوئەى نەخشەى توانى بنەرەتى دیاردەکات $f(x) = 2^x$ مەودای ئەم نەخشەى بریتىیە لە کۆمەڵەى ژمارە راستىە مۆجەبەکان $\{y/y > 0\}$.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

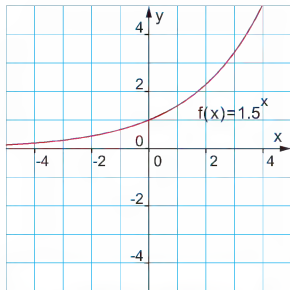
سەرەنجبە پوونکردنەوئەى نەخشەى بەرەبەرە نزیک دەبێتەو لە تەوهرى ئەکەم هەرچەندە بەهەى x کەمبکات، دیسان سەرەنجبە پوونکردنەوئەکەى بەر تەوهرى ئەکەم ناکەوێت و لە سەرەوئەى دەمێنێتەو بەهەى برى 2^x بە مۆجەب دەمێنێتەو بەهەى x هەرچەند بێت. تەوهرى ئەکەم بریتىیە لە دەرکەنارى ئاسۆیى بۆ پوونکردنەوئەى نەخشەى $f(x) = 2^x$ دەرکەنار **Asymptote** راستەهێڵیکە. هێلى پوونکردنەوئەى نەخشەى بەرەبەرە لێى نزیکە دەبێتەو هەرچەندە بەهەى x زۆر گەورەبێت یان زۆر بچووکیبێت.

هەرنەخشەى ئەکە $f(x) = ab^x$ ، کاتیێک $a > 0$ و $b > 1$ بریتىیە لە نەخشەى ئەکەى گەشەى توانى **Exponential growth** بەهەکەى زیاددەکات بەزیادبوونى بەهەى x بەلام کاتیێک $0 < b < 1$ ئەو نەخشەى $f(x) = ab^x$ بریتىیە لە نەخشەى پووکانهو **Exponential decay** بەهەیهەکەى بە زیادبوونى بەهەى x کەمەدەکات.

نمونه 1

وینە پروونکردنەوی نهخشە توانییه‌کان

دیاریبکه، ئایا ئەم نهخشەیه، نهخشەیه‌کی گەشە توانییه یان نهخشەیه‌کی توانی پووکانەوی توانییه پاشان وینە پروونکردنەوییه‌که‌ی بکێشه؟



$$f(x) = 1.5^x$$

هه‌نگاوی 1 به‌های بنچینه بدۆزهوه

$f(x) = 1.5^x$ بنچینه 1.5 گه‌ره‌تره له 1 نهخشه‌که بریتیه له نهخشه‌یه‌کی گەشە توانییه

هه‌نگاوی 2 به‌به‌کاره‌ینانی خسته‌که، وینە پروونکردنەوییه نهخشه‌که بکێشه.

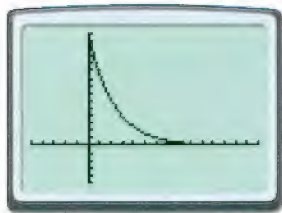
x	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	0.4	0.8	1	1.5	2.3	3.4	5.1

$$f(x) = 30(0.8)^x$$

هه‌نگاوی 1 به‌های بنچینه‌یی بدۆزهوه.

$f(x) = 30(0.8)^x$ بنچینه 0.8 بچوگ‌تره له 1 نهخشه‌که بریتیه له نهخشه‌یه‌کی که‌مبوونی توانی.

هه‌نگاوی 2 به‌به‌کاره‌ینانی بژمیره‌ی پروونکردنەوییه، وینە نهخشه‌که بکێشه.



1. دیاریبکه ئایا نهخشە $f(x) = 5(1.2)^x$ نهخشەیه‌کی توانی گەشە توانییه یان نهخشەیه‌کی پووکانەوی توانییه؟ وینە پروونکردنەوییه‌که‌ی بکێشه.



ده‌توانیت گەشه یان پووکانەوه به‌به‌کاره‌ینانی پێژە سەدی نه‌گۆڕ بۆ گەشه و پووکانەوه به‌به‌کاره‌ینانی ئەم پێسایه بنوینیت؟

$$A(t) = a(1 \pm r)^t$$

ژمارە‌ی ماوه‌کاتییه‌کان t (blue arrow)
 گۆژمە‌ی بنه‌ره‌تی a (green arrow)
 تیکرای گۆران r (red arrow)
 گۆژمە‌ی کۆتایی $A(t)$ (purple arrow)

بنچینه‌ی نهخشه‌که‌ی سه‌ره‌وه $1+r$ پێی ده‌وتریت هاوکۆله‌ی زیاده‌بون به‌هه‌مان شیوه به‌ بنچینه‌ی $1-r$ ده‌وتریت هاوکۆله‌ی که‌مبوون.

گەشه‌و پووکانەوه

له‌ خۆیندکاره‌وه بۆ خۆیندکار

کاتی‌ک به‌های نهخشه‌که به‌ تیکرایه‌کی نه‌گۆڕ که‌مه‌کات. وه‌ک 12% مانای ئەوه‌یه لیکدانی 12% - 100% واته له 88% به‌ له شیوه‌ی ده‌یی لیکدانی 1 - 0.12 واته 0.88.

کاتی‌ک به‌های نهخشه‌که به‌ تیکرایه‌کی نه‌گۆڕ زیاده‌کات. وه‌ک 7% مانای ئەوه‌یه لیکدانی 7% + 100% واته له 107% به‌. له شیوه‌ی ده‌یی ئەمه‌ش ده‌گۆڕین به‌ لیکدان له 1 + 0.07 واته 1.07.

نمونە 2

جىيەجىكردىنى ئابوروى

گۆڭەند لە ساڵى 2000 دا گىتارىكى دەگمەنى كرى مېژوودەكى دەگەراپەووە بۆ ساڵى 1959، 12 ملیون دینارى پىدا. شارەزایان وایان خەملاندن كە نرخەكەى سالانە بەرپژەى % 14 زیاد دەكات. بەبەكارهێنانى خستەى خوارەووە ئەو سالە بدۆزەووە كە تىپیدا نرخى گىتارەكە دەبیته 60 ملیون دینار. هەنگاوى 1 نەخشەیهك بنووسە گۆرانی نرخى گىتارەكە بنوینیت.

$$f(t) = a(1+r)^t \quad \text{نەخشەى گەشەى توانییه}$$

$$= 12(1+0.14)^t \quad \text{12 لەجیاتى } a \text{ و } 0.14 \text{ لەجیاتى } r \text{ دابنى.}$$

$$= 12(1.14)^t$$

هەنگاوى 2 وینەى پوونکردنەووبى نەخشەكە بكێشە.

كاتێك وینەى پوونکردنەووبى نەخشەیهكى توانى بەبەكارهێنانى

پوونکردنەووبى دەكیشیت، پێویستە پەنجەرەكە

بگونجینیت تا ئەو خالەى بەكاریدەهێنیت دەریكەوێت

(شاشەكە و الېكریت وینەكە بەباشى دەریكەوێت.)

هەنگاوى 3 پوونکردنەووەكە بەكارپێنە بۆ خەملاندنى ئەو سالەى نرخى گىتارەكە دەبیته 60 ملیون دینار.

فرمانى TRACE بەكارپێنە بۆ دۆزینەووبى بەهایى t كاتێك $f(t) = 60$.

نرخى نەخشەكە دەگاتە 60 كاتێك $t = 12.29$ نرخى گىتارەكە دەگاتە 60 ملیون دینار پاش 12.29 سال لە كرىنى واتە لە ساڵى 2012.

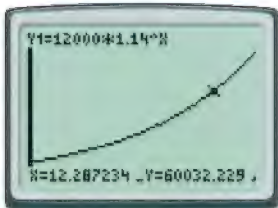
یارمەتى

لە بژمێرى

پوونکردنەووبىدا لەجیاتى

x هێمای t بەكارپێنە.

$$y_1 = 12\,000 * 1.14^x$$



2. ژمارەى نەهەنگە كورپوركەنى ئوسترالىا 350 نەهەنگ بوو لە ساڵى 1981 دا. سالانە بە پێژەى % 5 ژمارەیان زیاد دەكات. نەخشەیهكى توانى بنووسە ئەم زیادبوونە بنوینیت. پاشان خستەكە بەكارپێهێنە بۆ دیاریکردنى ئەو سالەى ژمارەى نەهەنگەكان دەگاتە 550 نەهەنگ.



جىيەجىكردىنى لەسەر پووكانەووە

نمونە 3

نرخى بارهەلگريكى نوێ 28 ملیون دینارە. سالانە نرخەكەى بە پێژەى % 6 دادەبەزیت نەخشەیهكى توانى بنووسە بۆ ئەم دابەزینە. پاشان خستەكە بەكارپێهێنە بۆ دیاریکردنى ئەو سالەى نرخى بارهەلگريكە دەگاتە 20 ملیون دینار.

هەنگاوى 1 نەخشەیهك بنووسە گۆرانی نرخى بارهەلگريكە بنوینیت.

$$f(t) = a(1-r)^t \quad \text{نەخشەى كەمبوونى توانى}$$

$$= 28(1-0.06)^t \quad \text{28 لەجیاتى } a \text{ و } 0.06 \text{ لەجیاتى } r \text{ دابنى.}$$

$$= 28(0.94)^t$$

هەنگاوى 2 وینەى پوونکردنەووبى نەخشەكە بكێشە.

كاتێك وینەى پوونکردنەووبى نەخشە توانییهكە

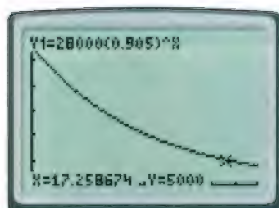
بەبەكارهێنانى بژمێرى پوونکردنەووبى دەكیشیت.

پێویستە خەسلەتەكانى پەنجەرەكە دەستكارى بكەیت بۆ

ئەوێ ئەو خالەى بەكاریدەهێنیت دەریكەوێت. فرمانى

بەكارپێنە بۆ دۆزینەووبى بەهایى t كاتێك

$$f(t) = 5$$



ههنگاوی 3 پروونکردنه و هیه که به کاربینه بۆ خهملاندنی بهای ئه و سالهی نرخه باره لگره که دهگاته 5 ملیون دینار
بهای نهخشه که به نزیکی ده بیته 5 کاتیک $t = 17.3$. نرخه باره لگره که دهگاته 5 ملیون دینار پاش 17.3 سال له کرینی.

3. ماتۆر سکیلیک نرخه که یه ملیون دینار. سالانه به پیره 15% نرخه که دادبه زیت نهخشه که توانی بۆ نواندنی ئه م دابه زینه بنووسه پاشان خسته که به کاربینه بۆ دیاریکردنی ئه و سالهی نرخه که دهگاته نیوهی نرخه بنه پرتیه که ی.



بیربکه وه و تاوتویبکه

1. بژمیر به کاربینه بۆ بهراورد کردن له نیوان دوو بهای 1.01^{500} و 0.99^{500} ئه وهی پیی گهیشتی باسبکه.
2. له باره جیاوازهکانی نیوان پروونکردنه وهی دوو نهخشه $f(x) = 1.1^x$ و $g(x) = 0.9^x$ و توویژبکه کاتیک $x = 0$ له ههریه که یان چی پروودهدات.
3. باسی نهخشه $f(t) = a(1-r)^t$ بکه، کاتیک $r > 0$ باسی نهخشه که بکه کاتیک $r > 0$.
4. پیکه به ئه م خسته یه خواره وه دروست بکه و تهواویبکه. بهراوردی نیوان گهشه توانی و پووکانه وهی توانی بکه.



پووکانه وه	گهشه	$f(x) = ab^x$ کاتیک $a > 0$
		بهای b
		شیوهی گشتی پروونکردنه وه که
		نهخشه که له زیادهوونی بهای x چی به سهردیت
		نهخشه که به کهمبوونی بهای x چی به سهردیت

1-4 راهینانهکان

راهینانی ئاراسته کراو

1. زاره وکان ئه گهر بنجینهی نهخشه که توانی ژماره یه که بیته له نیوان 0 و 1 دا ئه و نهخشه که نهخشه یه که؟ (گهشه توانی یان پووکانه وهی توانیه)

دیاریبکه، ئایا نهخشه که نهخشه یه که گهشه توانیه یان پووکانه وهی توانیه.

4 $f(x) = 0.4\left(\frac{3}{4}\right)^x$

3 $f(x) = 0.5(1.2^x)$

2 $f(x) = 32(0.5^x)$

1 پروانه غورونه



5. زنده زانی دهفریکی چاندنی به کتیرا 150 به کتیرای تیدایه. له و جۆرانهی که دوو ئه وهندهی لیدیت پاش ههر کاتژمیریک.

2 پروانه غورونه

ا. نهخشه $f(t)$ بنووسه زۆربوونی ژماره ی به کتیرا کان دهوینی.

ب. وینهی پروونکردنه وهی نهخشه که بکیشه.

ج. خسته که به کاربینه بۆ خهملاندنی ژماره ی به کتیرا کان پاش 10 کاتژمیر.

6 **فيزيا** له بهرزی 25 m تویکی نژی نهرم بۆ سر زویه کی رهق بهر درایه وه چهند جاريك بهرو سره وه ههله زیه وه. هه جاريك دهگه يشته $\frac{2}{5}$ ی بهرزی جاري پيشوو.

- ا) نه خشه ی $f(n)$ بنوسه ئه و بهرزی به بنوینت که تۆپه که له هه جاريكدا دهگات.
- ب) وینه ی پروونکردنه وه یی ئه و نه خشه یه بکیشه.
- ج) پاش چهند جار بهرزی به که ی له 1 m که متر ده بیت؟

راهبانی و شیکارکردنی پرسیارهکان

دیاریکه ئایا نه خشه که نه خشه یه کی گه شه ی توانیه یان پووکانه وه ی توانیه ی پاشان وینه پروونکردنه وه یه که ی بکیشه.

7 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 8 $f(x) = \frac{1}{3}(1.3)^x$ 9 $f(x) = 10(2.7)^x$

10 **شه مهنده فهرهکان** شتومه که گواستراوهکان به هو ی شه مهنده فهره وه له ئه مریکا گه يشته 580 ملیار تن/میل له سالی 1960 دا، ئه م هینده سالانه به ریشه ی 2.32% زیاد دهکات له و ساله وه.

- ا) نه خشه یه ک بنوسه زیاد بوونی سالانه ی شتومه که گواستراوهکان به هو ی شه مهنده فهرهکان وه بنوینت. (1960 = سالی سفر).
- ب) وینه ی پروونکردنه وه یی نه خشه که بکیشه.
- ج) له چ سالی که شتومه که گواستراوهکان له ههزار ملیار تن/میل زیاتر ده بیت؟

11 **بزی شکی** هیندی ئه نسو لینی به کارهاتوو بۆ ریکه ستنی ریشه ی شه که له خویندا به تکپرای 5% به نزیکه یی له هه جاريكدا که م دهکات ئه و هینده ی مرو ف پیوستی پییه تی به نزیکه یی دهگاته 10 یه که.

- ا) نه خشه ی $f(t)$ بنوسه هیندی ئه و ئه نسو لینه به پی کات بنوینت. که له خویندا ماوه ته وه پاش ئه وه ی نه خشه که 10 یه که ی وهرگرت.
- ب) وینه ی پروونکردنه وه یی نه خشه که بکیشه.
- ج) هیندی ئه نسو لینی ماوه له خویندا پاش 10 خوله که بخه ملینه.
- د) پاش چهند خوله که هیندی ئه نسو لین له له شدا بۆ نیوه داده به ریت.

دیاریکه ئه م نه خشه نه توانین یان نا.

12 $f(x) = 2(x)^{10}$ 13 $f(x) = 0^x$ 14 $f(x) = 1(0.5)^x$

15 له سالی 1626 کۆمه لیک له کۆچه رانی ئه لمانی دوورگی مانه اتنیان کړی، که ئه مپرو به شیکه له شاری نیویورک. له بری که لویه لیک نر خه که ی 24 دۆلاری ئه و کاته بوو. وادابنی ئه م پاریه به سودیکی ئاویتیه ی سالانه ریشه که ی 3.5% بیت دانرا بری ئه و پاریه له سالی 2008 دا ده بیته چهند؟

16 **تهکنه لوژیا** هیندی زانیاریه هه لگیراوه ئه لیکترۆنیهکان له سالی 2002 دا گه يشته نزیکه ی 5 تهکزا بایت یان 5×10^{18} بایت. توژینه وه رهکان ئه و هینده یان به دوو ئه وهنده ی هه لگیراوهکانی سالی 1999 خه ملاند، وادابنی گه شه ی هیندی زانیاریهکان به و شیوازه به ردهوام بوو. نه خشه یه ک بنوسه گه شه ی هیندی زانیاریه هه لگیراوه ئه لیکترۆنیهکان بنوینت له سهره تای سالی 1999.

17 **بژمیر** نرخی بژمیرهکان سالانه به ریشه ی 30% که م دهکات. کاوه بژمیریکی به یه ک ملیون دینار کړی. نه خشه یه ک بنوسه نرخی بژمیره که به پی کات به سالانه بنوینت، وه له دوا ییدا خشه یه ک دروستبکه بۆ دیارکردنی له چ سالی که نرخی ئه م بژمیره ده بیته نیوه ی نرخی به رپه تییه که ی.

راهبانی نازاد	
بوشیکارکردنی	سهیری
راهبانهکان	نمونه بکه
9-7	1
10	2
11	3

ئەم خىشتەيە بۇ ھەر نەخىشەيەك تەۋاۋ بىكە. بەھايەكان نىزىكىكەۋە لە نىزىكتىن بەش لە سەد.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x) = 2 \cdot 2^x$									
$g(x) = 0.4^x$									

18

19

20

ئەگەر $A = P(1.015)^n$ پىسايەك بىت بۇ بىرى ئەۋ قەرزى كە خاۋەن كارتىكى متمانەۋە ۋەرىگىت. كاتىك A بىرى ئەۋ پارەيەكە خاۋەن كارتى متمانە پىي قەرزدارە پاش n مانگ. p ھىماي بىرى پارەيە دراۋ بىت؟

ا) ۋىنەي پوۋنكردنەۋەيى نەخىشەكە بىكىشە كاتىك بىرى پارەيە بنەپەتى يەك مىۋن دىنارىت.

ب) پاش سالىك بىرى پارەكە دەبىتە چەند؟

ج) كەي بىر پارەكە دەگاتە 1 300 000 دىنار؟

21 **فروشرۋەكان** فروشرۋەكانى مانگانەي يەككە لە كىلگە پەلەۋەرىيەكان لە مانگى كانوۋنى دوۋەمدا گەيشتە ئەۋ پەرى 12 000 مرىشك. بەلام فروشرۋەكانى لە مانگەكانى دواتردا مانگانە بە پىژەي 20% دابەزى.

ا) خاۋەن كىلگەكە دۋاى شەش مانگ لە دۋاى مانگى كانوۋنى دوۋەمەۋە چەند مرىشكى فروشتۋە.

ب) پاش چەند مانگ فروشرۋەكانى ئەم كىلگەيە لە 1000 مرىشك كەمتر بوو؟

22 **بانكەكان** بانكەكان ياسايەك بۇ ھەژماركردنى نرخی گۆژمەي سىپىردراۋ بەكاردەھىنن ياساكە برىتییە لە $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ كاتىك A گۆژمەي ئىستا و p گۆژمەي بنەپەتى سىپىردراۋ و r ھىماي تىكپاى سوۋدى سالانە و t ھىماي ماۋەيە بە سال و n ھىماي ژمارەي ماۋەكانى ئەۋ سالەيەكە تىپدا پارەكەي پاشكەۋت كىردۋە. واتە ھەژمارى سوۋد و زىادكردنى بۇ گۆژمەي سىپىردراۋ بىت. خەسرە 5 مىۋن دىنارى بە سوۋدى سالانەي 5% سپارد بۇ ئەۋەي لە ھەرۋەزىكدا (4 جار لە سالىكدا) پاشكەۋتەكەي ھەژماربىرگىت.

ا) بىر پارەكە پاش 5 سال دەبىتە چەندە؟

ب) كەي گۆژمەي سىپىردراۋ لە 10 مىۋن دىنار تىپەپ دەكات؟

ج) **چى دەبىت ئەگەر** خەسرە پاش 5 سال چەند قازانچ دەكات، ئەگەر پاشكەۋتەكە مانگانە بىرگىت لە جىاتى ئەۋەي ۋەرزى بىرگىت.

23 **بىرى رەخنەگر** پوۋتانى خالى ھاۋەشى پوۋنكردنەۋەيى ئەم دوۋنەخىشەيە چىيە $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ و $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ ؟

ئەۋ مەۋدایەي كە بەرامبەر بواری $[0, 10]$ لە ھەرەكە لەم نەخشانەي دىن بدۆزەۋە.

$$f(x) = \frac{3}{4}(2)^x \quad 26$$

$$f(x) = 100(0.9)^x \quad 25$$

$$f(x) = 3^x - 2^x \quad 24$$

27 **زەۋىناسى** رادون - 222 ($Radon - 222$) گازىكە لە خۇل و بەردەۋە دەردەچىت. لە ۋانەيە ئەم

گازە لە تەلارەكاندا كۆبىيىتەۋە و مەترسى دروست

بكات لەسەر ئەۋ كەسانەي ھەلپدەمژن. رادون

- 222 دەگەرپىتەۋە دەبىتە پۇلۇنىۋم ($Polonium$)

يان قورقوشم.

ا) پىژەي سەدى پۇژانەي گەپانەۋەي رادون

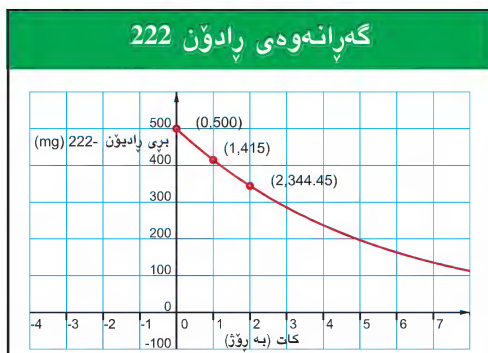
- 222 بدۆزەۋە.

ب) نەخىشەيەك بنوۋسە ھىندى رادون - 222

ماۋە بنوئىت پاش t پۇژ لە ھىندىكى

بنەپەتى بىرەكەي 500mg بىت.

ج) پاش 14 پۇژ ھىندەكە چەندى لپدەمىنپىتەۋە ؟



28 خەملاڭدەنەكان ژمارەى دانىشتوانى زەوى لە سالى 2000 دابە 6.1 مىليار كەس خەملاڭدرا. ھەر ھەا پىژەى زىادبوانى سالانە بە 1.4% خەملاڭدرا، نەخشەىەك بنووسە گەشەى ژمارەى دانىشتوانى زەوى بەپىى سالەكان پاش 2000 (2000 = سالى 0) بنوڭنڭ، ۋەبەكاربەڭنە بۆ خەملاڭدنى ژمارەى دانىشتوانى زەوى سالى 2005 چەندبۆ.

29 بىركردنەۋەى رەخنەگرانە كام لەم دووبراڭە x^3 يان 3^x خىراتر زىاد دەكات بەزىادبوانى بە ھەاى x ؟ ئەمە پوونىكەۋە.

30 بنووسە باسى بارىك بكە كە دەتوانىت بنوڭنڭ بەبەكاربەڭنەى نەخشەىەكى تۋانى. نەخشەىەك بنووسە ئەۋەى دەنوڭنڭ بۆ ھەر بەھايەك تىيدا پوونكرابىتەۋە.

نامادەگردن بۆ تاقىگردنەۋە

31 كام لەم نەخشەىەى دڭن نەخشەى پوونكانەۋە تۋانىيە؟

$f(x) = 0.5(2)^x$ (ج) $f(x) = 0.9(1.001)^x$ (ا)

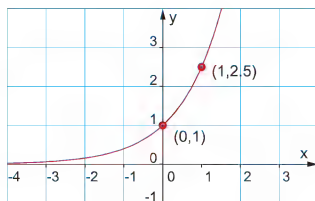
$f(x) = \left(\frac{1}{0.5}\right)^x$ (د) $f(x) = 1.5\left(\frac{10}{11}\right)^x$ (ب)

32 كام لەمانەى خوارەۋە بەھايى b دەنوڭنڭ. كاتىك نەخشەى $f(x) = ab^x$ نەخشەىەكى پوونكانەۋەى تۋانى بىت؟



33 كورتە ۋەلام بەھايەكانى a ۋە b چەندن لە نەخشەى $f(x) = ab^x$ كە ۋىنەى پوونكردنەۋەى بەرامبەر نوڭنراۋە.

34



0.6%

$f(x) = 89\ 443(1.06)^x$ (ج) $f(x) = 89\ 443(1.6)^x$ (ا)
 $f(x) = 89\ 443(1.0006)^x$ (د) $f(x) = 89\ 443(1.006)^x$ (ب)

بەرەنگارى و فراوانگردن

35 بىرى رەخنەگر لە بىرت بىت كە نەخشەى زۆر رادەدارەكانت بە پىى پلەكانىيان پۆلڭن كىردۋە بۆچى باس لە پلەى نەخشەى تۋانى ناكەيت؟ خشتەىەك بۆ شىكارى ھەر لاسەنگەىەك بەكاربەڭنە، ۋەلامەكەت نىزىكەۋە:

$5 < 1.5^x < 6$ (38) $0.97^x < 0.5$ (37) $1.15^x \geq 3$ (36)

39 بەراورد لە نۆۋان پوونكردنەۋەى ھەردوۋ نەخشەى $y = x^2$ ۋە $y = 2^x$ بكە. كاتىك $-10 < x < 10$ ژمارەى خالەكانى يەكتىرېڭن چەندە؟ پۆتۋانى ئەۋ خالانە بدۆزەۋە.

40 زىندەزانى لىكۆلەرەۋان ژمارەىەك مېشۋولەيان لە يەك ئەكردا، لە ناۋچەىەكى سارد دۆزىەۋە. دۋاى تۋانەۋەى سەھۆلەكە ژمارەيان 10^{d+2} بۆ. كاتىك d ژمارەى رۆژەكان بىت پاش تۋانەۋەى سەھۆلەكە. ژمارەى مېشۋولەكان لە ئەكرىكدا دۋاى تۋانەۋەى سەھۆلەكە چەندە؟ كاتى خايەنراۋ چەندە پاش تۋانەۋەى سەھۆلەكە ھەتا ژمارەى مېشۋولەكان لە ھەر ئەكرىكدا دوۋ ئەۋەندەى لىبىت؟ (ئەكرىەكەىەكى پووبەرە و يەكسانەبە $4\ 047\text{m}^2$).

41 لەنەخشەى $f(x) = b^x$ بۆچى بۋارى بەھاگونجاۋەكانى بنچىنە تەنھا ماۋەى $\{b/b > 0; b \neq 1\}$ دەبىت.



پیداچونەوہی لولپچی

بەبەکارهێنانی بژمیری پوونکردنەوہیی. وێنە پوونکردنەوہیی نەخشەکە بکێشە. بوار و مەودا و ئەو جیگۆرکییە پێگە بە کێشانی وێنە پوونکردنەوہییەکە دەدات بەھۆی پوونکردنەوہیی نەخشە بنەرەتییەکانەوہ. (پۆلەکانی پیشوو)

$$f(x) = x - 4 \quad 45$$

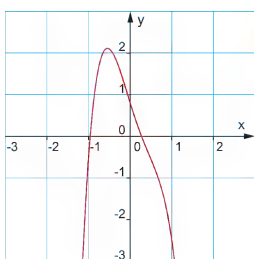
$$f(x) = 2x^3 \quad 44$$

$$f(x) = -x^2 + 1 \quad 43$$

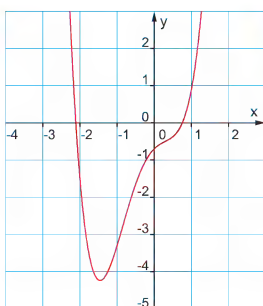
$$f(x) = \sqrt{x - 3} \quad 42$$

46 بۆ خوشی هەقال و شیرینی خوشکی سیدی یارییان کړی هەقال 3 یاری نوو و دوو یاری کۆنی به 235 000 دینار کړی. به لام شیرین یارییهکی نوو و 4 یاری کۆنی به 195 000 دینار کړی، نرخه هریهکه له یارییه نوویهکان و یارییه کۆنهکان بدۆزهوه (پۆلەکانی پیشوو).

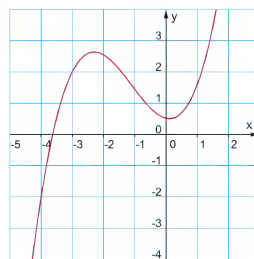
له پرسیارهکانی 47 - 49 هەریهکه له مانە خوارەوه وێنە پوونکردنەوہیی نەخشەیهکی ږاډەداره، دیارییهکه ئایا پلهی ئەم نەخشانه تاکن یان جووتن. هاوکۆلکهی سەرەکیان موجهبه یان سالب (پۆلەکانی پیشوو).



49



48



47

دۆزینەوێ پێچهوانەى نەخشەکان

Explore Inverses of Functions



دەتوانیت بژمیری پوونکردنەوێی بۆ دۆزینەوێ پێچهوانەى نەخشەکان و پەيوەندییەکی بە نەخشەى هێلى $f(x)=x$ بەکاربهێنیت.

چالاکى

لەمەودوا وێنەى پوونکردنەوێی نەخشەى $f(x)=2^x$ و پوونکردنەوێی پێچهوانەى نەخشەى دەکێشین.

1 وێنەى پوونکردنەوێی نەخشەى $f(x)=2^x$ و پاستەهێلى $y=x$ بکێشه، بەبەکارهێنانى بژمیری پوونکردنەوێی و دیاریکردنى پەنجەرەى دەبى بۆ بەجێهێنانى ئەم دوو نەخشە تۆماربکە و پاشان دوگمەى **ZOOM** دابگرە **4: ZDecimal** هەلبژیرە.

2 فرمانى **DrawInv** بەکاربهێنە بۆ بەدەستهێنانى وێنەى

پوونکردنەوێی پێچهوانەى پەيوەندییەکە. ئەم کارە

جێبهێڵدەکرێت بە داگرتنى دوگمەى **2nd** و **PRGM**

پاشان **8:DrawInv** هەلبژیرە. بۆ هەلبژاردنى **Y1**

دوگمەى **VARS** دابگرە و بەشیوی ئاسۆیى بيجوولێنە

هەتا **1:Function Y-VARS** هەلبژیرە پاشان **1:Y1**

لە کۆتایدا دوگمەى **ENTER** دابگرە.

لەشاشەکە وێنەى پوونکردنەوێی نەخشەى $f(x)=2^x$ و پێچهوانەى $y=x$ پاستەهێلى $y=x$ دەرەکەوێت. سەرئەنجام پێچهوانەى پەيوەندییەکە، نەخشەى $\{x/x>0\}$ و مەوداکەى R دەبێت.

هەولبەدە

وێنەى پوونکردنەوێی خستەى $f(x)=x^2$ و پوونکردنەوێی $f(x)=x$ بکێشه.

1 بەراوردبکە لە نۆوان بواری نەخشەى $f(x)=x^2$ و مەوداکەى لە لایەک، بواری پێچهوانەى پەيوەندییەکە و مەوداکەى لە لایەکى تر، ئایا پێچهوانەى پەيوەندى بۆ نەخشەى $f(x)=x^2$ نەخشەیه؟

وێنەى پوونکردنەوێی نەخشەى $f(x)=x^3$ و نەخشەى $f(x)=x$ بکێشه.

2 بەراورد بکە لەنۆوان بواری نەخشەى $f(x)=x^3$ و مەوداکەى لە لایەک و بواری پێچهوانەى پەيوەندییەکەى و مەوداکەى لە لایەکى تر ئایا پێچهوانەى پەيوەندى بۆ نەخشەى $f(x)=x^3$ نەخشەیه؟ بەلگە بۆ وەلامەکت بەهێنەو.

3 **دەستەواژەیهک بنووسە** دەستەواژەیهک دەربارەى پەيوەندى نۆوان بواری نەخشە و مەوداکەى لە لایەک و بواری پێچهوانەى پەيوەندى و مەوداکەى لە لایەکى تر بنووسە.

4 **دەستەواژەیهک بنووسە** دەستەواژەیهک دەربارەى پەيوەندى نۆوان پوونکردنەوێ نەخشە و پوونکردنەوێ پێچهوانەى نەخشەکە بنووسە.



پیچه وانهی نه خشه Inverse function

2-4

ئامانجه کان

- په یوه نډییه کی پیچه وانهی په یوه نډییه ک به پوونکر دنه وهی دهنوینیت و جیای ده کاته وه.

- دۆزینه وهی نه خشه یه ک بۆ پیچه وانهی نه خشه.

زاراوه کان Vocabulary

- پیچه وانهی په یوه نډی
Inverse relation
- پیچه وانهی نه خشه
Inverse function

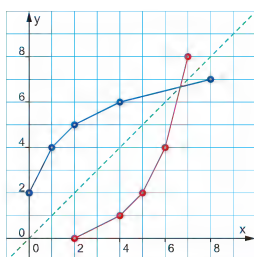
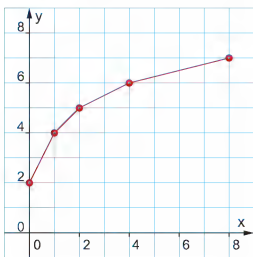
کی ئه مه به کار دهینیت؟

ده توانریت پیچه وانهی نه خشه بۆ دۆزینه وهی
نرخ شتومەك پېش یه کلاکردنه وهی
به کار بهینریت (نمونه ی 5)

له پۆله بنه پرتیه کان فیرویت، لیدهرکردن کرداریکی پیچه وانهی کۆکردنه وهی واته جیبه جیکردنی لیدهرکردن ئه نجامه کان جیبه جیکردنی کۆکردنه وه لاده بات. بۆ نمونه: دژ کۆکردنه وهی ژماره 3 بریتییه له 3- و دژ لیکدانی 5 بریتییه له $\frac{1}{5}$.
ده توانیت کرداری پیچه وانیه له سهر په یوه نډییه کان و نه خشه کان جیبه جیکه یه. بۆ ده سته وتنی وینیه پوونکر دنه وهی بۆ پیچه وانهی په یوه نډی **Inverse relation**
ههر په یوه نډییه ک، وینیه پوونکر دنه وهی په یوه نډییه ک بکیشه به وینیه دانه وهی به ده وری ته وهره ی $y=x$ ، ئه مهش هاوتای گوړینی شوینه کان له نیوان پۆتانی x ، y له جوته ریکخراوی ههر خالیگ له پوونکر دنه وهی په یوه نډییه ک ده.

وینیه پوونکر دنه وهی په یوه نډییه پیچه وانیه ک

x	0	1	2	4	8
y	2	4	5	6	7



په یوه نډی ئه مه نه خشه یه بنوینه و خاله کان به یه کتر بگه یه نه. پاشان پیچه وانهی په یوه نډییه ک به بنوینه و بوار و مه وادی ههر یه ک له دوو په یوه نډییه ک دیار یه ک.

خسته ک به خال بنوینه، به هیلیکی گونجاو به یه کیان بگه یه نه ئالوگور له نیوان دوو ته وهره ی x و y له جوته ریکخراوی ههر خالیگ ده، له پوونکر دنه وهی په یوه نډییه ک دابه.

x	2	4	5	6	7
y	0	1	2	4	8

وینیه ههر خالیگ بکیشه به وینیه دانه وهی به ده وری راسته هیلی $y=x$ به هیلیکی گونجاو خاله ده سته وتووه کان به یه ک بگه یه نه.

بواری نه خشه ک: $\{x/0 \leq x \leq 8\}$

مه وادی نه خشه ک: $\{y/2 \leq y \leq 7\}$

بواری پیچه وانهی نه خشه ک: $\{x/2 \leq x \leq 7\}$

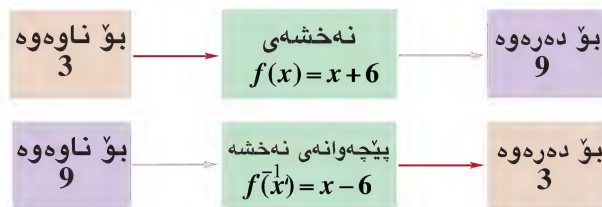
مه وادی پیچه وانهی نه خشه ک: $\{y/0 \leq y \leq 8\}$

x	1	3	4	5	6
y	0	1	2	3	5

نه خشه ک به بنوینه و خاله کان بگه یه نه، پاشان پیچه وانهی په یوه نډییه ک به بنوینه بوارو مه وادی ههر یه ک له دوو په یوه نډییه ک دیار یه ک.



كاتېك پەيوەندىيەكە دەپىت بە نەخشە، پېچەوانەكە پەيوەندىيەكە بە $f^{-1}(x)$ ھىما دەكرىت ئەمەش ناكاتە ھەلگەپراۋە $f(x)$. ئەو دوو نەخشەيەى يەكترى ھەلدەۋەشېنن پېيان دەوترىت پېچەوانەى نەخشە **Inverse functions** و ھەرىكەيان پېچەوانەى نەخشەكەى تريان دەپىت.



بۇ دۆزىنەۋەى پېچەوانەى نەخشەكە، كىدارە پېچەوانەكان بەكاربەيئە. ھەرچەندە نەخشەى $f(x)$ ژمارە 6 دەخاتە سەر x ئەۋا پېچەوانەى نەخشەكە $f^{-1}(x)$ ، ژمارە 6 لە x دەرەكات

نمونه 2

نووسىنەۋەى پېچەوانەى نەخشە بەبەكاربەيئانى كىدارە پېچەوانەكان

كىدارە پېچەوانەكان بۇ دۆزىنەۋەى پېچەوانەى نەخشەكان بەكاربەيئە بۇ نەخشەى $f(x) = 2x$

لە نەخشەى $f(x)$ ژمارەى x لېكدانى 2 دەكرىت. $f(x) = 2x$

لە پېچەوانەى نەخشەى $f^{-1}(x)$ ژمارە x دابەشى 2 دەكرىت. $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

پاسادانى بكة. ژمارە 7 ۋەك ژمارەى تېكرىن بەكاربەيئە.

$$f(x) = 2x$$

7 لە جياتى x لە پېچەوانەى نەخشەكەدا دابنى. $f(7) = 2(7) = 14$

ژمارەى دەرچوۋە جياتى x لە پېچەوانەى نەخشەكەدا دابنى.

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$$

$$f^{-1}(14) = \frac{14}{2} = 7$$

پېچەوانەى نەخشە $f^{-1}(x)$ كاريگەرى نەخشەى $f(x)$ لادەبات.

2. كىدارە پېچەوانەكان بۇ دۆزىنەۋەى پېچەوانەى نەخشەى ھەر نەخشەيەك بەكاربەيئە.



$$f(x) = \frac{x}{3} \quad \boxed{\text{أ}}$$

$$f(x) = x + \frac{2}{3} \quad \boxed{\text{ب}}$$

نووسىنەۋەى پېچەوانەى نەخشە بۇ نەخشەيەكى فرە ھەنگاۋ

نمونه 3

كىدارە پېچەوانەكان بۇ دۆزىنەۋەى پېچەوانەى نەخشەى $f(x) = \frac{x}{4} - 5$ بەكاربەيئە

نەخشەى $f(x)$ ژمارەى x دابەشى 4 دەكات، لە پاشاندا 5 لە $f(x) = \frac{x}{4} - 5$

ئەنجامەكە دەرەكات. $f^{-1}(x) = 4(x + 5)$

بۇ لابرەنى 5 - پېۋىستە 5+ بخرىتە سەر x پاشاندا 4 ى بدە بۇ

لابرىنى كاريگەرى دابەش 4. پاسادان بكة

$$f(40) = \frac{40}{4} - 5 = 10 - 5 = 5 \quad f^{-1}(5) = 4(5 + 5) = 4(10) = 40 \quad \checkmark$$

3. بۇ دۆزىنەۋەى پېچەوانەى نەخشەى $f(x) = 5x - 7$ كىدارە پېچەوانەكان بەكاربەيئە.

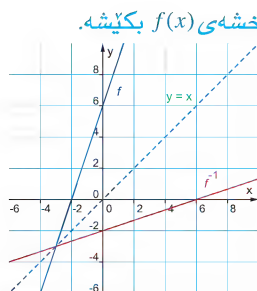


دهتوانیت پیچەوانەى نەخشە بە ڕیڤای ئالوگۆرکردنى x و y له ڕیڤای نەخشەدا پاشان y به پێى x ههژماربکە.

4 نموونه

نووسینه وەى پیچەوانەى نەخشە و کێشانی ڕوونکردنە وەیه کەى.

وێنەى ڕوونکردنە وەیهى نەخشەى $f(x) = 3x + 6$ بکێشە، پاشان پیچەوانەى نەخشەکە بنووسە وێنە ڕوونکردنە وەیه کەى بکێشە.



$$\begin{aligned} y &= f(x) & y &= 3x + 6 \\ \text{ئالوگۆر له ئێوان } x \text{ و } y \text{ بکە} & & x &= 3y + 6 \\ x \text{ به پێى } y \text{ بدۆزەوه} & & x - 6 &= 3y \\ & & \frac{x-6}{3} &= y \\ & & y &= \frac{x-6}{3} \\ & & f^{-1}(x) &= \frac{x-6}{3} \\ & & &= \frac{1}{3}x - 2 \end{aligned}$$

پیچەوانەى نەخشەکە به شیوەى... $y = f^{-1}(x)$ بنووسە

سادەبیکە پاشان وێنەى ڕوونکردنە وەیهى پیچەوانەى نەخشەکە بکێشە.

وێنەى ڕوونکردنە وەیهى نەخشەى $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$ بکێشە. پاشان پیچەوانەى نەخشەکە وێنە ڕوونکردنە وەیه کەى بکێشە.



هەر جارێک وىستت کردارێک لابهیت، به ههنگاو ههنگاوت بگهڕێوه دواوه. به دەستپێکردن له ئەنجامه کەوه ههتا گهيشتن به چوونه ناوى سهرهکى. له م باره دا دهتوانیت پیچەوانەى نەخشە به کار بهێنیت.

جێبه جێکردن له بازارگانیدا

5 نموونه

بازرگانێک ئامێرىکى وێنەگرتنى به 103 140 دینار فرۆشت. ئەم بره پاره نرخى ئامێره کە و زیادکردنى 3000 دینار نرخى کاغەزى بهرگ تێگرتنه کەى کە بازرگانه کە داينا بوو 8% نرخى باجه کەى بوو. کرپاره کە ئامێره کەى به دڵ نه بوو فرۆشياره کە چۆن ئەو بره پاره یهى دهیگه پێتته وه بۆ کرپار ههژمار دهکات.

ههنگاوى 1 نەخشەکە بنووسە کە برى تێچوونى به پێى نرخى ئامێره کە p دهنوێنیت.

$$c(p) = 1.08(p + 3000) \quad \text{تێچوون وەى نەخشەیه کە به پێى نرخى ئامێره کە}$$

ههنگاوى 2 پیچەوانەى ئەو نەخشەیه بنووسە کە نرخى ئامێره کە به پێى تێچوونه کەى دهينوێنیت.

$$c(p) = 1.08(p + 3000)$$

$$c(p) = 1.08p + 3240$$

به شینه وەیهى بکە

3240 له ههردوو لا دهربکە

دابه شیکه بۆ جیاکردنە وەیهى p

$$c(p) - 3240 = 1.08p$$

$$\frac{c(p) - 3240}{1.08} = p$$

ههنگاوى 3 به های پیچەوانەى نەخشەکە ههژماربکە کاتیك $c = 103\,140$

$$p = \frac{103\,140 - 3240}{1.08} = 92\,500$$

بازرگانه کە پێویسته 92 500 دینار بداته وه به کرپار پاسه دانبه کە

به له جیاتى دانان

$$\begin{aligned} c(p) &= 1.08(92\,500 + 3000) \\ &= 1.08(95\,500) \\ &= 103\,140 \end{aligned}$$

بۆ ئاماده کردنى چا $\frac{1}{6}$ كهوچكێك له چا بۆ ههر كوپیك ئاو، و یهك كهوچك له چا بۆ قۆرییهك ئاو به کار بهێنە، پیچەوانەى نەخشە بۆ دیاریکردنى ژماره ی کوپه کان کاتیك 7 كهوچك چا به کارهاتبیت.



بیرکەو و تاوتویکە

1. ئەنجامی ئالگۆرکەردنی نیوان x و y باسکە، بۆ دۆزینەوێ پێچەوانەی نەخشەی $f(x) = x$ لە بەکارهێنانی ڕوونکردنەوێی نەخشەی $f(x)$ دا، چۆن پیشبینی ئەو ئەنجامەت دەکەرد؟
2. نموونەیک بەهێنەو، بۆ نەخشەیک پێچەوانەی پەيوەندییەکی نەخشەبێت و نموونەیکە تر پێچەوانەی پەيوەندییەکی نەخشە نەبێت.
3. چیت دەستدەکەوێت کاتی پێچەوانەی نەخشە دەدۆزینەوێ بۆ پێچەوانەی نەخشەی $f(x)$ ؟
4. ئەم خشتەیک بەرامبەر بکێشە و تەواوی بۆ دەرەو پێچەوانەی نەخشەیک بۆ ناوەو بەکە. نموونەیک بێنەو لەسەر نەخشەی $f(x)$ بۆ ناو و بۆ دەر و پێچەوانەی نەخشەیک بۆ $f(x)$



2-4

راھینانەکان

راھینانی ئاراستەکراو

1. **زاراوەکان** لە کاتی ئالگۆرکەردنی نیوان x و y ھەردەم ئەنجامەکی ؟ پێچەوانەیکە (پەيوەندی یان نەخشە)

وێنە پوونکردنەوێ ئەم نەخشە بکێشە. کە بەم خشتانە نوێنراون. پاشان وێنە پوونکردنەوێ پێچەوانەی نەخشە بکێشە بوارو مەودای ھەریەکە لە دوو پەيوەندییەکی دیاریکە

x	3	4	1	-1
y	-1	-2	-4	-4

x	1	2	3	4
y	1	2	4	8

1 برۆانە نمونە

2 برۆانە نمونە

کرارە پێچەوانەکان بۆ نووسینی پێچەوانەی نەخشە بەکاربھێنە.

$f(x) = x - 2\frac{1}{2}$ 7 $f(x) = \frac{x}{2}$ 6 $f(x) = 4x$ 5 $f(x) = x + 3$ 4

$f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$ 10 $f(x) = \frac{x}{2} + 3$ 9 $f(x) = 5x - 1$ 8

$f(x) = \frac{3x-5}{2}$ 13 $f(x) = 4(x+1)$ 12 $f(x) = \frac{1}{2}(3-3x)$ 11

3 برۆانە نمونە

وێنە پوونکردنەوێ نەخشە بکێشە، پاشان پێچەوانەی نەخشە بۆ دۆزەو و وێنە پوونکردنەوێ بکێشە.

$f(x) = 10 + 0.6x$ 16 $f(x) = \frac{x}{4} + 2$ 15 $f(x) = 5 - 2x$ 14

4 برۆانە نمونە

17. **باری کەش و ھەوا** نەخشە $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ بەکار دێت بۆ گۆڕینی پلەکانی لە پێوھری ھەرە نھایت بۆ پێوھری سەدی پێچەوانەی نەخشە بۆ دۆزەو کە پلەکانی گەرما لە پێوھری سەدی بۆ پێوھری ھەرە نھایت دەگۆڕێت. 16° پلە سەدی بۆ پلەکانی ھەرە نھایت بگۆڕە

5 برۆانە نمونە

راھینان و شیکارکردنی پرسیارەکان

وێنە پوونکردنەوێ ئەم نەخشە بکێشە کە بەم خشتانە نوێنراون پاشان وێنە پوونکردنەوێ پێچەوانەی پەيوەندییەکی بکێشە، بوار و مەودای ھەریەکە لە دوو پەيوەندییەکی دیاریکە.

x	-4	-2	0	2	4
y	-2	-1	0	1	2

x	-1	2	3	5
y	1	3	5	5

راڻينانى نازاد	
سهيڙى	بۇ شىكارى
نمونه بگه	راڻينانەكان
1	19-18
2	22-20
3	25-23
4	28-26
5	29

كرداره پيچەوانەكان بۇ نووسىنى پيچەوانەنى نەخشە بەكاربەيئە.

$$f(x) = \frac{x}{0.25} \quad 22$$

$$f(x) = x - 1\frac{3}{4} \quad 21$$

$$f(x) = 0.825x \quad 20$$

$$f(x) = \frac{1}{5}x + 12 \quad 25$$

$$f(x) = 145 + 12.5x \quad 24$$

$$f(x) = 21 - 32x \quad 23$$

ويئەنى پوونكرنەودىي ھەر نەخشەيەك لەمانەى خوارەودە بكيئشە و پاشان پيچەوانەنى نەخشەكە بدۆزەودە و ويئەنى پوونكرنەودەكە بكيئشە.

$$f(x) = 1.21x \quad 28$$

$$f(x) = 2 - \frac{x}{3} \quad 27$$

$$f(x) = \frac{4}{5}(x - 15) \quad 26$$

فېربوون نمونەى ھيلى ژمارەى ھەلگرانى بەكالۆريۇس لە يەككە لە ولاتە گەورەكاندا سالانە

19 500 كەس زيادەكات دەخەملينيت، لە سالى 2001 دا ژمارەى ھەلگرانى بەكالۆريۇس 1.28

مليۇن كەس بوو، پيچەوانەنى نەخشەكە بەكاربەيئە، بۇ خەملاندنى ئەودەى دواى سالى 2001 چەند سالى تر دەخايەنييت تا ژمارەيان دەگاتە 1.7 مليۇن كەس.

بېركردنەودەى رەخنەگرانە ويئەنى ئەو راستەھيلى بكيئشە كە بە دوو خالى (3,4) (2,9) تپيەر دەبييت.

أ لارى راستەھيلىكە چەندە؟

ب لارى راستەھيلى پوونكرنەودەى پيچەوانەنى نەخشەكە چەندە؟

فيزيا پلەى كولانى ئاوەسەر پووى دەريا 100 پلەى سەدييە.

$f(x) = 100 - 3.37x$ نەخشەى پلەى كولانى ئاوەسەر پووى دەرياوە دەنوئييت.

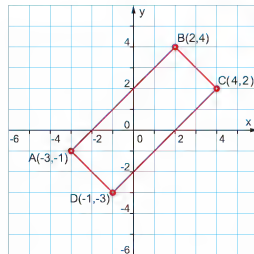
أ پيچەوانەنى نەخشەكە بنوسە.

ب ئەو بەرزاييە چەندە كە پلەى كولانى ئاوتييدا لە 90 پلەى سەدى كەمتر دەبييت وەلامەكەت بۇ

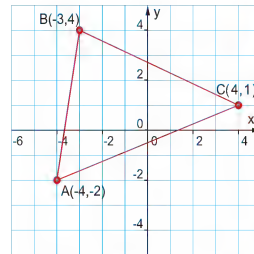
نزيكترين 10 m مەتر نزيككەو.

ج پلەى كولانى ئاوەسەر لوتكەى شاخى لوتس لە نيپال 71.3 پلەى سەدييە، بەرزى ئەم لوتكە لە ئاستى پووى دەريا و بەمەتر بدۆزەودە؟

ئەندازە سەرى ئەم شيوازە ئەندازەبيانە بدۆزەودە كە پيچەوانەنى پەيوەندييەكە دەنوئييت.



33



32

بېرى رەخنەگر پەيوەندى پيچەوانەنى نەخشەى $f(x) = 3$ چيە؟ ئايا ئەم پەيوەندييە پيچەوانەنى نەخشەيە؟ ئەمە پوونبەكەو.

بنوسە لە پيشپرکيى تپيەراندنى بوپيەكان، ھەلۆ لە ماوەى 12.59 چرکە 10 m ي برى وا دابنى ھەلۆ ماوەكەى بە خيرايبەكى نەگۆر برپووە. ئەو نەخشە بنوسەكە كە ماوەى برپاوە پيى كات دەنوئييت. پيچەوانەنى نەخشەكە بنوسە و بۇ ھەژمارکردنى كاتى خەيانراو لە برپىنى ماوەى 25 m بە خيرايبە نەگۆر بەكاربەيئە.

نرخى بليتى چوونە ژوورەودە بۇ سيكرى جيهانى 22 000 دينارە. ئەگەر بە ھوى كارتى متمانە پارەكە بدريئە سيكرەكە گۆژمەكە بەبرى 3 500 دينارە زياد ھەردەگريئ، ژمارەى بليتە كراوكان ھەر چەند بن.

أ نەخشەيەك بنوسە، ئەو برە پارەى بە ھوى كارتى متمانەو دەدريئ بنويئييت، بە پيى ژمارەى بليتە كراوكان n .

ب پيچەوانەنى نەخشەكە بنوسە و بەكاربەيئە بۇ دۆزينەو ھى ژمارەى بليتە كراوكان بەھوى كارتى متمانەو، ئەگەر بزانييت برى تيجوونەكەى 157 500 دينار بوو.

ج ئايا لە توانادايە تيجوونى كپىنى چەند بليتيك بە ھوى كارتى متمانەو 332 500 دينار بييت؟

37 **هەلە لە شیکردنەوه** دوو خوێندکار هەستان بەدۆزینەوهی پێچهوانەى نەخشە بۆ نەخشەى $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ کامیان هەلەیه؟ هەلەکە دیاریکە.

ب	$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ $f(x) = 2x - 1$
ا	$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ $f^{-1}(x) = 2(x - 1)$

38 **بنووسە** ئەوهی لە نەخشەکە و پروونکردنەوهکەیدا پروودەدات دەررخە. کاتیگ ئالوگۆر لە نیوان پووتانی هەر خالێگ دەرکێت.

39 **بیری رەخنەگر** ئایا دەگونجێت پێچهوانەى پەيوەندییەکە بۆ پەيوەندییەک نەخشە نەبێت و ببێت بە نەخشە؟ بە نمونە وەلامەکەت پروونکەوه.

40 **کلۆهکان** پێوانەى کلۆ بە پێى چۆوهى سەر نەخشەیهکی هێلییه پێوانەى کلۆى سەرێگ چۆوهکەى 55 cm بێت بریتیه له 17.5 و پێوانەى کلۆى سەرێگ چۆوهکەى 57 cm بریتیه له 18 .

ا نەخشەیهکی هێلی بۆ پێوانەى کلۆیگ s بە پێى چۆوهى سەرێگ c بنووسە؟

ب پێچهوانەى پەيوەندییەکەى بدۆزوه. ئایا نەخشەیه؟ چى دەنوینت؟

ج کلۆیگت دۆزییهوه پێوانەکەى 18.5 چۆوهى سەرى خاوهنەکەى چەندە؟



دیاریکە، ئەگەر ئەم وتانە، هەمیشە راستە، یان هەندیک جار راستە یان هەمیشە هەلەیه.

41 پێچهوانەى جووتە رێکخراویگ خالێگ لە سەر وێنە پروونکردنەوهیهکە دەنوینت، کە بریتیه لهو

جووتە رێکخراوهى وێنەکەى و وێنەدانەوهى خالەکەیه بەدهورى راستەهێلی $y = x$

42 پێچهوانەى نەخشە بۆ نەخشەیهکی هێلی، نەخشەیهکی هێلییه.

43 پێچهوانەى نەخشە بۆ نەخشەیهکی هێلی لارییهکەى موجب بێت، دەکاتە نەخشەیهکی هێلی لارییهکەى سالبه

44 پێچهوانەى نەخشە بۆ نەخشەیهکی هێلی لارییهکەى گەورەتر بێت له 1 ، بریتیه له نەخشەیهکی

هێلی لارییهکەى بچوکتەر له 1

45 پێچهوانەى پێچهوانەى خالێگ بریتیه له هەمان خال.

46 پێچهوانەى پەيوەندى بۆ نەخشەى $y = k$ کاتیگ k ژمارهیهکی نەگوربیت، نەخشە نییه.

47 **چوونە ژێر ئاو** (غوص) ئەو کەسەى ئەم یارییه ئەنجام دەدات،

دەزانیت پەستانی ئاو (بەکیلۆ باسکال kpa دەپۆرێت)، بەزیادبوونی

قوولایی ئاو (بەمەتر دەپۆرێت) زیاددەکات، کە ژێر دەریاوانەکە پێى

دەگات وێنەى بەرامبەر تاییبەتە بە ئاوى سازگار.

ا پەستان وەگ نەخشەیهک بە پێى قولی بنووسە.

ب بە شۆوهیهکی گونجاو بوار و مەودای ئەم نەخشەیه دیاریکە.

ج پێچهوانەى نەخشە بۆ نەخشەى لقی a بدۆزوه.

د ئایا قوولاییهک هەیه له نەخشەکە، بە هەمان ژماره بۆ قولی و پەستان دەردەبرێت؟ وەلامەکەت پروونکەوه.



ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوه

48 کام لەمانەى خواروه پێچهوانەى نەخشەیه بۆ نەخشەى $f(x) = 4x - \frac{3}{4}$

ا $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{16}$ **ب** $f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x + 3$

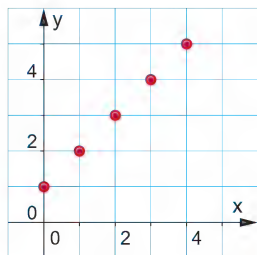
ج $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 3$ **د** $f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{16}$

49 هیمن بۆ چاککردنی ئۆتۆمبیلەکی 175 000 دینار بۆ نرخى پارچەى یەدەکی، 35 000 دینار بۆ ھەر کاتژمێرێکی که له چاککردنەودا پێدەچێت، پارەدەدات. ئەم نەخشەى $f(x) = 175\,000 + 35\,000x$ رێسای ھەژمارکردنی تیچوونی چاککردنەودەى ئۆتۆمبیلەکە بە پێى ژمارەى کاتژمێرەکان که بۆ چاککردنەودەى دەبیایەنێت کام لەمانەى خوارووە پێچەوانەى نەخشەکە دەنویێت؟

- (ا) ژمارەى کاتژمێرەکان بە پێى تیچوون. (ج) کرێى کاتژمێرى چاککردنەو بە پێى تیچوون
(ب) تیچوون بە پێى ژمارەى کاتژمێرەکان. (د) تیچوون بە پێى کرێى کاتژمێرى چاککردنەو.

50 کام خال پێچەوانەى خالى $(5, -2)$ دەبێت؟

- (ا) $(-5, 2)$ (ب) $(5, 2)$ (ج) $(-2, 5)$ (د) $(2, -5)$



51 **کورتە وەلام** خستەیهك دروستبکە، پێچەوانەى پەيوەندى بۆ ئەو پەيوەندییەى له وێنەى پروونکردنەودەى بەرامبەر دایە بنویێت.

بەرەنگارى و فراوانکردن

پێچەوانەى نەخشە بۆ ھەر نەخشەیهك لەمانە بدۆزەو کاتیك $y = f(x)$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ 54 $ax + by = c$ 53 $y = mx + b$ 52

x	y
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

55 ئەو پەيوەندییەى له خستەى بەرامبەر پێناسەکراو بە پروونکردنەودەى بنویێنە پاشان وێنەى ھەر خالێک بە وێنەدانەودەى بەدەورى راستەھێلى $y = x$ بکێشە بۆ دەستکەوتنى وێنەى پروونکردنەودەى پێچەوانەى پەيوەندییەکە. ئەگەر ھاوکێشەى بنەرەتى $y = x^2$ بێت.

بە شێوێ جەبرى بسلەمێنە کە ھاوکێشەى پێچەوانەى پەيوەندییەکە بریتییە لە $x = y^2$ **ببرکردنەودەى رەخنەگرانە** چى دەلێت دەربارەى نەخشەیهکى هێلى لارییەکەى و لاری پێچەوانەى نەخشەکە یەکسان.

وێنەى پروونکردنەودەى نەخشەکە و پێچەوانەى نەخشەکە بکێشە.

$y = 2^x$ 59 $y = x^3$ 58 $y = 3$ 57

پێداچوونەودەى لولییچى

نرخى پشك	
پۆژ	گۆران لە نرخدا
1	-230
2	+2580
3	-640
4	+1270
5	-2120

60 **بازرگانى** چەند پشكێك، بە برى 45 180 دینار کرا، بۆ ھەر پشكێك ئەم خستەى بەرامبەر گۆرانی نرخى پشكەکە پاش کرپنى دەنویێت. (پۆلەکانى پێشوو).

(ا) بەھای ئەم پشکانە لە کەمەووە بۆ زۆر ریز بکە، لەو نرخەووە کە لە پۆژى 0 ە وەکە پۆژى کرپنە.

(ب) مەودای نرخەکان بە بەکارھێنانى زمانى کۆمەڵەکان بنووسە.

نەخشەیهکى رادەدار لە کەمترین پلەى لە توانادا بوو دا بنووسە، کە ھاوکۆلەکى سەرەکى 2 و سفرکانى ئەم ژمارە پێدراوانە بێت.

61 $1, 2, -3$ 62 $-\sqrt{5}, \sqrt{5}$ 63 $2, 1, -1$ 64 $9, 8, -3$

دیاریبکە، نەخشەکە گەشەیه یان پووکانەودیه، پاشان وێنەى پروونکردنەودەى بکێشە (وانەى 1-4)

$f(x) = \frac{1}{25}(0.5^x)$ 66 $f(x) = 15\left(\frac{89}{100}\right)^x$ 65

$f(x) = 0.01(1.9^x)$ 68 $f(x) = 2(1.1^x)$ 67

نەخشە لۇگارىتمىيەكان

Logarithmic functions



كى ئەمە بەكار دەھىيىت؟

لۇگارىتم بۇ پېۋانى ترشى ئاۋ (PH) بەكار دىت

ئامانچەكان

• شېۋى ھاۋتاي نەخشە تۈانى
و نەخشە لۇگارىتمى
دەنوسىت و بەھايەكەى
ھەژمار دەكات.

زاراۋەكان
Vocabulary

لۇگارىتم
Logarithm

لۇگارىتمى ئاسابى
Common Logarithm

نەخشە لۇگارىتم
Logarithmic Function

خويۇندەۋە

$\log_b a = x$ بەم شېۋىيە

بخويۇندەۋە: x يەكسانە بە

لۇگارىتمى a بە بنچىنە b

سەرەنجىدە لۇگارىتم برىتييە لە
تۈان.

چەند جار دىنارىك چەند جارە بىكەيت دەپتە 8 دىنار؟ دەتۈانیت ئەمە بە ھاۋكىشەيەك
بنويىت $(2^x) = 8$ لەۋانەيە بتۈانیت ئەم ھاۋكىشەيە بە ھىزى شىكار بىكەيت، ئەگەر لە
بىرت پىت كە $2^3 = 8$ كەۋاتە پېۋىستە يەك دىنار 3 جار چەند جارە بىكەيت بۇ ئەۋەى 8
دىنار تەستىكەۋىت.

چەند جار دىنارىك چەند جارە بىكەيت بۇ ئەۋەى بېيتە 512 دىنار؟ دەتۈانیت ئەم
پرسىارە شىكار بىكەيت، ئەگەر بتۈانیت ھاۋكىشەيە $2^x = 512$ شىكار بىكەيت،
بەبەكار ھىنەى كىردارى پېچەۋانەى كىردارى بەرز كىردەۋەى ژمارەيەكى دىارىكراۋ بۇ
ھىزىك (تۈانىكى) دىارىكراۋ. ئەۋ كىردارە پېچەۋانەيە برىتييە لە ھەژمار كىردى
لۇگارىتمى. لۇگارىتم برىتييە لە تۈانى ئەۋ ھىزەى كە بەرز دەكرىتەۋە بۇ ژمارەيەكى
(بنچىنەيەكى) دىارىكراۋ بۇ ئەۋەى بەھاي دىارىكراۋ تەستىكەۋىت، دەتۈانیت
ھاۋكىشەى تۈانى بە شېۋى ھاۋكىشەى لۇگارىتمى بنوسىت و بە پېچەۋانەۋە.

ھاۋكىشەى لۇگارىتمى

ھاۋكىشەى تۈانى

$$\log_b a = x \quad b^x = a$$

$b > 0, b \neq 1$

گۆرىن لە شېۋى تۈانى بۇ شېۋى لۇگارىتمى

ھەر ھاۋكىشەيەكى تۈانى بەشېۋى لۇگارىتمى بنوسە.

بنچىنەى تۈان دەپتە بنچىنەى لۇگارىتم، تۈانى ھىز
برىتييە لە لۇگارىتم، ھىزى ھەر ژمارەيەك جگە لە
سفر دەكاتە 1 لەۋانەيە تۈان (يان لۇگارىتم) سالب
پىت. لەۋانەيە لۇگارىتم (يان تۈان) گۆراۋ پىت.

ھاۋكىشەى لۇگارىتمى	ھاۋكىشەى تۈانى
$\log_2 64 = 6$	$2^6 = 64$
$\log_4 4 = 1$	$4^1 = 4$
$\log_5 1 = 0$	$5^0 = 1$
$\log_5 0.04 = -2$	$5^{-2} = 0.04$
$\log_3 81 = x$	$3^x = 81$

ا
ب
ج
د
ه

1. ئەم ھاۋكىشە تۈانىيەنە بە شېۋى لۇگارىتمى بنوسە.

$x^0 = 1 (x \neq 0)$ ج

$3^3 = 27$ ب

$9^2 = 81$ ا



نمونه 2

گۆرین له شیۆدی لۆگاریتمی بۆ شیۆدی توانی.

هاوکیشی لۆگاریتمی به شیۆدی توانی بنووسه

هاوکیشی لۆگاریتمی	هاوکیشی توانی
$\log_{10} 100 = 2$	$10^2 = 100$
$\log_7 49 = 2$	$7^2 = 49$
$\log_8 0.125 = -1$	$8^{-1} = 0.125$
$\log_5 5 = 1$	$5^1 = 5$
$\log_{12} 1 = 0$	$12^0 = 1$

بنچینهی لۆگاریتم ده بێته بنچینهی هیز
لۆگاریتم بریتییه له توانی هیز، له وانهیه لۆگاریتم
سالب بێت

2. هاوکیشی لۆگاریتمی به شیۆدی توانی بنووسه.



$\log_{10} 10 = 1$ [ا] $\log_{12} 144 = 2$ [ب] $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$ [ج]

لۆگاریتم توانه. ئەمەش پێگات پێدەدات، یاسایهکانی هیز له سەر لۆگاریتمهکان جیبه جیبهکەیت.
له وانهیه ئەو سیفەتانهی خوارەوت سەرەنجدا بێت، له دوا نمونهدا.

هەندیک سیفەتی لۆگاریتمهکان

b هەر بنچینهیهك بێت كاتێك $b > 0$ و $b \neq 1$.

شیۆدی لۆگاریتمی	شیۆدی توانی	نمونه
لۆگاریتمی b بنچینهی b $\log_b b = 1$	$b^1 = b$	$\log_{10} 10 = 1$ $10^1 = 10$
لۆگاریتمی 1 $\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$	$\log_{10} 1 = 0$ $10^0 = 1$

تێبینی:

ئەگەر $1 > b > 0$

ئەوا \log_n

ژمارهیهکی سالب

كاتێك $n > 0$

لۆگاریتمی ئاسایی لۆگاریتمی بنچینه 10. ئەگەر بنچینهی لۆگاریتم دیاری نەکرا بێت، ئەوا 10 یه

نمونه $\log 5 = \log_{10} 5$

هەژمارکردنی بهای لۆگاریتم به هزری.

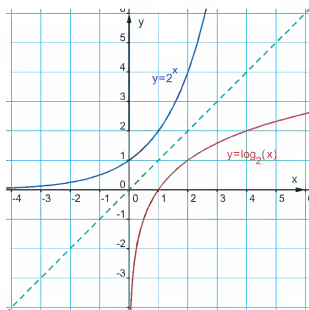
بههای ئەمانه خوارەوت به هزری هەژماریکه.

$\log_4 \frac{1}{4}$ [ب] $\log 1000$ [ا]
 $4^? = \frac{1}{4}$
 $4^{-1} = \frac{1}{4}$
 $\log_4 \frac{1}{4} = -1$
 $10^? = 1000$
 $10^3 = 1000$
 $\log 1000 = 3$

3. به هزری بههای ئەم برانه بدۆزەوه.

$\log_{25} 0.04$ [ب] $\log 0.00001$ [ا]



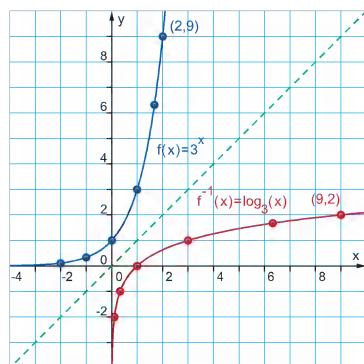


له بهر ئه وهی لۆگاریتم پیچه وانهی توانه، ئه وای پیچه وانهی نه خشه یه کی توانی وک $y=2^x$ بریتییه له نه خشه ی لۆگاریتمی $x=\log_2 y$ ، پیویسته له بیرتییت که بواری ههریه که له دوو نه خشه که بریتییه له مه ودا ی نه خشه که ی تر، مه ودا ی ههریه کیان بریتییه له بواری ئه ویتریان. بواری نه خشه ی $y=2^x$ بریتییه له کۆمه له ی هه موو ژماره راستیه کان R و مه ودا که ی بریتییه له کۆمه له ی ژماره ی راستیه موجه به کان $\{y|y>0\}$ له وه وه دهرده چیت که بواری نه خشه ی لۆگاریتمی $y=\log_2 x$ بریتییه له کۆمه له ی ژماره راستیه موجه به کان $\{x|x>0\}$ و مه ودا که ی کۆمه له ی هه موو ژماره راستیه کان ه R .

4 نمونه وینه ی پوونکردنه وه ی نه خشه لۆگاریتمیه کان

به ها دراوه کانی گۆراوی x بۆ کیشانی وینه ی پوونکردنه وه ی پیچه وانه ی نه خشه که بکیشنه، بواری و مه ودا ی پیچه وانه ی نه خشه که دیاریبکه.

ا $x = -2, -1, 0, 1, 2; f(x) = 3^x$



وینه ی پوونکردنه وه ی نه خشه ی $f(x)=3^x$ به به کاره ی نانی خسته ی به هایه کان بکیشنه.

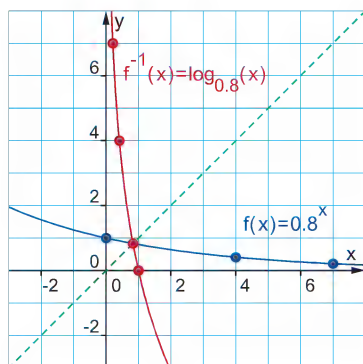
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)=3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

بۆ ئه وه ی وینه ی پوونکردنه وه ی پیچه وانه ی نه خشه که $f^{-1}(x)=\log_3 x$ بکیشیت x ، $f(x)$ له خسته ی سه ره ودا ئالوگۆر بکه

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$f^{-1}(x)=\log_3(x)$	-2	-1	0	1	2

بواری پیچه وانه ی $f^{-1}(x)$ بریتییه له $\{x|x>0\}$ و مه ودا که ی R .

ب $x = -3, 0, 1, 4, 7; f(x) = 0.8^x$



وینه ی پوونکردنه وه ی نه خشه ی $f(x)=0.8^x$ به به کاره ی نانی خسته ی به هایه کان بکیشنه.

x	-3	0	1	4	7
$f(x)=0.8^x$	2	1	0.8	0.4	0.2

بۆ ئه وه ی وینه ی پوونکردنه وه ی پیچه وانه ی نه خشه ی $f^{-1}(x)=\log_{0.8} x$ بکیشیت x و $f(x)$ ئالوگۆر بکه له خسته ی سه ره ودا.

x	2	1	0.8	0.4	0.2
$f^{-1}(x)=\log_{0.8} x$	-3	0	1	4	7

بواری پیچه وانه ی $f^{-1}(x)$ بریتییه له $\{x|x>0\}$ و مه ودا که ی R .

4. به هایه کانی $x = -2, -1, 1, 2, 3$ بۆ کیشانی وینه ی پوونکردنه وه ی نه خشه ی $f(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x$ به کاره ی نانه پاشان وینه ی پوونکردنه وه ی نه خشه ی پیچه وانه ی نه خشه که، و بواری و مه ودا ی پیچه وانه ی نه خشه که دیاریبکه.



نمونه 5

جیبه جیکردن له سهر ژینگه

کیمیازانان به شیوهی دووباره بوونه وه سامپله کانی باران بو دیاریکردنی ترشییه کهی تاقیده که نه وه، واتا دیاریکردنی خهستی ئایونه کانی هایدروجن (H^+) تئیدا. ترشی ئاوی باران به به کارهینانی pH به پیی ئەم نه خشه ده پیوریت: $pH = -\log[H^+]$ کاتیک $[H^+]$ خهستی ئایونه کانی هایدروجنه که به مول له لیتر له ئاوی باران ده پیوریت. pH ی ئاوی باران له هر شویتیک بدوزه وه.

آ شویتنی A کاتیک خهستی ئایونه کانی هایدروجن 0.0000316 مول له لیتر بیت.

$$pH = -\log[H^+]$$

$$pH = -\log(0.0000316)$$

له جیاتیدابنی

بزمیر به کاربهینه، بو دوزینه وهی به های لوگاریتمی به بنچینه

10 دوگمهی log دابگره. pH ی ئاوی باران له شویتنی A

به نزیکهیی بریتییه 4.5

ب شویتنی B کاتیک خهستی ئایونه کانی هایدروجن

دهگاته 0.0000009 مول له لیتر.

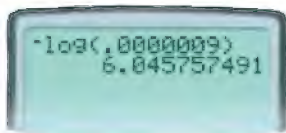
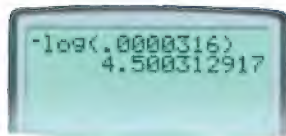
$$pH = -\log[H^+]$$

$$pH = -\log(0.0000009)$$

بزمیر به کاربهینه بو دوزینه وهی لوگاریتمی بنچینه 10

دوگمهی log دابگره. pH ی ئاوی باران له شویتنی B

بریتییه له 6 به نزیکهیی.



5. pH چای سارد دهگاته چهند، خهستی ئایونه کانی هایدروجن تئیدا 0.000158 مول له لیتریک بیت.



بیربکه وه و تاوتویبکه

1. ئەو هۆیه چیه که وا دهکات $\log_b b$ بکاته 1 ژماره ی موجهی b هر چهندیک بیت جگه له 1.
2. پرونیبکه وه ئایا $\log_a b$ و $\log_b a$ یه کسانن. پالپشتی وه لامه کهت بکه
3. ریکه خه ربه هیلکاری به رامبه ر دروستبکه و ته وای بکه.

پیناسه	سیفه ته کانی
نمونه کان	دژه نمونه
نەخشە ی لوگاریتمی	



راھینانی ئاراستەکراو

1 زاراوەکان لۆگاریتم لە ھاوکیشەیی توانی $a^x = b$ بریتییه لە ؟

1 برۆانە نمونە

ھاوکیشەیی توانی بە شیۆدی لۆگاریتم بنوسە.

$2.4^0 = 1$ 2 $4^{1.5} = 8$ 3 $10^{-2} = 0.01$ 4 $3^x = 243$ 5

2 برۆانە نمونە

ھاوکیشەیی لۆگاریتمی بە شیۆدی توانی بنوسە.

$\log_4 0.0625 = -2$ 6 $\log_x (-16) = 3$ 7 $\log_{0.9} 0.81 = 2$ 8 $\log_6 x = 3$ 9

3 برۆانە نمونە

بە ھزری ئەمانەیی خوارەو ھەژماریکە

$\log_7 343$ 10 $\log_3 \frac{1}{9}$ 11 $\log_{0.5} 0.25$ 12 $\log_{1.2} 1.44$ 13

4 برۆانە نمونە

وینەیی پوونکردنەویدی ئەم نەخشانە بکێشە، بەبەکارھێنانی بەھا پیدراوەکان. پاشان وینەیی پوونکردنەویدی پێچەوانەیی نەخشەکە بکێشە، بوار و مەودای پێچەوانەیی نەخشەکە بدۆزەو.

$x = -2, -1, 0, 1, 2 : f(x) = 0.5^x$ 15 $x = -2, -1, 0, 1, 1.5 : f(x) = 5^x$ 14

5 برۆانە نمونە

16 کیمیا بۆ لیکۆلینەویدی ھیزی ترشی گیراوەیکە، کیمیازانان نەخشەیی $pOH = -\log [OH^-]$ بەکاردێنن کاتی $[OH^-]$ ھێما دەکرێت بۆ خەستی ئایۆنەکانی ھایدروکسید کە بە مۆل لە لیترێک دەپۆرێت. بەھای pOH ی ئاوێک چەندە خەستی ئایۆنەکانی ھایدروکسید تێیدا 0.000000004 بێت؟

راھینان وشیکارکردنی پرسیارەکان

ئەم ھاوکیشە تەوانیانە بە شیۆدی لۆگاریتمی بنوسە.

$4^{-1} = 0.25$ 20 $1.2^0 = 1$ 19 $6^x = 216$ 18 $x^{2.5} = 32$ 17

ئەم ھاوکیشە لۆگاریتمیانە بە شیۆدی توانی بنوسە.

$\log_5 625 = 4$ 21 $\log_2 x = 6$ 22 $\log_{4.5} 1 = 0$ 23 $\log_\pi \pi = 1$ 24

بەھزری بەھای ئەمانە ھەژماریکە.

$\log_2 1$ 25 $\log 0.001$ 26 $\log_4 64$ 27 $\log_{0.1} 100$ 28

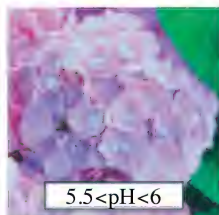
ئەم بەھا پیدراوانە بۆ گۆراوی x بەکاربھێنە، بۆ کێشانی وینەیی پوونکردنەویدی نەخشەکە، پاشان وینەیی پوونکردنەویدی پێچەوانەیی نەخشەکە بکێشە، بوار و مەودای پێچەوانەیی نەخشەکە دیاریبکە.

$x = -2, -1, 0, 1, 2, 3 : f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$ 29 $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3 : f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$ 30

31 باخچەکان رەنگی گۆلەکانی ئورتانسیا دیاریدەکرێت بە پێی بەھای pH ی خاکەکە.



6 < pH < 6.5



5.5 < pH < 6



5 < pH < 5.5

راھینانی نازاد

بۆشیکارکردنی سەیری	راھینانەکان
نمۆنە بکە	
1	20-17
2	24-21
3	28-25
4	30-29
5	31

تێبینی

ئەگەر بژمێرت نەبێ
 $\log (0.000000004)$
 ≈ -8.4

رېځخهري باخچهيهك خهستی ئايؤنهكانى هايدروجنى له خاكى باخچهكه پيؤا، و بينى دهكاته
0.0000006 مۆل له ليترېك. ئايا ئه و خاكه گۆلى ئورتانسيای شينى لى دهرؤيت؟

32 كارتى متمانه له هه نديك كارتهكانى متمانه دا، نهخشه $n = \frac{\log A - \log P}{\log(1.0175)}$ هه ژماركردى
ژماره n له و مانگانهى كه به سهر سپاردنى گوژمهى بنه رتهى P تپه پوه، تا پارهكهى دهكاته
ئه و برهى ئيستاي A و وا دابنى ئه و پارهكهى له و كاته وه هيچ برېكى نه چۆتسه و له م
ماوهيه دا كارتكه به كار نه ها تووه.

ا ئاوات گوژمهى 1 000 000 دينارى دانا و حسابى ئيستاي كارتكهى 1 210 260 ديناره.
چهند مانگ به سهر سپاردنى گوژمهى بنه رتهى تپه پوه؟

ب ئه و پاره چهند مانگى ترى پيؤسته بؤ ئه وهى له 1 420 000 دينار تپه پوت.

ج تپيىنى چى له وه لامهكانى دوو پرسىارى پيؤشو دهكيت؟

33 بيركر دهنه وهى رهخنه گرانه به هاى b چهنده، ئه گهر زانيت $\log_a b = 0$ ؟ ئه مه پرونبكه وه

توندى	دهنگ
$10^{15} I_0$	هه لفرينى فريؤكه
$10^{12} I_0$	دريل
$10^7 I_0$	وشكه ره وهى قژ
$10^3 I_0$	چريه (دهنگى نزم)
$10^2 I_0$	دهنگى جوولهى په لكه دار
I_0	دهنگى گويچكه خوى

34 دهنكه كان ئاستى توندى دهنگ L به پيؤهرى لوگارىتمى ده پيؤريت،
به به كار هينانى نهخشه $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$ ، كاتيك L هيماى ئاستى

توندى دهنگ بئت كه به ديسيبل Decibel پيؤراوه، و هيماى I توندى
دهنگه كه بئت، ههروه ها I_0 هيما بئت بؤ توندى دهنگى گويچكهى خوى

ا ئاستى توندى هه ر دهنگى له خستهى به رامبه ر ديارى بكه.

ب ئاستى توندى دهنگ له يه كيك له جو ره كانى مۇسيقاى توند 110

ديسيبله ئه و دهنگه له كوى دادهنيت بؤ ئه وهى خستهكه به ريكى
بميينتته وه.

ج چى ده بئت ئه گهر ...؟ ديسبل دهيهكى يه كه پيؤانه ييهكى تره، كه بريتييه له بل Bel

35 بيرى رهخنه گر ئه گهر n ژماره يه كى راستى بئت و 10^n به شپوهى رهنوس نووسرا بئت ئايا $\log 10^n$
يه كسانه به ژماره ي سفره كان له 10^n دا، پالپشتى وه لامه كه ت به نمونه يه كه بكه.

36 خه ملاندىن به سوود وه رگرتن له $\log 100 = 2$ و $\log 1000 = 3$ هه ريه كه له $\log 200$ و $\log 500$ بخه ليته.

37 خواردن خستهى به رامبه ر به كار به يته بؤ ديارى كرىنى جوړى هه ر شه ريه تيك به زانىنى خه ستى
ئايؤنهكانى هايدروجن له ليترىكى ئه و شه ريه ته.

شهرهت	مۆل pH
ليمؤ	2.0 - 2.6
ميؤوژ	2.9 - 3.2
پرتقال	3.3 - 4.1
ته ماته	4.1 - 4.6

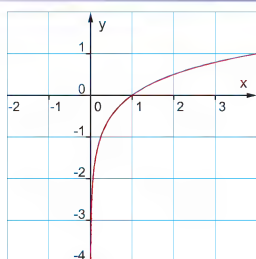
ا 0.00014 مۆل له لتر

ب 0.0081 مۆل له لتر

ج 0.00074 مۆل له لتر

38 بنووسه هوى چيه كه $\log_0 3$ و $\log_1 3$ پيؤاسه نه كراون

ناماده كرىن بؤ تا فيكر دته وه



39 ئه م پرونكر دهنه وهى به رامبه ر هى كام له م نه خشانه يه.

ج $f(x) = \log_2 x$

ا $f(x) = \log x$

د $f(x) = 2^x$

ب $f(x) = \log_4 x$

40 كام لەم ھاوكێشه لۆگاریتمییانه ھاوتای $2^7 = 128$ دەبێت؟

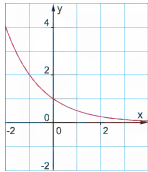
ا) $\log_7 2 = 128$ ج) $\log_2 7 = 128$

ب) $\log_2 128 = 7$ د) $\log_7 128 = 2$

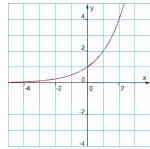
41 كام لەمانه‌ی خواروه‌ به‌شترین خەمڵێندراوی به‌های $\log 50$ دەبێت؟

ا) 1.7 ب) 2.5 ج) 5 د) 10

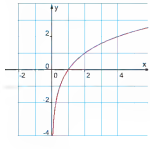
42 كام لەم پروونکردنه‌وانه‌ به‌شترین نوانده‌ بۆ نه‌خشه‌ی $f(x) = \log_{0.5} x$ ؟



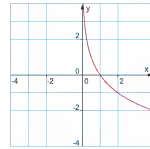
د



ج



ب



ا

43 كورته‌ وه‌لام به‌های $\log_2 64$ بدۆزه‌وه‌.

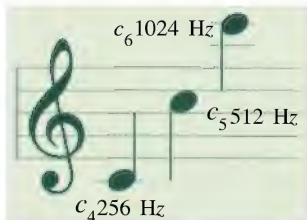
به‌ره‌نگاری و فراوانکردن

44 وێنه‌ی پروونکردنه‌وه‌یی دوو نه‌خشه‌ی $\log_7 x$ و $\log_{0.7} x$ بکێشه‌ باسی جیاوازی نیوان دوو نه‌خشه‌که‌ بکه‌، به‌ پشت‌به‌ستن به‌ پروونکردنه‌وه‌کانیان.

45 به‌های $\log_3 9$ و $\log_3 27$ و $\log_3 243$ هه‌ژماربکه‌ ده‌سته‌واژه‌یه‌ک له‌ باره‌ی په‌یوه‌ندی نیوان ئه‌م سی بره‌ لۆگاریتمییانه‌ بنووسه‌، به‌به‌کاره‌ێنانی گۆراوه‌کان گشتان‌د بکه‌.

46 به‌سه‌لمێنه‌ $\log_7 7^{2x+1} = 2x + 1$ له‌گه‌ڵ نووسینی هه‌ر هه‌نگاوێک

47 **مۆزیک** پیوه‌ری مۆسیقا پیوه‌ری لۆگاریتمییه‌. له‌و پیوه‌رده‌ ده‌توانین له‌ره‌له‌ره‌ی هه‌ر نۆته‌یه‌ک به‌ ژماره‌ی له‌ره‌له‌ره‌کان له‌هه‌ر چرکه‌یه‌که‌دا ده‌رببرێن، یان ژماره‌ی هی‌رتزه‌کان به‌ هی‌زیک له‌ هی‌زه‌کانی ژماره‌ 2 ده‌رببرین.



ا) له‌ره‌له‌ره‌ی نۆته‌ی C_7 به‌ شیوه‌ی توانی و به‌ شیوه‌ی لۆگاریتمی هه‌ژماربکه‌.

ب) ئه‌و نۆته‌یه‌ چیه‌ که‌ له‌ره‌له‌ره‌که‌ی ده‌گاته‌ 32 هی‌رتز؟

پیداچوونه‌وه‌ی لولییچی

ئهم برانه‌ به‌ ساده‌ترین شیوه‌ بنووسه‌، وا دابنێ به‌های هه‌موو گۆراوه‌کان سفر نین (پۆله‌کانی پێشوو)

49 $\frac{8s^2t^6}{4st^8}$

48 $\left[(2a^4)(5b^2) \right]^2$

51 $7a^{-2}b^3(3ab + 4a^{-1}b^2)$

50 $-2t^2(5st^{-1})$

52 **بێناکاری** کاتی دروستکردنی بېنایه‌ک، به‌ردیک له‌به‌رزی $7m$ که‌وته‌ خواروه‌، نه‌خشه‌ی $h(t) = h_0 - 4.9t^2$ به‌کاربه‌ێنه‌ بۆ هه‌ژمارکردنی ئه‌و کاته‌ی ده‌یخایه‌نی‌ت تاوه‌کو به‌رده‌که‌ ده‌گاته‌ زه‌وی، با h هێمای به‌رزی به‌رده‌که‌ بێت به‌مه‌تر پاش t چرکه‌ له‌ که‌وتنی و h_0 هێمای به‌رزی به‌نه‌رتی بێت به‌ مه‌تر پێش که‌وتنی (قۆناغه‌کانی پێشوو).

خشته‌ی به‌هایه‌کانی هه‌ر نه‌خشه‌یه‌ک ته‌واوبکه‌، به‌هایه‌کان بۆ نزیکترین به‌ش له‌سه‌د نزیکبکه‌وه‌.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = 1.7^x$					
$f(x) = 0.6^x$					
$f(x) = 0.3^x$					

53

54

55

تاقىکردنەۋەى نىۋەى بەش

1-4 نەخشەكانى تۋانى و گەشەو پوۋكانەۋە

دىاربىكە، ئايا ھەرىكە لەم نەخشەنە نەخشەى گەشەکردن يان نەخشەى پوۋكانەۋەى.

$$f(x) = 6.4 \left(1\frac{3}{8}\right)^x \quad 4 \quad f(x) = 14(1.4)^x \quad 3 \quad f(x) = \frac{1}{5}(0.2)^x \quad 2 \quad f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x \quad 1$$

5 وا دابنى ژمارەى بەكترياكاني چاندنكى بايەلۇجى لە پۆژى دوو شەممە دەگاتە 1000 و ژمارەكەى بە پۆژەى 50% پۆژانە لە و كاتەۋە زۆر دەبىت

ا نەخشەىكە بنووسە ژمارەى گەشەکردنى بەكترياكاني بە پى كات بنوینت (ھەژمارکردن بە پى پۆژ بىت)
ب وینەى پوۋنکردنەۋەى ئەو نەخشەى نووسىوتە بكیشتە، بۆ خەملاندنى ژمارەى بەكترياكاني لە دووشەممەى داھاتوۋا بەكاربەینە.

2-4 پىچەوانەى پەيوەندى و پىچەوانەى نەخشە

بەپوۋنکردنەۋەى ئەو پەيوەندىيە بنوینە كە بەھايەكانى لە خشتەكەدا ھاتوۋە، پاشان پىچەوانەى پەيوەندىيەكان بە پوۋنکردنەۋەى بنوینە

x	0	1	2	3	4
y	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$1\frac{2}{3}$

7

x	-1	0	1	2	3
y	0	4	8	12	16

6

پوۋنکردنەۋەى ھەر نەخشەىكە بكیشتە. پىچەوانەى نەخشەكە بنووسە و پوۋنکردنەۋەى بكیشتە.

$$f(x) = 0.4 \left(\frac{x}{2} + 1.5\right) \quad 11 \quad f(x) = 5x + 4 \quad 10 \quad f(x) = \frac{3}{4} - x \quad 9 \quad f(x) = x + 2.1 \quad 8$$

12 تىچوۋنى چاكردەۋەى بژمىرى مىران 210 000 دىنارە، نرخی پارچەى يەدەگ و 55 000 دىنار بۆ كړپى ھەر كاتژمىرىكى كار. نەخشەى $f(x) = 55\,000x + 21\,000$ تىچوۋنى چاكردەۋەى بژمىر بەپى ژمارەى كاتژمىرى خايەنراۋ بۆ چاكردەۋەى دەنوینت. پىچەوانەى نەخشەكە بدۆزەۋە، و بۆ دۆزىنەۋەى ژمارە كاتژمىرە خايەنراۋەكانى چاكردەۋەى بژمىرەكەى مىران بەكاربەینە، ئەگەر زانیت تىچوۋنەكە گەيشتە 402 500 دىنار.

3-4 نەخشە لوگارىتمىيەكان

ھەرىكە لەم ھاۋكىشە تۋانىيەنە بە شىۋەى لوگارىتمى بنووسە.

$$0.5^x = 0.0625 \quad 16 \quad 2^{-2} = 0.25 \quad 15 \quad 17.6^0 = 1 \quad 14 \quad 3^2 = 9 \quad 13$$

ھەرىكە لەم ھاۋكىشە لوگارىتمىيەنە بە شىۋەى تۋانى بنووسە

$$\log_a x = 5 \quad 20 \quad \log_{0.99} 1 = 0 \quad 19 \quad \log_{\frac{1}{5}} 25 = -2 \quad 18 \quad \log_4 64 = 3 \quad 17$$

21 وینەى پوۋنکردنەۋەى نەخشەى $f(x) = \left(\frac{5}{6}\right)^x$ بكیشتە، بەبەكارھىتانی بەھايەكانى $x = -1, 0, 2, 3$ وینەى پوۋنکردنەۋەى پىچەوانەى نەخشەكە بكیشتە.

سيفهتهكانى لۇگارىتم

Properties of Logarithm



كى ئىمە بەكار دەھىئىت؟

زانايانى بوومەلەرزە لۇگارىتم بەكار دەھىئىن بۇ
ھەژمارى ئەو ووزەيەيى لە بوومەلەرزەكان
دەردەچىت (نمونهى 6).

ئامانجەكان

• سيفهتهكانى لۇگارىتم بۇ
نوسىنى بىرە لۇگارىتمىيەكان
بە سادەترىن شىۋە
بەكار دىئىت.

• لۇگارىتم بە بنچىنەيەكى
دىارىكراو دەگۇرئىت بۇ
لۇگارىتم بە بنچىنەيەكى تر.

دەتوانرئىت نەخشەيى لۇگارىتمى $pH = -\log [H^+]$ دەربىرپىن بۇ ھەژمارى ئەو pH ەي
لەوانەي پىشوو ناسىت بە شىۋەيى تۈانى $10^{-pH} = [H^+]$ لەبەر ئەۋەيى لۇگارىتم برىتئىيە
لە تۈان، ئەوا سيفهتهكانى ھىز سيفهتهكانى لۇگارىتم دروستدەكات.

برىتئىت، بۇ ئەۋەيى دوو ھىز لە يەكتەر بدەيت ھەمان بنچىنەيان ھەبئىت دوو تۈانەكە

$$b^m b^n = b^{m+n}$$

سيفهتهكانى ئەنجامدانى لىكدان لە لۇگارىتم

m و n دوو ژمارەيى موجب بن، و b ھەر ژمارەيەكى راستى بىت ($b > 0$ و $b \neq 1$)

بەنۋوسىن	ژمارە	لە جەبەر
لۇگارىتمى ئەنجامى لىكدان دەكاتە سەرجمى لۇگارىتمەكانى ھاۋكۆلكەكان	$\log_3 1000 = \log_3 (10 \times 100)$ $= \log_3 10 + \log_3 100$	$\log_b (mn) = \log_b (m) + \log_b (n)$

دەتوانرئىت ئەو سيفهتهكانى سەرۋە بە ئاراستەيى پىچەۋانە بەكاربەھىئىت، بۇ نوسىنى سەرجمى
لۇگارىتم كە ھەمان بنچىنەيان ھەيە. ۋەك يەك لۇگارىتم، دەتوانرئىت بە سادەترىن شىۋە بىنۋوسىن.

فەيرە



كۆكرىنەۋەيى لۇگارىتمەكان

نمونە 1

ئەم بىرە ۋەك يەك لۇگارىتم بنۋوسە.

$$\log_4 2 + \log_4 32$$

$$\log_4 (2 \times 32)$$

$$\log_4 64$$

$$3$$

بۇ كۆكرىنەۋەيى دوو لۇگارىتم دوو

سادەبەكە.

$$4^3 = 64 \text{ بىر بەكەۋە}$$

1. ئەم بىرە ۋەك يەك لۇگارىتم بنۋوسە، ئەگەر تۈانرا سادەيى بەكە.

$$\log_{\frac{1}{3}} 27 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} \quad \boxed{\text{ب}}$$

$$\log_5 625 + \log_5 25 \quad \boxed{\text{ا}}$$



بىرت بىت بۇ ئەۋەيى دو ھىز دابەشەكەيت، ھەمان بنچىنەيان ھەبئىت تۈانەكان لەيەكتەر
دەرىكە. $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$ لەبەر ئەۋەيى لۇگارىتم تۈانە، ئەوا لىدەركرىنى لۇگارىتمىيەكان
لەيەكتەر كە ھەمان بنچىنەيان ھەيە برىتئىيە لە دۆزىنەۋەيى لۇگارىتمى ئەنجامى
دابەشكرىنى دوو ھىز ھەمان بنچىنەيان ھەبئىت.



سېفەتى ئەنجامى داپەشكرىنى لۇگارىتم

m ۋە n دوو ژمارەى ھەرچۆنكىى مۇجەب بىن، ۋە b ھەر ژمارەىكى راست بېت ($b > 0$ ۋە $b \neq 1$)

بەنوسىن	ژمارە	لە جەبىر
لۇگارىتمى ئەنجامى داپەشكرىن بىرىتىپە لە ئەنجامى لېدەركرىنى لۇگارىتمى بەشدرالە لە لۇگارىتمى بەشكرالە	$\log_5 \left(\frac{16}{2} \right) = \log_5 (16) - \log_5 (2)$	$\log_b \left(\frac{m}{n} \right) = \log_b (m) - \log_b (n)$

ئاگادارىپە!

ھەرەك چۆن ناتوانرېت $a^5 b^3$
سادە بکەيتەۋە ھەرەھا
ناتوانرېت بېرىكى لۇگارىتمى
سادە بکەيتەۋە ئەگەر
بىنچىنەكانيان جىاوازيېت.

لېدەركرىنى لۇگارىتمەكان

نمونه 2

$\log_2 32 - \log_2 4$ ۋەك يەك لۇگارىتم بنووسە، ۋ ئەگەر كرا سادەيبكە.

$$\log_2 32 - \log_2 4$$

$$\log_2 \left(\frac{32}{4} \right)$$

$$\log_2 (8)$$

$$3$$

بۇ لېدەركرىنى دوو لۇگارىتمەكە، دوو ژمارەكە
داپەشكە سادە بکە.
لە بىرىتېت $2^3 = 8$

2. بنووسە $\log_7 49 - \log_7 7$ ۋەك يەك لۇگارىتم بنووسە (ئەگەر كرا)



لەبەر ئەۋەى دەرکېت ئەنجامى لېكدانى لۇگارىتم ھەژمار بکرىت، دەرەوانرېت لۇگارىتمى ھېزەكان
ھەژماربکرىت.

سېفەتى لۇگارىتمى ھېز

a ۋە b دوو ژمارەى مۇجەب بىن، كاتېك $b \neq 1$ ۋە p ژمارەىكى راستى بېت.

بەنوسىن	بەژمارە	لە جەبىر
لۇگارىتمى ھېز بىرىتىپە لە ئەنجامى لېكدانى تۋانى ھېز لە لۇگارىتم بەھەمان بىنچىنە	$\log 10^3$ $\log(10 \times 10 \times 10)$ $\log 10 + \log 10 + \log 10$ $3 \log 10$	$\log_b a^p = p \log_b a$



رۇشناى

لەبىرېت بېت $\log j + \log a$
 $+ \log m = \log jam$

سادەكرىنى لۇگارىتمى ھېزەكان

نمونه 3

ئەم بېرانە بە شېۋەى ئەنجامى لېكدان بنووسە، ئەگەر كرا سادەى بکە.

$$\log_5 \left(\frac{1}{5} \right)^3 \quad \text{ب}$$

$$3 \log_5 \frac{1}{5}$$

$$5^{-1} = \frac{1}{5} \quad \text{لەبەر ئەۋەى} \quad 3(-1)$$

$$-3$$

$$\log_3 81^2 \quad \text{ا}$$

$$2 \log_3 81$$

$$\log_3 81 = 4 \quad \text{لەبەر ئەۋەى} \quad 2(4)$$

$$3^4 = 81 \quad 8$$

3. ھەر بېرىك بە شېۋەى ئەنجامى لېكدانى بنووسە. ئەگەر كرا سادەيبكە

$$\log_2 \left(\frac{1}{2} \right)^5 \quad \text{ج}$$

$$\log_5 25^2 \quad \text{ب}$$

$$\log 10^4 \quad \text{ا}$$



له بهرته وې کرډاره کانی هیڅ و لوگاریتم دوو کرډاری پیچېه وانه، که واته هه ریډه کیان نه نجامی نه وې تریان لا ده بات.



سیفته پیچېه وانه کانی هیڅ و لوگاریتم

ته گهر b هر بنچینه یه ک بیت و $b > 0$ و $b \neq 1$

نمونه	لهجهبر
$\log_{10} 10^7 = 7$	$\log_b b^x = x$
$10^{\log_{10} 2} = 2$	$b^{\log_b x} = x$

نمونه 4 ناسینه وې پیچېه وانه کان

بره که به ساده ترین شیوه بنووسه

$2^{\log_2 27}$ ج	$\log_5 125$ ب	$\log_8 8^{3x+1}$ ا
$2^{\log_2 27}$	$\log_5 5^3$	$\log_8 8^{3x+1}$
27	3	$3x+1$

4. ا $\log 10^{0.9}$ به ساده ترین شیوه بنووسه ب $2^{\log_2(8x)}$ به ساده ترین شیوه بنووسه ج



زوربه ی بژمیره کان لوگاریتمی ناسایی (بنچینه 10) یان لوگاریتمی سروشتی بنچینه e هه ژماره که ن سهیری وانه ی 4-5 بکه، ده توانیت لوگاریتم له بنچینه یه که وه بو لوگاریتم به بنچینه یه کی تر به پیی تم یاسایی خواره وه بگوریت.

یاسای گورینی بنچینه ی لوگاریتم

ته گهر a هر بنچینه یه کی موجب بیت کاتی که $a \neq 1$ و b هر بنچینه یه کی موجب بیت کاتی که $b \neq 1$

نمونه	لهجهبر
$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4}$	$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$



نمونه 5 گورینی بنچینه ی لوگاریتم

به های $\log_4 8$ هه ژماریکه

ریگای یه که م گورینی بنچینه بو 10	ریگای دووهم گورینی بنچینه بو 2 چونکه دوو هیزی ژماره 2 ه.
$\log_4 8 = \frac{\log 8}{\log 4}$	$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2} = 1.5$
$\approx \frac{0.0903}{0.602} = 1.5$	

بژمیر به کارینه

5. ا به های $\log_9 27$ هه ژماریکه. ب به های $\log_8 16$ هه ژماریکه. ب



په یژدی لوگاریتمی بو پیوانی نه و هیندان نه کی به هایه که ی ده که ویت به بواریکی زور فراوانه وه به کار دیت، وه ک توندی دهنگ و ناستی توندیه که ی یان نه و وزه ی له بومه له رزه یه که در ده چیت.

نمونە 6

جىبەجىكردن لە زەویناسیدا



پسپۇرانی زەویناسى پېۋەرى پىختەر بەكاردەھىتن،
بۇ دەرىپىنى ئەو ووزەى كە لە بوومەلەرزەكان
دەردەپەرپىت. ئەو پەيوەندىيەى ھىزى بوومەلەرزەىك
 M و ئەو وزەى لىى دەردەپەرپىت E بەيەكەو
دەبەستىتەو بريتىيە لە $M = \frac{2}{3} \log \left(\frac{E}{10^{11.8}} \right)$ لە سالى
1964 دا بوومەلەرزەىك بە ھىزى 9.2 پلەى رەختەر
لە ئالاسكاي ئەمريكاي باكورى دا ھىندى ئەو وزەى
لە بوومەلەرزەكە دەردەپەرپىت بدۆزەو.

$$9.2 = \frac{2}{3} \log \left(\frac{E}{10^{11.8}} \right) \quad \text{لە جياتدەبىنى}$$

ھەردوولا لە $\frac{3}{2}$ بدە

سادەىكە

سيفەتى ئەنجامى دابەشکردنى لۆگارىتم بەكاربەھىنە

پىچەوانەى ھىز و لۆگارىتم بەكاربەھىنە

پىناسەى لۆگارىتم بەكاربەھىنە

بژمىرە بەكاربەھىنە.

$$\left(\frac{3}{2} \right) 9.2 = \log \left(\frac{E}{10^{11.8}} \right)$$

$$13.8 = \log \left(\frac{E}{10^{11.8}} \right)$$

$$13.8 = \log E - \log 10^{11.8}$$

$$13.8 = \log E - 11.8$$

$$25.6 = \log E$$

$$10^{25.6} = E$$

$$3.98 \times 10^{25} = E$$

ئەو وزەى لە بوومەلەرزەكە دەردەپەرپەو گەيشتوتە 3.98×10^{25} ئەرگز (ergs)

دوو بوومەلەرزە ھىزەكانيان گەيشتە 9.2 پلە و 8 پلە بە پېۋەرى پىختەر، ئەو
وزەى بوومەلەرزەى يەكەم دەردەپەرپىت چەند ئەوئەندى وزەى بوومەلەرزەى
دوومە؟



بىرىكەو و تاوتويىكە

- چۆن بەبەكارھىنانى بژمىر وىنەى پوونكردەوېى $y = \log_5 x$ دەكشيت؟
- چۆن $10^{25.6}$ ت دۆزىنەو لە نمونە 6 بەبەكارھىنانى سيفەتەكانى ھىز؟
- چى پوودەدات، كاتىك ياساى گۆرپىنى بنچىنە جىبەجى دەكەيت لە $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ كاتىك $x = a$ ؟
- پىكخەر بە خشتەى بەرامبەر دروستبەكە و تەواويىكە. بەشپاۋازى خۆت سيفەتە بەيەك
بەستراوەكانى ھىز و لۆگارىتم پوونبەو.

سيفەتەكانى ھىزەكان	سيفەتەكانى لۆگارىتم



راهنانی ئاراسته‌کراو

1 پروانه نمونه

بره‌که وه‌ک یه‌ک لوگاریتم بنووسه. ئه‌گهر کرا ساده‌یه‌که.

$$\log_3 3 + \log_3 27 \quad 3$$

$$\log 100 + \log 1000 \quad 2$$

$$\log_5 50 + \log_5 62.5 \quad 1$$

2 پروانه نمونه

بره‌که وه‌ک یه‌ک لوگاریتم بنووسه. ئه‌گهر کرا ساده‌یه‌که.

$$\log_6 496.8 - \log_6 2.3 \quad 6$$

$$\log 5.4 - \log 0.054 \quad 5$$

$$\log_4 320 - \log_4 5 \quad 4$$

3 پروانه نمونه

ئه‌گهر کرا ساده‌یه‌که

$$\log_{\frac{1}{2}} (0.25)^4 \quad 10$$

$$\log_7 49^3 \quad 9$$

$$\log_3 3^5 \quad 8$$

$$\log_8 8^2 \quad 7$$

4 پروانه نمونه

$$\log_2 (0.5)^4 \quad 14$$

$$\log_4 1024 \quad 13$$

$$2.5^{\log_{2.5} 19} \quad 12$$

$$\log_2 2^{\frac{x}{2}+5} \quad 11$$

5 پروانه نمونه

به‌های بره‌که هه‌ژماریه‌که

$$\log_2 27 \quad 18$$

$$\log_5 10 \quad 17$$

$$\log_8 32 \quad 16$$

$$\log_9 \left(\frac{1}{27} \right) \quad 15$$

6 پروانه نمونه

19 زه‌ویناسی به‌یوه‌ندییه‌ک هی‌زی بومه‌له‌رزیه‌ک M به‌وزه‌ی E

که‌لیوه‌ی دهرده‌یه‌رپ‌ت به‌یه‌که‌وه ده‌به‌ست‌ت‌ه‌وه، که بریتیه‌یه له
 $M = \frac{2}{3} \log \left(\frac{E}{10^{11.8}} \right)$ ئه‌و وزه‌ی بومه‌له‌رزیه‌ی تایگون
 دهریده‌یه‌رپ‌ت‌ن چهند ئه‌وه‌نده‌ی وزه‌ی بومه‌له‌رزیه‌ی
 نیو مه‌دریده له 1881 .

راهنان و شیکارکردنی پرسیاره‌گان

بره‌که وه‌ک لوگاریتمی تاقانه بنووسه. ئه‌گهر کرا ساده‌یه‌که.

$$\log_{2.5} 3.125 + \log_{2.5} 5 \quad 22$$

$$\log 2 + \log 5 \quad 21$$

$$\log_8 4 + \log_8 16 \quad 20$$

$$\log_{1.5} 6.75 - \log_{1.5} 2 \quad 25$$

$$\log_2 16 - \log_2 2 \quad 24$$

$$\log 1000 - \log 100 \quad 23$$

ئه‌گهر کرا ساده‌یه‌که.

$$\log_5 125^{\frac{1}{3}} \quad 28$$

$$\log (100)^{0.1} \quad 27$$

$$\log_2 16^3 \quad 26$$

$$\log_9 6561 \quad 31$$

$$3^{\log_3 4.52} \quad 30$$

$$\log_3 3^{7+x} \quad 29$$

به‌های بره‌که هه‌ژماریه‌که

$$\log_4 9 \quad 34$$

$$\log_{25} 125 \quad 33$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 16 \quad 32$$

35 ده‌نگ پاش چهند سکالایه‌ک دهرکه‌وت که ده‌نگی موسیقایی ئه‌و ئاهه‌نگه‌ی له دهره‌وه ده‌کریت،
 ئاستی توندیه‌که‌ی 5 دیسیبل به‌رزتره له ماوه‌ی رپ‌پ‌دراو که 100 دیسیبله. ئاستی توندی ده‌نگ به
 به‌یوه‌ندی $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$ هه‌ژمارده‌کریت، کاتیک I هی‌مای توندی ده‌نگه‌که و I_0 هی‌مای
 توندی به‌رگوئیکه‌وتن بی‌ت. توندی ده‌نگی ماوه‌پ‌دراو ده‌کاته چهند ئه‌وه‌نده‌ی توندی ده‌نگی
 موسیقایی ئاهه‌نگه‌گان که له دهره‌وه ده‌کریت؟

راهنانی نازد	
سهری	بوشیکارکردنی
نمونه بکه	راهنانه‌گان
1	22-20
2	25-23
3	28-26
4	31-29
5	34-32
6	35



- 36 گەردوون** جياوازی نیوان پروی دیاری ئەستێرەیکە m و پروە راستەقینەیکە M بە بەکارهێنانی پەيوەندی $m - M = 5 \log \frac{d}{10}$ دەپۆریت، کاتیک d هیماى دووری نیوان ئەستێرەیکە و زەوى بیٲ که بە (فەرسەخى ئەستێرەیی) Parsec دەپۆریت.
- أ** دووری ئەستێرەى ئەنتاریس Antares لەزەوى بدۆزەوه.
- ب** ئەستێرەى سیگاسکۆ 225 Sigma Sco فەرسەخى ئەستێرەیی لە زەوییەوه دووره. دووری راستەقینەى ئەم ئەستێرەیه بدۆزەوه؟
- ج** دووری ئەستێرەى ئەنتاریس لە زەوى چەند ئەوهى دووری ئەستێرەى روتوف Rho Oph دەبیٲ ؟

پۆشنایى

فەرسەخى ئەستێرەیی بریتییه لە یەكەى پۆوانەییەك كه دەكاتە 3.3 سالى پووناكى.

هاوكێشه توانییهكه به شیوهى لۆگاریتمى بنووسه.

$$(b^m)^n = b^{mn} \quad \text{39} \quad b^{m-n} = \frac{b^m}{b^n} \quad \text{38} \quad b^{m+n} = b^m b^n \quad \text{37}$$

سادەبكه ئەگەر كرا.

$$2 - \log_{11} 121 \quad \text{42} \quad \log 0.1 + \log 1 + \log 10 \quad \text{41} \quad \log_2 32 - \log_2 128 \quad \text{40}$$

$$\frac{10^{\log 10}}{\log 10^{10}} \quad \text{45} \quad 7^{\log_7 7} - \log_7 7^7 \quad \text{44} \quad \log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}} \quad \text{43}$$

46 بیرکردنەوهى رهخهگرانه سیفەتەکانى لۆگاریتم، و بەهای $\log 2 \approx 0.301$ بەکاربهێنە، بۆ هەژمارى.

$$\log 2000 \quad \text{ج} \quad \log 200 \quad \text{ب} \quad \log 20 \quad \text{أ}$$

47 كیمیا پسپۆرانى كیمیا نامۆزگاریمان دەكەن، كه pH ی ئاوى مەلەوانى پۆیستە لە نیوان 7.0 و 7.6 بیٲ. پەيوەندى $pH = -\log [H^+]$ بۆ نووسینی برێك جیاوازی لە خەستى ئایۆنەكانى هايدروجین بۆ دوو بەهای pH ی دیاریكراو بەکاربهێنە.

48 فرەههنگاههكان لە شوینیكى دیاریكراو، 143 جوړه ئاژەل دەژین كه لهوانهیه لهناوچن، و ژمارهكەى سالانه 4% كهمدەكات.

- أ** نەخشەیهكى توانى بنووسه، ژمارهى ئاژەلهكان لهو شوینەدا به پێى ژمارهى سالهكان بنوینیت.
- ب** نەخشەیهكى لۆگاریتمى بنووسه، ژمارهى سالهكان به پێى ژمارهى ئاژەلهكان بنوینیت.
- ج** زنجیرهى ئەو دوگمانه بنووسه، كه بۆ تیکردنى نەخشە لۆگاریتمییهكه له بژمیری پوونکردنەوهیى بەکاریدهییت.
- د** پاش چەند سال ژمارهى ئاژەلهكان لهو شوینەدا له 30 كهەتر دەبیٲ؟ بۆ نزیكترین سال نزیكبهوه.

49 پارهەدان كالاىەك نرخهكەى 40 000 دیناره، سالانه نرخهكەى بهرپژهى 8% زیاددهكات. برێكى لۆگاریتمى بنووسه، و بەکاربهێنە بۆ دیاریكردنى ژمارهى ساله پۆیستەكان بۆ ئەوهى نرخى كالاىەكه بگاته 50 000 دینار، (یارمەتى: برهكه به شیوهى توانى بنووسه).

50 یەكێك له بانکەكان به پژهى 19.2% سوودى سالانه دەدات بهوكەسانەى پاره لهو بانکە دادەنن. نەخشەى $A = P(1.016)^n$ بۆ هەر ژمارکردنى بەهای ئیستا A بۆ گۆژمەى بنهپهتى دەنۆنریت پاش n مانگ له دانانى پارهكه.

- أ** 500 000 دینار لهو بانکە دانرا. برێكى لۆگاریتمى بنووسه، و بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوهى ژمارهى مانگەكان بۆ ئەوهى پارهكه بکاته دوو ئەوهندەى خۆى .
- ب** دواى چەند مانگ ئەو گۆژمەیه دوو ئەوهندەى خۆى دەبیٲ؟
- ج** ئایا کاریگەرى کاتەكه له سەر گۆژمەیه دەبیٲ، تا بەهاکانى دوو ئەوهنده بیٲ.

بژمیری پوونکردنه وهی یاسای گۆرینی بنچینه کان و بژمیری پوونکردنه وهی به کاربهرینه بۆ کیشانی وینهی پوونکردنه وهی ئهم نهخشانه.

$$y = \log_3 x \quad 51 \quad y = 2 \log_5 x \quad 52 \quad y = \frac{\log_{12} x}{3} \quad 53$$

بنووسه چۆن پوونکردنه وهی نهخشه $y = \log_{16} x$ دهکیشیت به به کارهینانی بژمیری پوونکردنه وهی؟

54 **بیری رهخهگر** به های نزیکهیی هه بریک بدۆزهوه، ئهگه زانیت $\log_{12} 33 \approx 1.4$ $\log_{12} 20 \approx 1.2$

$$\log_{12} 400 \quad \text{ج} \quad \log_{12} 660 \quad \text{ب} \quad \log_{12} 1.65 \quad \text{ا}$$

55 **بیری رهخهگر** په یوه ندییه کی گرنه هیه، له نیوان لۆگاریتیم و شیوهی زانستی بۆ نووسینی ژمارهکان.

ا لۆگاریتیمی 2.5 بدۆزهوه

ب لۆگاریتیمی بارستایی کشتی تایتانیك بدۆزهوه، وهلامه که له گه ل وهلامی لقی ا بهراورد بکه.



ج **دهسته واژهیهك بنووسه** بارستایی شپریك $2.5 \times 10^2 \text{ kg}$

لۆگاریتیمی ئه ژمارهیه بدۆزهوه. وهلامه که له گه ل وهلامهکانی

دو لقی ا و ب به کاربهرینه، بۆ ئه وهی پوونیکه یتهوه، چۆن

لۆگاریتیمی ژمارهیه کی نووسراو به شیوهی زانستی ده دۆزییهوه.

د دهسته واژهیهك به کاربهرینه بۆ دۆزیه وهی لۆگاریتیمی بارستایی

پارچه پارهیه که دهگاته $2.5 \times 10^{-3} \text{ kg}$ ئایا دهسته واژه که بۆ

ئه ژمارانهی به شیوهی زانستی توان سالب نووسراون راسته؟

وایدانی $b > 0$ و $b \neq 1$. دیاریبکه، ئایا دهسته واژه هه ردهم

راسته، هه ندیک جار راسته، هه ردهم هه لهیه.

57 ده توانین لۆگاریتیم بنچینه b بگۆرین بۆ لۆگاریتیمیک بنچینه کهی ژمارهیه کی پیزهیی تر بیّت.

58 لۆگاریتیمی بنچینه، 6 بۆ هیژیک له هیژهکانی ژماره 6 دهکاته توانی ئه هیژه.

59 ئهگه لۆگاریتیمی ژماره 1 بۆ بنچینه b له ژمارهیه که ده بریکریت، ژماره که هه ر خوی ده مینیتتهوه.

60 ده شیت بنچینهی لۆگاریتیم ژمارهیه کی سالب بیّت.

61 لۆگاریتیمی دوو جای ژمارهیه که دهکاته دوو ئه وهندهی لۆگاریتیمی ئه ژمارهیه.

62 ده توانین لۆگاریتیمی بنچینه جیاواز کۆبکه ینهوه، بی ئه وهی پیویستمان به گۆرانی بنچینهکانیان هه بیّت.

63 ده توانین $\frac{\log_b 16}{\log_b 8}$ ساده بکهین.

64 لۆگاریتیمی لۆگاریتیمی ژمارهیه که دهکاته ژماره که خوی.

65 **هه له له شیکردنه وه** له خوارهوه دوو ریگای ساده کردنی $\log 80 + \log 20$ هاتوه. کامیان هه لهیه؟

$$\begin{aligned} \log 80 + \log 20 &= \log(80 + 20) \quad \text{ب} \\ &= \log 100 \\ &= \log(10^2) \\ &= 2 \log 10 \\ &= 2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \log 80 + \log 20 &= \log(80 \times 20) \quad \text{ا} \\ &= \log 1600 \\ &= \log(16 \times 10^2) \\ &= \log 16 + \log 10^2 \\ &= \log 16 + 2 \end{aligned}$$

ناماده کردن بۆ تاقیکردنه وه

66 کام لهم دوو یهکسانبونانه هه لهیه؟

$$\begin{aligned} \frac{\log 140}{\log 35} &= \log 4 \quad \text{ب} & \log 140 - \log 35 &= \log 4 \quad \text{ا} \\ \log \frac{140}{35} &= \log 4 \quad \text{د} & \log 35 + \log 4 &= \log 140 \quad \text{ج} \end{aligned}$$

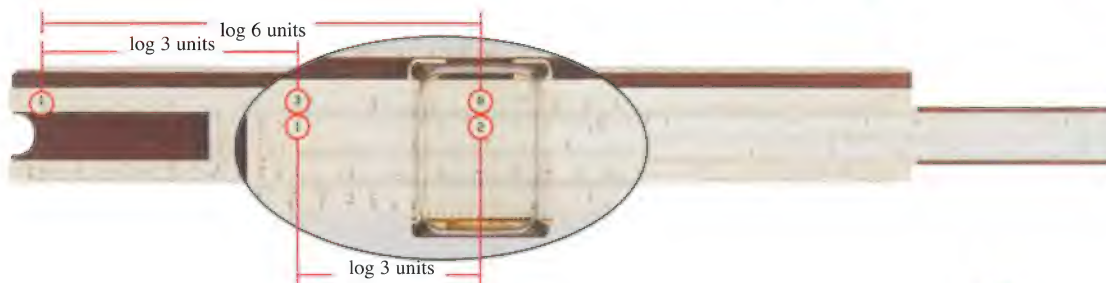
67 $\log_9 x^2 + \log_9 x$ به ساده‌ترین شیوه بنویس.

$\log_9(x^2 + x)$ (ا) $\log_9(3x)$ (ب) $3\log_9 x$ (ج) $3(x^2 + x)$ (د)

68 کام بری لוגاریتمی ده‌کاته $\log 6$ ؟

$\log 3 + \log 2$ (ا) $\log 3 + \log 3$ (ب) $\log 3 \times \log 2$ (ج) $\log 3 \times \log 3$ (د)

بهره‌نگاری و فراوانکردن



69 **میژوی بیرکاری** پیش دهرکه‌وتنی بژمیره‌کان، ئەندازیاره‌کان و خویندکارانی زانستی بۆ ماوه‌یه‌کی زۆر جوړه راسته‌یه‌کیان بۆ جیبه‌جی‌کردنی هه‌ژمارکردنه ئالۆزه‌کان به‌کاره‌ینا. ئەو راسته‌یه دوو هیللی ژماره‌یی به‌کارده‌هینن، هه‌ریه‌که‌یان له‌سه‌ر ئەوه‌ی تریان ده‌خسکیت، و پێوه‌ری هه‌ریه‌کیکیان لۆگاریتمه‌که پێگا به‌به‌کاره‌ینانی سیفه‌ته‌کانی لۆگاریتم ده‌دات، بۆ لیکدان و دابه‌شکردنی ژماره‌کان.

ا له وینه‌که‌ چۆن ئەنجامی لیکدانی 2 له 3 پرونده‌کاته‌وه؟

ب چۆن ئەو سیفه‌ته‌ لۆگاریتمی ئەنجامی لیکدان ده‌نوینن؟

بۆاری نه‌خشه‌که‌ بدۆزه‌وه

$f(x) = \log\left(\frac{x}{x^2-1}\right)$ 72 $f(x) = \log x - \log(x-1)$ 71 $f(x) = \log(x^2-4)$ 70

$f(x) = \sqrt{-2\log(-x)}$ 75 $f(x) = -\sqrt{\log(x+1)}$ 74 $f(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right)^2$ 73

$\log_9 3^{2x}$ ساده‌بکه 77 $\log_b a^p = p \log_b a$ بیسه‌لمینه 76

شیکاریکه

$0 = \log_x 1$ 80 $\log_x(-8) = 3$ 79 $\log_x 25 = 2$ 78

پیداچوونه‌وه‌ی لولییچی

شیکاریکه (قوناغه‌کانی پیشوو)

$8\left(n + \frac{3}{4}\right) = 10n - 4$ 83 $-20 + 8n = n + 29$ 82 $4(x+1) = 3(2x-6)$ 81

ژماره‌که به پێی i بنووسه (وانه‌ی)

$\sqrt{-125}$ 87 $4\sqrt{-8}$ 86 $-\frac{1}{2}\sqrt{-40}$ 85 $3\sqrt{-16}$ 84

هاوکیشنه توانییه‌که به‌شیوه‌ی لۆگاریتمی بنووسه (وانه‌ی 3-4)

$4^x = 256$ 91 $36^{0.5} = 6$ 90 $10^{-1} = 1$ 89 $5^3 = 125$ 88

به‌های بره‌که هه‌ژماریکه (وانه‌ی 3-4)

$\log_{625} 0.04$ 95 $\log_{16} 4$ 94 $\log_5 25$ 93 $\log_{12} 1$ 92

لوگاریتمی سروشتی

Natural Logarithm



کی نهمه بهکاردهیئیت؟

زانایان لوگاریتمی سروشتی و میژوو بهکاربۆن
بۆ دیاریکردنی تهمهنی پاشماوهی نازله
کۆنهکان بهکاردیئن (نمونهی 4).

ئامانجهکان

• ژماره e بهکاردیئ بۆ
نووسینی نهخشهی توانی که
چهند باریکی ژبانی پۆژانه
دهنوینیت

• وینهی پروونکردنهوهیی نهم
نهخشانه دهکیشیت.

• ئەو هاوکیشه و پرسیارانه
شیکار دهکات که ژماره e و
لوگاریتمی سروشتی
لهخودهرگن.

زاراوهکان
Vocabulary

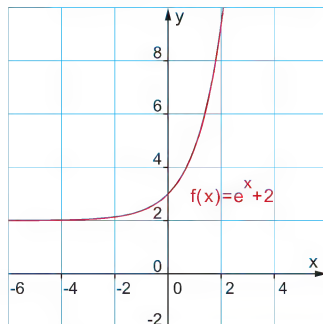
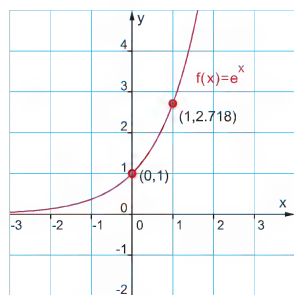
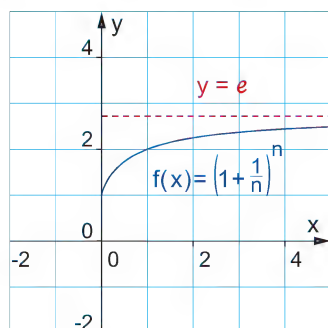
لوگاریتمی سروشتی
Natural logarithm

نهخشهی لوگاریتمی
سروشتی

Natural logarithm function

یارمهتی

پروونکردنهوهی نهخشه
 $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ یارمهتیت
دهدات بۆ ئەوهی ببینیت
بههایهکانی $N_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
بهربههه زیاتر له
ژماره e نزیك دهبیتهوه.



له ببرت بیئت یاسای سودی پیرهیی بریتییه له $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ کاتیك p هیمای گۆرمهی بنهپهتی و A
هیمای بره پارهی ئیستایه و r هیمای تیکرای سودی سالانهیه، و t هیمای ژمارهی سالهکانهوه بیئت و
 n هیمایه بۆ ژمارهی ئەو جارانهی که ئەو حسابهی تیدا له سالیکیدا پاشکوت دهکریت. وا دابنی تۆ
یهک دینارت له حسابهکته داناه، سودیک به تیکرای سالانهی 100% دهدریت ($r=1$)، و حسابهکه n
جار له سالیك پاشهکوت دهکریت. گۆرمهکه پاش سالیك دهبیته $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ، وادابنی ژماره
جارهکان n زیاد دهکات، تاوهکو زۆر گهوره دهپیت لهوکاتهدا دهتوانیت باسی پاشهکوتی بهردهوام بۆ
حسابهکته بکهیت، پروونکردنهوهیی نهخشهی $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
تاقیکهوه، ئەو نهخشهیه دهکهناری ناسویی ههیه، کاتیك بههای
نهخشهکه له $2.7182818\dots$ نزیکهدهبیتهوه له کاتهی $n \rightarrow +\infty$.
نزیکهدهبیتهوه. بیرکاری زانان به پیتی e هیمای دهکهن، که
ژمارهیهکی ناپیرهیه وهک ژماره π .
ئەو نهخشه توانیانهی که بنچینهکانیان e یه ههمان ئەو
سیفتهتانهی نهخشهیهکی توانی ههیه. و پروونکردنهوهی نهخشهی
 $f(x) = e^x$ به پروونکردنهوهی نهخشهی توانی تر دهچیت،
وهک $f(x) = 3^x$.

بوازی نهخشهی $f(x) = e^x$ بریتییه له R و مهوداکهی
بریتییه له $\{y/y > 0\}$

نهخشهی $f(x) = e^x$ پیدیهگوتریت: نهخشهی توانی سروشتی که
رۆلایکی گرنگ له میژووی بیرکاری دهنوینیت.

Natural exponential funcio

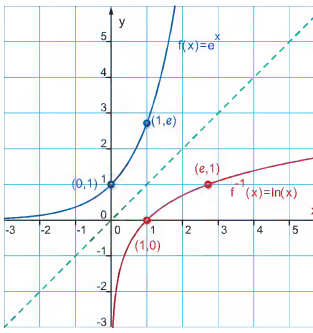
کیشانی وینهی پروونکردنهوهی نهخشه توانییه
سروشتییهکان.

وینهی پروونکردنهوهی نهخشهی $f(x) = e^x + 2$ بکیشه.
خشتهی بههایهکانی ئەو نهخشهیه دروستیکه، لهبهههوهی
ژماره e ژمارهیهکی پیرهیی نییه، پیویسته بههایهکانی
نهخشهکه نزیك بکهیتهوه بۆ دهیهک بۆ نمونه.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = e^x + 2$	2.0	2.1	2.4	3	4.7	9.4	22.1

1. وینهی پروونکردنهوهی نهخشهی $f(x) = e^x - 3$ بکیشه.





لوگاریتمى سروشتى Natural logarithm برىتييه له و لوگاريتمى
بنچينهكهى e بىټ. هىماى \ln بۆ لوگاريتمى سروشتى بهكارديټ
ئەو لوگاريتمە هەمان سىفەتەكانى لوگاريتمى ئاسايى (دهىي) و
لوگاريتمەكانى ترى هەيه.

Natural logarithm function سروشتى

نەخشەى لوگاريتمى سروشتى $f(x) = \ln x$ برىتييه له پىچەوانەى نەخشە بۆ نەخشەى توانى
سروشتى كه نەخشەيهكى لوگاريتميه به بنچينهى e
بوارەكهى كۆمەلەى ژمارە راستيه موجهەكانە و مەوداكەى برىتييه
له كۆمەلەى هەموو ژمارە راستيهكان، پرونكرندنەوهكەشى برىتييه له پرونكرندنەوهى بهرامبەر.

2 سادەکردنى برە توانيهكان و لوگاريتميه سروشتيهكان

برەكه به سادەترين شيوە بنووسە.

$$e^{5\ln x}$$

ج

$$e^{5\ln x} = e^{\ln x^5} = x^5$$

$$e^{\ln(x-1)}$$

ب

$$e^{\ln(x-1)} = x-1$$

$$\ln e^{-2t}$$

ا

$$\ln e^{-2t} = -2t$$

2. برەكه به سادەترين شيوە بنووسە

$$\ln e^{x+4y}$$

ج

$$e^{2\ln x}$$

ب

$$\ln e^{3.2}$$

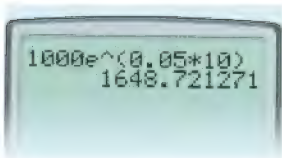
ا



بەگەرانهوه بۆ ياساى سودى ئاويټە، ياساىەكه دەبىټە $A = pe^{rt}$ كاتيک پاشەكهوتكرندنەكه بەردەوام دەبىټ.

3 جىبهجيكردن له ئابوريدا

يەك مليۆن دينار بۆ ماوهى 10 سال بە تىكرایى سودى سالانەى 5%
دانرا بۆ ئەوهى پاشەكهوتكردنى حسابەكه به شيوەيهكى بەردەوام
بىټ حسابەكه پاش ئەو 10 سالە دەبىټە چەند؟



ياسا

$$A = pe^{rt}$$

له جياتيدابنى

$$A = 1000\ 000\ e^{0.05 \times 10}$$

بژمىرهكاربهينه

$$A \approx 1\ 648\ 720$$

پاش 10 سال حسابەكه دەبىټە 1 648 720 دينار به نزيكهى.

تاييني

ئەگەر بژمىرت نەبى:
 $e^{0.5} \approx 1.648720$

3. 100 000 دينار دەبىټە چەند پاش 8 سال، ئەگەر زانیت ئەو گۆژمەيه له
حسابى پاشەكهوتى بەردەوامدا، به سودى تىكرایى سالانەى 3.5% دانرا؟



زانايان چەمكى نيوتەمەن بەكاردهيئن بۆ ليكۆلينيەوهى هەندىك مادده و به تاييهتى
تيشكدارەكان. نيوتەمەنى مادەى half-life برىتييه له و ماوهى مادەكه پيوستيهتى بۆ
شيوونەوهى نيوهى ئەو مادەيه يان گۆرانی بۆ شتيكى تر. نەخشەى خواروه بۆ كردارى
گەرانهوهى سروشتى بهكارديټ.

هيندەكه له سەرەتاي ماوهكهدا كاتيک $t = 0$

نەگۆپى گەرانهوه

$$N(t) = N_0 e^{-kt}$$

هيندەكه له كۆتايى ماوهى t دا

ماوهى گەرانهوه t

رايئنانى ئاراستەكراو

1 زاراۋەكان لۇگارىتمى سىرۇشتى ژمارە x بە شىۋە نەخشەكە بە پىتى x بنووسە ئەو نەخشەكە پى دەوترىت — (لۇگارىتمى سىرۇشتى، لۇگارىتمى دەپى).

1 پروانە غورونە

۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۹ ۲۰ ۲۱ ۲۲ ۲۳ ۲۴ ۲۵ ۲۶ ۲۷ ۲۸ ۲۹ ۳۰ ۳۱ ۳۲ ۳۳ ۳۴ ۳۵ ۳۶ ۳۷ ۳۸ ۳۹ ۴۰ ۴۱ ۴۲ ۴۳ ۴۴ ۴۵ ۴۶ ۴۷ ۴۸ ۴۹ ۵۰ ۵۱ ۵۲ ۵۳ ۵۴ ۵۵ ۵۶ ۵۷ ۵۸ ۵۹ ۶۰ ۶۱ ۶۲ ۶۳ ۶۴ ۶۵ ۶۶ ۶۷ ۶۸ ۶۹ ۷۰ ۷۱ ۷۲ ۷۳ ۷۴ ۷۵ ۷۶ ۷۷ ۷۸ ۷۹ ۸۰ ۸۱ ۸۲ ۸۳ ۸۴ ۸۵ ۸۶ ۸۷ ۸۸ ۸۹ ۹۰ ۹۱ ۹۲ ۹۳ ۹۴ ۹۵ ۹۶ ۹۷ ۹۸ ۹۹ ۱۰۰

۱ $f(x) = e^x - 4$ 2 $f(x) = -e^x$ 3 $f(x) = 4 - e^x$ 4 $f(x) = e^{1-x}$ 5

2 پروانە غورونە

۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۹ ۲۰ ۲۱ ۲۲ ۲۳ ۲۴ ۲۵ ۲۶ ۲۷ ۲۸ ۲۹ ۳۰ ۳۱ ۳۲ ۳۳ ۳۴ ۳۵ ۳۶ ۳۷ ۳۸ ۳۹ ۴۰ ۴۱ ۴۲ ۴۳ ۴۴ ۴۵ ۴۶ ۴۷ ۴۸ ۴۹ ۵۰ ۵۱ ۵۲ ۵۳ ۵۴ ۵۵ ۵۶ ۵۷ ۵۸ ۵۹ ۶۰ ۶۱ ۶۲ ۶۳ ۶۴ ۶۵ ۶۶ ۶۷ ۶۸ ۶۹ ۷۰ ۷۱ ۷۲ ۷۳ ۷۴ ۷۵ ۷۶ ۷۷ ۷۸ ۷۹ ۸۰ ۸۱ ۸۲ ۸۳ ۸۴ ۸۵ ۸۶ ۸۷ ۸۸ ۸۹ ۹۰ ۹۱ ۹۲ ۹۳ ۹۴ ۹۵ ۹۶ ۹۷ ۹۸ ۹۹ ۱۰۰

۱ $\ln e^1$ 2 $\ln e^{x-y}$ 3 $\ln e^{-\frac{x}{3}}$ 4 $e^{\ln 2x}$ 5 $e^{3\ln x}$ 6 7 8 9 10

3 پروانە غورونە

۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۹ ۲۰ ۲۱ ۲۲ ۲۳ ۲۴ ۲۵ ۲۶ ۲۷ ۲۸ ۲۹ ۳۰ ۳۱ ۳۲ ۳۳ ۳۴ ۳۵ ۳۶ ۳۷ ۳۸ ۳۹ ۴۰ ۴۱ ۴۲ ۴۳ ۴۴ ۴۵ ۴۶ ۴۷ ۴۸ ۴۹ ۵۰ ۵۱ ۵۲ ۵۳ ۵۴ ۵۵ ۵۶ ۵۷ ۵۸ ۵۹ ۶۰ ۶۱ ۶۲ ۶۳ ۶۴ ۶۵ ۶۶ ۶۷ ۶۸ ۶۹ ۷۰ ۷۱ ۷۲ ۷۳ ۷۴ ۷۵ ۷۶ ۷۷ ۷۸ ۷۹ ۸۰ ۸۱ ۸۲ ۸۳ ۸۴ ۸۵ ۸۶ ۸۷ ۸۸ ۸۹ ۹۰ ۹۱ ۹۲ ۹۳ ۹۴ ۹۵ ۹۶ ۹۷ ۹۸ ۹۹ ۱۰۰

۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۹ ۲۰ ۲۱ ۲۲ ۲۳ ۲۴ ۲۵ ۲۶ ۲۷ ۲۸ ۲۹ ۳۰ ۳۱ ۳۲ ۳۳ ۳۴ ۳۵ ۳۶ ۳۷ ۳۸ ۳۹ ۴۰ ۴۱ ۴۲ ۴۳ ۴۴ ۴۵ ۴۶ ۴۷ ۴۸ ۴۹ ۵۰ ۵۱ ۵۲ ۵۳ ۵۴ ۵۵ ۵۶ ۵۷ ۵۸ ۵۹ ۶۰ ۶۱ ۶۲ ۶۳ ۶۴ ۶۵ ۶۶ ۶۷ ۶۸ ۶۹ ۷۰ ۷۱ ۷۲ ۷۳ ۷۴ ۷۵ ۷۶ ۷۷ ۷۸ ۷۹ ۸۰ ۸۱ ۸۲ ۸۳ ۸۴ ۸۵ ۸۶ ۸۷ ۸۸ ۸۹ ۹۰ ۹۱ ۹۲ ۹۳ ۹۴ ۹۵ ۹۶ ۹۷ ۹۸ ۹۹ ۱۰۰

رايئنان و شىكارى پرسىارەكان

۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۹ ۲۰ ۲۱ ۲۲ ۲۳ ۲۴ ۲۵ ۲۶ ۲۷ ۲۸ ۲۹ ۳۰ ۳۱ ۳۲ ۳۳ ۳۴ ۳۵ ۳۶ ۳۷ ۳۸ ۳۹ ۴۰ ۴۱ ۴۲ ۴۳ ۴۴ ۴۵ ۴۶ ۴۷ ۴۸ ۴۹ ۵۰ ۵۱ ۵۲ ۵۳ ۵۴ ۵۵ ۵۶ ۵۷ ۵۸ ۵۹ ۶۰ ۶۱ ۶۲ ۶۳ ۶۴ ۶۵ ۶۶ ۶۷ ۶۸ ۶۹ ۷۰ ۷۱ ۷۲ ۷۳ ۷۴ ۷۵ ۷۶ ۷۷ ۷۸ ۷۹ ۸۰ ۸۱ ۸۲ ۸۳ ۸۴ ۸۵ ۸۶ ۸۷ ۸۸ ۸۹ ۹۰ ۹۱ ۹۲ ۹۳ ۹۴ ۹۵ ۹۶ ۹۷ ۹۸ ۹۹ ۱۰۰

۱۱ $f(x) = e^x + 1$ ۱۲ $f(x) = e^x - 1$ ۱۳ $f(x) = 1 - e^x$ ۱۴ $f(x) = 10 - e^x$ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۹ ۲۰ ۲۱ ۲۲ ۲۳ ۲۴ ۲۵ ۲۶ ۲۷ ۲۸ ۲۹ ۳۰ ۳۱ ۳۲ ۳۳ ۳۴ ۳۵ ۳۶ ۳۷ ۳۸ ۳۹ ۴۰ ۴۱ ۴۲ ۴۳ ۴۴ ۴۵ ۴۶ ۴۷ ۴۸ ۴۹ ۵۰ ۵۱ ۵۲ ۵۳ ۵۴ ۵۵ ۵۶ ۵۷ ۵۸ ۵۹ ۶۰ ۶۱ ۶۲ ۶۳ ۶۴ ۶۵ ۶۶ ۶۷ ۶۸ ۶۹ ۷۰ ۷۱ ۷۲ ۷۳ ۷۴ ۷۵ ۷۶ ۷۷ ۷۸ ۷۹ ۸۰ ۸۱ ۸۲ ۸۳ ۸۴ ۸۵ ۸۶ ۸۷ ۸۸ ۸۹ ۹۰ ۹۱ ۹۲ ۹۳ ۹۴ ۹۵ ۹۶ ۹۷ ۹۸ ۹۹ ۱۰۰

۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۹ ۲۰ ۲۱ ۲۲ ۲۳ ۲۴ ۲۵ ۲۶ ۲۷ ۲۸ ۲۹ ۳۰ ۳۱ ۳۲ ۳۳ ۳۴ ۳۵ ۳۶ ۳۷ ۳۸ ۳۹ ۴۰ ۴۱ ۴۲ ۴۳ ۴۴ ۴۵ ۴۶ ۴۷ ۴۸ ۴۹ ۵۰ ۵۱ ۵۲ ۵۳ ۵۴ ۵۵ ۵۶ ۵۷ ۵۸ ۵۹ ۶۰ ۶۱ ۶۲ ۶۳ ۶۴ ۶۵ ۶۶ ۶۷ ۶۸ ۶۹ ۷۰ ۷۱ ۷۲ ۷۳ ۷۴ ۷۵ ۷۶ ۷۷ ۷۸ ۷۹ ۸۰ ۸۱ ۸۲ ۸۳ ۸۴ ۸۵ ۸۶ ۸۷ ۸۸ ۸۹ ۹۰ ۹۱ ۹۲ ۹۳ ۹۴ ۹۵ ۹۶ ۹۷ ۹۸ ۹۹ ۱۰۰

۱۱ $\ln e^0$ ۱۲ $\ln e^{2x}$ ۱۳ $e^{\ln(x+2)}$ ۱۴ $e^{4\ln x}$ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۹ ۲۰ ۲۱ ۲۲ ۲۳ ۲۴ ۲۵ ۲۶ ۲۷ ۲۸ ۲۹ ۳۰ ۳۱ ۳۲ ۳۳ ۳۴ ۳۵ ۳۶ ۳۷ ۳۸ ۳۹ ۴۰ ۴۱ ۴۲ ۴۳ ۴۴ ۴۵ ۴۶ ۴۷ ۴۸ ۴۹ ۵۰ ۵۱ ۵۲ ۵۳ ۵۴ ۵۵ ۵۶ ۵۷ ۵۸ ۵۹ ۶۰ ۶۱ ۶۲ ۶۳ ۶۴ ۶۵ ۶۶ ۶۷ ۶۸ ۶۹ ۷۰ ۷۱ ۷۲ ۷۳ ۷۴ ۷۵ ۷۶ ۷۷ ۷۸ ۷۹ ۸۰ ۸۱ ۸۲ ۸۳ ۸۴ ۸۵ ۸۶ ۸۷ ۸۸ ۸۹ ۹۰ ۹۱ ۹۲ ۹۳ ۹۴ ۹۵ ۹۶ ۹۷ ۹۸ ۹۹ ۱۰۰

رايئنانى تازاد	
سەبىرى	بۇشكارىردى
رايئنانەكان	نەۋونە بگە
1	16-13
2	20-17
3	21
4	22

۲۱ ۲۲ ۲۳ ۲۴ ۲۵ ۲۶ ۲۷ ۲۸ ۲۹ ۳۰ ۳۱ ۳۲ ۳۳ ۳۴ ۳۵ ۳۶ ۳۷ ۳۸ ۳۹ ۴۰ ۴۱ ۴۲ ۴۳ ۴۴ ۴۵ ۴۶ ۴۷ ۴۸ ۴۹ ۵۰ ۵۱ ۵۲ ۵۳ ۵۴ ۵۵ ۵۶ ۵۷ ۵۸ ۵۹ ۶۰ ۶۱ ۶۲ ۶۳ ۶۴ ۶۵ ۶۶ ۶۷ ۶۸ ۶۹ ۷۰ ۷۱ ۷۲ ۷۳ ۷۴ ۷۵ ۷۶ ۷۷ ۷۸ ۷۹ ۸۰ ۸۱ ۸۲ ۸۳ ۸۴ ۸۵ ۸۶ ۸۷ ۸۸ ۸۹ ۹۰ ۹۱ ۹۲ ۹۳ ۹۴ ۹۵ ۹۶ ۹۷ ۹۸ ۹۹ ۱۰۰

۲۲ ۲۳ ۲۴ ۲۵ ۲۶ ۲۷ ۲۸ ۲۹ ۳۰ ۳۱ ۳۲ ۳۳ ۳۴ ۳۵ ۳۶ ۳۷ ۳۸ ۳۹ ۴۰ ۴۱ ۴۲ ۴۳ ۴۴ ۴۵ ۴۶ ۴۷ ۴۸ ۴۹ ۵۰ ۵۱ ۵۲ ۵۳ ۵۴ ۵۵ ۵۶ ۵۷ ۵۸ ۵۹ ۶۰ ۶۱ ۶۲ ۶۳ ۶۴ ۶۵ ۶۶ ۶۷ ۶۸ ۶۹ ۷۰ ۷۱ ۷۲ ۷۳ ۷۴ ۷۵ ۷۶ ۷۷ ۷۸ ۷۹ ۸۰ ۸۱ ۸۲ ۸۳ ۸۴ ۸۵ ۸۶ ۸۷ ۸۸ ۸۹ ۹۰ ۹۱ ۹۲ ۹۳ ۹۴ ۹۵ ۹۶ ۹۷ ۹۸ ۹۹ ۱۰۰

۲۳ ۲۴ ۲۵ ۲۶ ۲۷ ۲۸ ۲۹ ۳۰ ۳۱ ۳۲ ۳۳ ۳۴ ۳۵ ۳۶ ۳۷ ۳۸ ۳۹ ۴۰ ۴۱ ۴۲ ۴۳ ۴۴ ۴۵ ۴۶ ۴۷ ۴۸ ۴۹ ۵۰ ۵۱ ۵۲ ۵۳ ۵۴ ۵۵ ۵۶ ۵۷ ۵۸ ۵۹ ۶۰ ۶۱ ۶۲ ۶۳ ۶۴ ۶۵ ۶۶ ۶۷ ۶۸ ۶۹ ۷۰ ۷۱ ۷۲ ۷۳ ۷۴ ۷۵ ۷۶ ۷۷ ۷۸ ۷۹ ۸۰ ۸۱ ۸۲ ۸۳ ۸۴ ۸۵ ۸۶ ۸۷ ۸۸ ۸۹ ۹۰ ۹۱ ۹۲ ۹۳ ۹۴ ۹۵ ۹۶ ۹۷ ۹۸ ۹۹ ۱۰۰

۱ چۆن ئەو دوو ژمارە دەستكەوتو بەيەكتەر دەبەستىر؟

۲ رېساي گۆرىنى بىچىنە بۇ پالېشتى ۋەلامەكەت بەكاربېھنە.

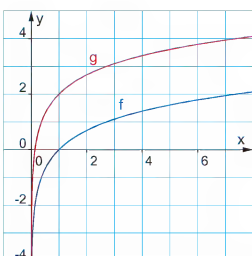
۲۴ $\ln x = \ln 10 \times \log x$.

25 فرەھەنگاۋ لە ياسای تیوتن بۆ ساردکردنەوێ داھاتوو: پلەى گەرمى شلەيەك كەمدەكات بە پيى نەخشەى توانى $T = T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt}$ ، كاتێك T_0 ھيماى پلەى گەرمى بنەرەتى بێت، و T_s ھيماى پلەى گەرمى دەورووبەرى شتەكەيە و k ھيماى ژمارەيەكى نەگۆرە و t ھيماى كاتە. كاتێك كات بە خولەك دەپۆرێت $k = 0.283$ ، قاوەخانەيەك پلەى گەرمى تێیدا 21 پلەى سەدى بێت، قاوەيەك پيشكەش ميوانانى دەكات پلەى گەرميەكەى 96 پلەى سەدى بێت. ئارەزوو مەندانى قاوە ئامۆژگاريمان دەكات كە قاوە لە 60 پلەى سەدى بەنزيكەيى بخورێتەو.

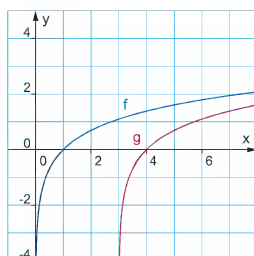
- ا** ميوانەكە پيوستە چەند خولەك چاوەرێ بكات پيش خواردنەوێ قاوەكەى؟
ب وەلامەكەى پيشوو دەبێتە چەند؟ ئەگەر پلەى گەرمى قاوەخانەكە بپێتە 30 پلەى سەدى؟
ج پوونکردنەوێ نەخشەى ساردکردنەوێ بكيشە، لە دوو بارى پيشوودا، بەپوونکردنەوێ ژمارەى خولەكەكان بدۆزەو بۆ ئەوێ پلەى گەرمى قاوەكە يەكسان بێت بە پلەى گەرمى قاوەخانەكە.

26 وێنەى پوونکردنەوێ ئەم دوو نەخشە $y = \frac{\ln x}{\ln 6}$ و $y = \frac{\log x}{\log 6}$ بكيشە بەراوردی نيوان دوو پوونکردنەوێكە بکە و بەراوردی نيوان ھەريەکیان لەگەڵ پوونکردنەوێ نەخشەى $y = \log_6 x$ بکە.

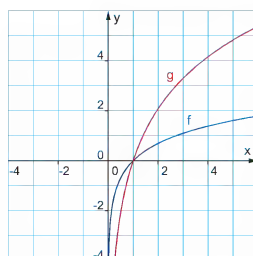
نەخشە پەيدا بووەكان لە گۆرینی نەخشەى $f(x) = \ln x$ بەيەكێك لەم پوونکردنەوێ دیت ببەستەو.



ج



ب



ا

29 $g(x) = \ln x + 2$

28 $g(x) = 3 \ln x$

27 $g(x) = \ln(x - 3)$

30 ژینگە يەكێك لەو پێكخاوانەى گرنكى بە ژینگە دەدات لە كەنەدا، ژمارەى ئازەلەكانى (پنە) كە لە دۆلى پووبارى جۆرج دەژين خەمڵاندنى، كە گەيشتە 4 700 سەر لە ساڵى 1954 دا. ئەو ژمارەيە بە توان زيادكرا تا گەيشتە 472 000 سەر لە ساڵى 1984 .

ا نەخشەى توانى $N(t) = N_0 e^{kt}$ بەكاربھيەنە. كاتێك N_0 ھيماى ژمارەى بنەرەتى ئازەلەكانە و t ھيماى كاتە و $N(t)$ ھيماى ژمارەى ئازەلەكانە دواى t سال و k رێژەى زيادبوونی سالانە بێت، بەھای k بدۆزەو

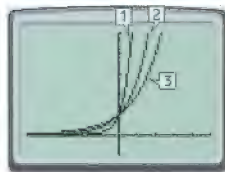
ب چى دەبێت ئەگەر...؟ ئازەلەكان زياديان كرد بەھەمان شێو، لە ساڵى 2012 ژمارەكەى دەگاتە چەند؟

31 تەننەو كارمەندانى تەندروستى گشتى نەخشەى $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ بەكاردەھيێن بۆ پياوێ مەوداى بڵاوبوونەوێ پەتايەك لە كۆمەلگا.

- ا** پوونکردنەوێ ئەم نەخشە بكيشە.
ب ئەو نەخشە چەند دەرەنارى ھەيە.
ج لە ژيانى پۆژانە دا ئەونەخشە چى دەگەيەنێت لە بارەكانى بڵاو بوونەوێ پەتا.



32 بیرکردنه‌وهی ره‌خنه‌گرانه له شیوهی بهرام‌بهر پوونکردنه‌وهی نه‌خشه‌ی $f(x) = 2^x$ و $g(x) = 10^x$ و $h(x) = e^x$ دهرده‌که‌وێت.



ا پوونکردنه‌وهی ههریه‌ک له‌م نه‌خشانه جیا‌بکه‌وه.

ب پۆتانی خالی هاوبه‌شی له نیوان سی پوونکردنه‌وه‌دا دیاربکه.

ج چی وا له‌و خاله ده‌کات له نیوان ئه‌و سی پوونکردنه‌وه‌یه‌دا هاوبه‌ش بێت؟

33 بنووسه به‌راوردی نیوان پاشه‌که‌وتی حسابی بانکێک به‌ شیوه‌ی به‌رده‌وام و پاشه‌که‌وتی پۆژانه بکه. حساب‌که‌ چه‌ند قازانج ده‌کات ئه‌گهر پاشه‌که‌وته‌که به‌رده‌وام بێت، له جیاتی ئه‌وه‌ی پۆژانه بێت. له‌گه‌ڵ وه‌لامه‌که‌ت نمونه‌یه‌ک به‌یینه‌وه.

34 ژماره‌ی کیلگه‌کانی ولاتێک گه‌یشه 33 500 کیلگه له ساڵی 1990 و له‌ساڵی 2000 گه‌یشه 30 800 کیلگه.

ا به‌های k له نه‌خشه‌ی $N(t) = N_0 e^{kt}$ بدۆزهره‌وه، بۆ ئه‌وه‌ی سامپلیکت (نمونه‌یه‌ک)

بۆکه‌مبونه‌وه‌ی ژماره‌ی کیلگه‌کان ده‌ستکه‌وێت.

ب سامپله‌که به‌کاربه‌یینه بۆ خه‌ملاندنی ژماره‌ی کیلگه‌کان له‌ساڵی 2010.

ج تیکرای پووبه‌ری کیلگه‌کان له‌ماوه‌ی 1990 - 2000 له 1209 بۆ 1279 دۆنم زیادی کرد نه‌خشه‌-

یه‌کی توانی بدۆزهره‌وه که ریگا ده‌دات به‌ خه‌ملاندنی تیکرای پووبه‌ری کیلگه‌کان له‌ساڵی 2010.

ناماده‌کردن بۆ تاقیکردنه‌وه



35 کام کۆمه‌له‌ بێ ری‌کخراوان له‌ بچوکه‌وه بۆ گه‌وره‌؟

ا $\ln 1, \log 10, \ln 10, \log e$

ج $\ln 1, \ln 10, \log e, \ln 1$

ب $\ln 10, \log 10, \log e, \ln 1$

د $\log e, \ln 10, \log 10, \ln 1$

36 کام بێ یه‌کسان نییه به‌ x کاتی‌ک $x \neq 0$ ؟

ا $e^{\ln x}$

ج $x \ln e$

د $x + \ln e$

ب $\ln e^x$

37 کام بێ یه‌کسانه به‌ $\log 50$ ؟

ا $\ln 50 \div \ln 10$

ج $\ln 50 + \ln 10$

ب $\ln(50 \div 10)$

د $(\ln 50) \times (\ln 10)$

38 **کورته وه‌لام** برێک بنووسه یه‌کسان بێت $-\ln x$ به‌ بێ به‌کاره‌یانی نیشانه‌ی سالب.

به‌ره‌نگاری و فراوانکردن

39 چه‌ندجار له‌ سالی‌کدا پۆیسته بۆ دانانی حسابی بانکێک به‌ تیکرای سوودی سالانه 8% بۆ ئه‌وه‌ی نرخه‌که‌ی 99.9% ی نرخه‌که‌ی بێت ئه‌گهر دانانه‌که به‌رده‌وام بێت؟ ئایا گۆران له‌ تیکرای سووده‌که وه‌لامه‌که ده‌گۆرێت؟ ئه‌مه‌ پوونبکه‌وه.

40 وێنه‌ی پوونکردنه‌وه‌یی نه‌خشه‌ی $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ باسی ئه‌و پوونکردنه‌وه‌یه بکه بوار و مه‌ودای نه‌خشه‌که دیاریبکه.

41 وه‌لامی ئه‌م پرسارانه‌ی دێت بده‌وه که په‌یوه‌ندی به‌ پوونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌ی $f(x) = \ln x$ هه‌یه:

ا کام نه‌خشه پوونکردنه‌وه‌ییانه دهنوینریت، به‌ وێنه‌دانه‌وه‌ی نه‌خشه‌ی $f(x)$ به‌ده‌وری ته‌وه‌ره‌ی دوهم.

ب کام نه‌خشه پوونکردنه‌وه‌ییانه دهنوینریت، به‌ وێنه‌دانه‌وه‌ی نه‌خشه‌ی $f(x)$ به‌ده‌وری ته‌وه‌ره‌ی یه‌که‌م.

ج کام نه‌خشه پوونکردنه‌وه‌ییانه دهنوینریت، به‌ وێنه‌دانه‌وه‌ی نه‌خشه‌ی $f(x)$ به‌ده‌وری هه‌ردوو

ته‌وه‌ره‌که به‌دوای یه‌ک.

د پوونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌ی $f(x)$ و هه‌رسی وێنه‌دانه‌وه‌که‌ی له‌هه‌مان پووته‌ختی پۆتانه‌کان

بکێشه. ئه‌و ده‌رکه‌نارانه دیاریبکه له‌ هه‌ر چوار پوونکردنه‌وه‌که هاوبه‌شن.

پیداچوونہوہی لولپیچی



42 **بۇ خۆشى** لەم ڤوونكردنەوہى بەرامبەردا نرخى چوونە ژوورەوہى باخجەى ئاژەلەن بە پيى تەمەنى سەردانكەر دەنوینت. وینەیهكى ڤوونكردنەوہى بکیشە بۇ نواندى ھەر بارىك لەمانەى خوارەوہ. ئەو جیگۆڤكىیە دیاریبکە، كە ڤیگە بە دەستكەوتنى بە پيى ڤوونكردنەوہى بەرامبەر دەدات (پۆلەكانى پيشو).

ا پيش كاترمير 5:00 ى پاش نيوەرۆ نرخەكان بۇ نيوە كەم دەكرينەوہ.

ب بۇ ھەر چەشنە تەمەنىك بەرزترين ڤادە بۇ 3 سال كەمكرايەوہ.

ج ھەموو نرخەكان دوو ئەوئەندەكران.

نەخشەى پەيداۋو لە جیگۆڤكىى نەخشەى $f(x) = -2x^2 + 3x - 4$ بنووسە بۇ ھەر يەكە لەم جیگۆڤكىئانەى خوارەوہ. (پۆلەكانى پيشو).

43 ڤاكيئشانى 5 يەكە بۇ سەرەوہ. **44** ڤاكيئشانى دوو يەكە بۇ لای چەپ.

45 وینەدانەوہ بەدەورى تەوہرى يەكەم. **46** كشانى ئاسۆيى ھاوگۆلكەى 2 بېت.

ئەم ېرانه بەبەكارھيئانى يەك لوگارىتم بنووسە وەلامەكەت بە سادەترين شيۆە دەريبەرە.

$\log_3 243 - \log_3 2187$ **49** $\log_4 64 - \log_4 1$ **48** $\log_2 8 + \log_2 \frac{1}{2}$ **47**

$\log x^2 + \log x$ **52** $\log_8 8 + \log_8 \frac{1}{8}$ **51** $\log_5 25 + \log_5 125$ **50**

هاوكيشه و لاسهنگه توانيهكان و لوگارىتميهكان

Exponential and Logarithmic Equations and Inequalities

ئامانجهكان

- هاوكيشه و لاسهنگه
توانيهكان و لوگارىتميهكان
شىكار دىكات.
- ئەو پرسايارانە شىكار دەكات
كە هاوكيشه و لاسهنگه
توانيهكان و لوگارىتميهكان
لە خۆدەگرێت .

زاراوهكان Vocabulary

- هاوكيشه توانيهكان
Exponential Equation
- هاوكيشه لوگارىتمى
Logarithmic Equation

كى ئەمە بەكار دەهێنێت؟

پۆره توانيهكان بەكار دێت، بۆ پۆوانى پووناكى
لە كردارەكانى وێنەگرتن (پرايىنانى 40).

هاوكيشه توانى **Exponential Equation** هاوكيشهكه برێك يان زياترى تىدايه و
نەزانراوىكى توانى تىدايه. بۆ ئەوهى هاوكيشهكه توانى شىكار بكەیت:

- هەولبە بە شۆهيهك بىنوسىتهوهكه هەموو هێزەكان هەمان بنچينهيان هەيێت.

$$\text{ئەگەر } b^x = b^y \text{ ئەوا } x = y \text{ (} b \neq 1, b \neq 0 \text{)}$$

- لوگارىتمى هەردوو لای هاوكيشهكه بەكار بهێنە.

$$\text{ئەگەر } a = b \text{ ئەوا } \log a = \log b \text{ (} a > 0, b > 0 \text{)}$$

شىكارکردنى هاوكيشه توانيهكان

شىكار بکە و پاسادانبکە

$$8^x = 2^{x+6} \quad \text{أ}$$

$$2^{3x} = 2^{x+6} \quad \text{بنوسه وهك هێزى بۆ ئەوهى هەمان بنچينهت}$$

$$3x = x + 6 \quad \text{دەستكهوێت بۆ ژمارکردنى هێزى هیز، دوو تۆنهكه له}$$

$$x = 3 \quad \text{یهكتر بده له بهر ئەوهى بنچينهكان وهك یهكن، دوو}$$

تۆنهكه یهكسان.

پاسادانبکە

2^{x+6}	8^x
2^{3+6}	8^3
2^9	8^3
512	512 ✓

شىكارهكه $x = 3$

$$5^{x-2} = 200 \quad \text{ب}$$

لەبەر ئەوهى 200 هێز نیه له هێزهكانى 5، لوگارىتمى

هەردوو لا وەرگیره.

سیفهتى لوگارىتمى هێز بەكار بهێنە هەردوو لا بەسەر

$\log 5$ دابەشکە

$$x - 2 = \frac{\log 200}{\log 5}$$

$$x = 2 + \frac{\log 200}{\log 5} \approx 5.292$$

پاسەدانیکە بژمێر بەکار بهێنە.

شىكار بریتییه له $x \approx 5.292$

پۆستایى

كاتێك وهلامێكى نزیكراوه له
كردارى پاسادانکردن
بەكار دههێنێت، وهلامى تهواوت
بۆ دەرناچێت بەلكو ئەنجامیكى
گونجاولت بۆ دەردهچێت.

1. شىكاریکه و پاسەدانیکه

$$2^{3x} = 15 \quad \text{ج}$$

$$7^{-x} = 21 \quad \text{ب}$$

$$3^{2x} = 27 \quad \text{أ}$$

خالى
چاودێرى

دەتوانیت لہ نیوان دەستکەوتنی ئۆتۆمبیلێک نرخەکەمی 20 ملیۆن دینار یان دەستکەوتنی یەک دینار لہ پۆژی یەکەم و دوو ئەوەندەمی دەستکەوتوو لہ پۆژی دواتر و ھەر وھا * یەکیکیان ھەلبژێریت، ئەگەر دوو دەستکەوتن ھەلبژارد، لہ چ پۆژیک گۆژمەییەکی زیاتر لہ نرخێ ئۆتۆمبیلەکە دەستدەکەوێت؟

لہ پۆژی یەکەم یەک دینار 2^0 ت دەستدەکەوێت و لہ پۆژی دوو دەم 2^1 دینار و ھەر وھا ئەوا 2^{n-1} دینار لہ پۆژی n دەستدەکەوێت. بۆ دەستکەوتنی وەلام لاسەنگەکە شیکار بکە.

$$2^{n-1} > 20\,000\,000$$

$$20 \text{ ملیۆن بە شێوەی زانستی بنووسە } 2^{n-1} > 2 \times 10^7$$

$$\log(2^{n-1}) > \log(2 \times 10^7) \quad \text{لۆگاریتمی ھەردوو لا وەرگیرە}$$

$$(n-1)\log 2 > \log 2 + \log 10^7 \quad \text{سێفەتی ھێز و سێفەتی ئەنجامی لێکدان بە کاربھێنە.}$$

$$\log 10^7 = 7 \quad (n-1)\log 2 > \log 2 + 7$$

$$\text{ھەردوو لا دابەشی } \log 2 \text{ بکە}$$

$$\text{بژمێر بە کاربھێنە}$$

$$\text{وەلامەکەت نزیکیکەو و بۆ نزیکترین ژمارەیی تەواوی لہ لای}$$

$$\text{سەرھەو}$$

$$n-1 > \frac{\log 2 + 7}{\log 2}$$

$$n > \frac{\log 2 + 7}{\log 2} + 1$$

$$n > 25.26$$

لہ پۆژی بیست و شەشەمەو، ئەو دەستکەوێت زیاتر لہ نرخێ ئۆتۆمبیلەکە. ساغیکەو، لہبەر ئەو $2^{26-1} = 2^{25} = 33\,554\,432$ لہ پۆژی بیست و شەشەمەو 33 55 44 32 دینار دەستدەکەوێت، ئەو دەستکەوێت زیاتر لہ نرخێ ئۆتۆمبیلەکە.

تایبینی

ئاساییە خویندکار
بەروردی نیوان کۆی
ئەو دەستدەکەوێت
لەگەڵ نرخ
ئۆتۆمبیلەکە بکات واتە
ئەمە شیکار بکات.

$$2^0 + 2^1 + 2^2 \dots +$$

$$2^{n+1} > 20 \times 10^6$$

$$\Rightarrow n = 24$$

تایبینی

ئەگەر بژمێرت پێ نەبی:

$$\log 2 \approx 0.30$$

$$\log 3 \approx 0.47$$

$$\log 5 \approx 0.69$$

2. لہ نمونەیی 2 وا دابینی ئەو گۆژمەیی ھەر پۆژیک وەریدەگریت 3 ئەوەندەمی ئەو گۆژمەیی لہ پۆژی پیشتەر وەریدەگریت لہ جیاتیی دوو ئەوەندە. لہ کام پۆژ ئەو وەریدەگریت لہ ملیار دینار زیاتر؟



ھاوکیشەیی لۆگاریتمی **Logarithmic Equation** ھاوکیشەییەکی بڕیکی لۆگاریتمی یان زیاتری تێدایە و نەزانراویک لەخۆ دەگریت، دەتوانیت ھاوکیشە لۆگاریتمیەکان بەبەکارھێنانی سێفەتی لۆگاریتمی شیکار بکەیت.

شیکارکردنی ھاوکیشەیی لۆگاریتمی

شیکاریکە

$$\log_3(x-5) = 2 \quad \text{أ}$$

$$3^{\log_3(x-5)} = 3^2$$

$$x-5 = 9$$

$$x = 14$$

$$\log 45x - \log 3 = 1 \quad \text{ب}$$

$$\log\left(\frac{45x}{3}\right) = 1$$

$$\log(15x) = 1$$

$$10^{\log(15x)} = 10^1$$

$$15x = 10$$

$$x = \frac{2}{3}$$

3 بەکاربھێنە وەک بنچینەییەکی ھاوبەش بۆ ھەردوو لا.

پێچەوانەبوونەو لہ نیوان ھێز و لۆگاریتم بەکاربھێنە

سادەبکە.

سێفەتی لۆگاریتمی ئەنجامی دابەشکردن بەکاربھێنە

دابەشیکە.

10 وەک بنچینەییەکی ھاوبەشی ھەردوو لا بەکاربھێنە

پێچەوانەبوونەو لہ نیوان ھێز و لۆگاریتم بەکاربھێنە

سادەبکە.

3 نمونە

لە بیرت بیئت

پیداچوونەو سێفەتەکانی
لۆگاریتم بکە لەوانەیی 4-4 دا

$$\log_4 x^2 = 7$$

ج

$$2 \log_4 x = 7$$

$$\log_4 x = \frac{7}{2}$$

$$x = 4^{\frac{7}{2}}$$

$$x = (2^2)^{\frac{7}{2}}$$

$$x = 2^7 = 128$$

$$\log x + \log(x+9) = 1$$

د

$$\log x(x+9) = 1$$

$$10^{\log x(x+9)} = 10^1$$

$$x(x+9) = 10$$

$$x^2 + 9x - 10 = 0$$

$$(x-1)(x+10) = 0$$

$$x-1=0 \text{ يان } x+10=0$$

$$x=1 \text{ يان } x=-10$$

سيفه تي لۇگارىتمى ھىزى
ھەردوولا دابەشى 2 بکە.

پىناسەى لۇگارىتم

$$4 = 2^2$$

سادەبکە .

سيفه تي ئەنجامى لىكدانى لۇگارىتم بەكاربھيئە

10 وەك بنچىنەى ھاوبەش بۇ ھەردوولا بەكاربھيئە

پىچە وانە بوونە وە لە نىوان ھىز و لۇگارىتم بەكاربھيئە .

پادەكان لە يەكترىدە و كۆيانبکە وە.

شیتەلکە

سيفه تي لىكدانى سفرى بەكاربھيئە

شیکار

$$\begin{array}{r|l} \log x + \log(x+9) & 1 \\ \hline \log(-10) + \log(-10+9) & 1 \end{array} \quad \times$$

↑
log(-10) پىناسە نەكراوہ

$$\begin{array}{r|l} \log x + \log(x+9) & 1 \\ \hline \log 1 + \log(1+9) & 1 \\ \log 1 + \log 10 & 1 \\ 0 + 1 & 1 \\ 0 + 1 & 1 \end{array} \quad \checkmark$$

كەواتە شیکارەكە برىتييە لە $x = 1$

ئاگادارىه!

ھەموو كات شیکارەكان
ساغبکە وە چونكە لەوانەيە
شیکارى نامۇ بىتە ناو
شیکارەكان.

3. شیکارىكە

خالى



چاودىرى

$$2 \log x - \log 4 = 0 \quad \text{ب}$$

$$3 = \log 8 + 3 \log x \quad \text{ا}$$

بەكارھيئەت خستەكان و جەبر بۇ شیکارکردنى ھاوکیئشە و لاسەنگە
توانییه كان و لۇگارىتمییه كان.

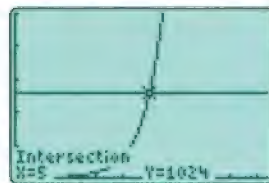
بۇ شیکارکردن خستەيەك يان جەبر بەكاربھيئە.

$$2^{2x} = 1024 \quad \text{ا}$$

بژمىرى پوونکردنە وەيى بەكاربھيئە $2^x (2X)$ لە پىش $Y1$ و 1024 پىش $Y2$ بنووسە.

X	Y1	Y2
1	4	1024
2	16	1024
3	64	1024
4	256	1024
5	1024	1024
6	4096	1024
7	16384	1024

X=5



لە خستەكەدا لە بەھای x بگەرپ كە
وادەكات $Y1 = Y2$

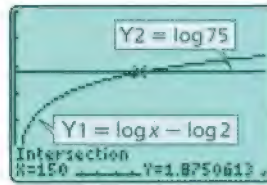
لە وىئە پوونکردنە وەيىكە بۇ پۆتوانى
يەكەمى خالى يەكترىپىنى دوو
پوونکردنە وەيىكە بگەرپ.

شیکار برىتييە $x = 5$

ب $\log x - \log 2 \leq \log 75$

بژمیره به کار بهیښه $\log x - \log 2$ له پيش Y1 و $\log 75$ له پيش Y2 بنوسه.

X	Y1	Y2
120	1.7782	1.8751
130	1.8139	1.8751
140	1.8451	1.8751
150	1.8751	1.8751
160	1.9021	1.8751
170	1.9294	1.8751
180	1.9542	1.8751



له خشته کېدا بۆ بهایه کانی x بگهړئ
که واده کهن. $Y1 \leq Y2$

له وینه ی پروونکردنه ویی به دوا ی پوتانی
یه که می خالی یه کتر پینی دوو
پروونکردنه ویی که بگهړئ.

کوښه له شیکار بریتیه له $\{x/x \leq 150\}$
ساغیکه وه: جهر به کار بهیښه.

$$\log x - \log 2 \leq \log 75$$

$$\log \frac{x}{2} \leq \log 75$$

$$10^{\log \frac{x}{2}} \leq 10^{\log 75}$$

$$\frac{x}{2} \leq 75$$

$$x \leq 150 \quad \checkmark$$

سیفه تی نه جامی دابه شکردنی لوگاریتم به کار بهیښه
10 وډک بنچینه یه کی هاویه شی بۆ هردو ولا
به کار بهیښه.

پنجه وانه بوونه وه له نیوان هیژ و لوگاریتم به کار بهیښه،
ساده بکه.

4. خشته یه ک یان جهر به کار بهیښه بۆ شیکار کردنی:

$\log x^2 = 6$ **ج**

$2^x > 4^{x-1}$ **ب**

$2^x = 4^{x-1}$ **ا**



بیریکه وه و تاوتوییکه

1. بۆچی دهر نه جامی نه وه ده که یت، نه گهر $\log a = \log b$ نه و $a = b$ کاتی که $a > 0$ و $b > 0$ ؟
2. تنه ها ههنگاوی یه که م بۆ شیکار کردنی نه مانه ی دین دیار بکه.

$\log 2x + \log 2 = 1$ **ب**

$\log x^5 = 10$ **ا**

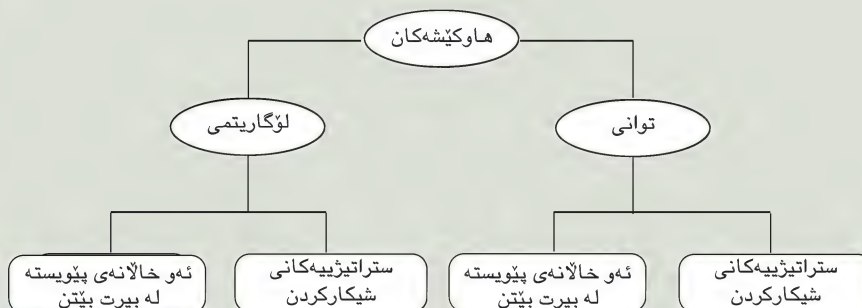
$\log(x + 1000) = 2$ **د**

$x^4 = 100$ **ج**

$\log_6(x + 6) = 3$ **و**

$\log(x + 4) + \log x = 2$ **ه**

3. پروونیکه وه چۆن ده توانریت هاوکیشه یه کی لوگاریتمی شیکاریکی سالبی هه بیئت. به لگه بۆ وه لامه که ت بهیښه وه و نه گهر ده کترت نمونه یه که بهیښه وه.
4. پیکه زبه نه م هیلکارییه ی خواره وه دروست بکه و ته واییکه. به شیوازی خوت نه و ستراتیژانه و خالانه بنوسه که پیویسته له بیرت بیئت که تایبه تن به هاوکیشه ی توانی و لوگاریتمی.



راھینانی ئاراستەکراو

1 **زاراوەکان** دەتوانیت شیکاری هاوکێشەیی ————— بکەیت، بەوەرگرتنی لۆگاریتم بۆ ھەردوولا (توانی یان لۆگاریتمی)

شیکاریکە و پاسادانبکە.

1 **بروانە غوونە**

$$\begin{array}{lll} 2^x = 4^{x+1} & 4 & 9^x = 3^{x-2} & 3 \\ 4^{2x} = 32^{\frac{1}{2}} & 2 & 4^x = 10 & 5 \\ 2.4^{3x+1} = 9 & 7 & \left(\frac{1}{4}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x & 6 \end{array}$$

2 **بروانە غوونە**

8 **دانیشتوان** ژمارەیی دانیشتوانی لادییەك 3400 كەسە، و بەرپرزی 3% سالانە زیادەكەت. دەتوانیت پشت بەنەخشەیی $P = 3400(1 + 0.03)^t$ بەستەت بۆ نواندنی ژمارەیی دانیشتوان بە پێی كات t كاتێك p ھێمای ژمارەیی دانیشتوان پاش t سال بێت دواي چەند سال ژمارەیی دانیشتوان لە 100 000 كەس تێدەپەرێت.

3 **بروانە غوونە**

شیکاریکە و پاسادانبکە

$$\begin{array}{lll} \log_6(2x + 3) = 3 & 10 & \log_2(7x + 1) = \log_2(2 - x) & 9 \\ \log_3 x^9 = 12 & 12 & \log 72 - \log\left(\frac{2x}{3}\right) = 0 & 11 \\ \log 50 + \log\left(\frac{x}{2}\right) = 2 & 14 & \log_7(3 - 4x) = \log_7\left(\frac{x}{3}\right) & 13 \\ \log\left(x + \frac{3}{10}\right) + \log x + 1 = 0 & 16 & \log x + \log(x + 48) = 2 & 15 \end{array}$$

4 **بروانە غوونە**

خستەيەك و وێنەيەكی پرونکردنەویدی بەکاربھێنە بۆ شیکاری:

$$x > 10 \log x \quad 20 \quad 2 \log x^4 = 16 \quad 19 \quad 2^x 3^x \leq 7776 \quad 18 \quad 2^{2x+1} = 256 \quad 17$$

راھینان و شیکارکردنی پرسیارەکان

شیکاریکە و پاسادانبکە

$$\begin{array}{lll} \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} = 125^{\frac{x}{2}} & 23 & \left(\frac{1}{4}\right)^x = 8^{x-1} & 22 \\ 3^{\frac{x}{2}+1} = 12.2 & 26 & (1.5)^{x-1} = 14.5 & 25 \\ 2^{x-1} = \frac{1}{64} & 21 & \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 1.6 & 24 \end{array}$$

27 **دەرمان** پەرستاریك حەبێكی ئارامكەرەویدی دابە نەخۆشێك، 325mg ئەسپرینی تێدایە. نەخشەیی $A = 325\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{15}}$ بۆ دیاریکردنی ھێندى ئەسپرینی A ماوە لە خوێنی نەخۆشكە دواي t خولەك لە وەرگرتنی حەبەكە. لاسەنگەيەكی لۆگاریتمی بنووسە و شیکاریکە، بۆ دیاریکردنی ژمارەیی خولەكە پێویستەكان بۆ ئەویدی ھێندى ئەسپرینەكە لە 50mg كەمتر بێت.

شیکاریکە

$$\begin{array}{lll} \log_2\left(1 + \frac{x}{2}\right) = 4 & 29 & \log_3(7x) = \log_3(2x + 0.5) & 28 \\ \log_5 x^4 = 2.5 & 31 & \log 5x - \log(15.5) = 2 & 30 \\ 2 - \log 3x = \log\left(\frac{x}{12}\right) & 33 & \log x - \log\left(\frac{x}{100}\right) = x & 32 \end{array}$$

خستەيەك یان جەبر بەکاربھێنە بۆ شیکارکردنی

$$\log(2x - 17) + \log x \geq 2 \quad 36 \quad 4x \leq 2^{x+1} \quad 35 \quad 2 \times 3^{x-1} = 162 \quad 34$$

راھینانی ئازاد	
بۆشیکارکردنی سەیری	راھینانەکان
1	26-21
2	27
3	33-28
4	36-34

37 $\log x = \log(x^2 - 12)$ شىكارىكە ۋەلامەكەت پرونىكەۋە.

38 $5^{2x} = 100$ شىكارىكە ۋەلامەكەت نىزىكەۋە بۇ نىزىتىن بەشى سەدى.

39 $5^{x+2} = 64$ بە زىاتر لە پىگايەك شىكارى بكە.

40 **مۆزىك** لەرەلەرى ھەر ئاۋازىك (بە ھىرتز) لە ئاۋازەكانى پىيانۇ بە پەيوەندىيەك لەگەل شۆينى دووگمەكەى (كليلەكەى) لە سەر تەختەى كليلەكان بە پىي نەخشەى $f(n) = 440 \times 2^{\frac{n}{12}}$ دەنۆنىرئىت، كاتىك n ژمارەى ئەو كليلانەيەكە ئەو كليلە لە كليلى مەركەزى جىادەكاتەۋە (n سالب دەبىت ئەگەر كليلەكە لە لای چەپى كليلە مەركەزىكەۋە بىت، و موجدە دەبىت ئەگەر لە لای راستى بىت) شۆينى كليلەكە بدۆزەۋە بۇ ئاۋازىك لەرەلەركەى 110 ھىرتزە.

41 **پارەدان** وا دابنى 250 000 دىنار بە بانكىك سىپىردا بە سوودىكى ئاۋىتە تىكراكەى 4.5% بىت لە ۋەرزىكدا پاشەكەۋتى حسابى ۋەرزى (4 جار لە سالىكدا) دەكرىت ياساى $A = P(1+r)^n$ بەكارىت بۇ ھەژمارى ئەۋەى گوزمە بنەپەتتەكە p دەگاتى، كە سىپىرداۋو لە حسابى سوودى ئاۋىتەكە تىكراكەى r بىت لەۋەرزىكدا، دواى تىپەپوۋنى n ۋەرز لە سپاردنى ئەۋە ياسايە بەكاربەئىنە بۇ دۆزىنەۋەى ژمارەى ۋەرزە پىۋىستەكان، بۇ ئەۋەى گوزمەكە بەلای كەمى بىتە 500 000 دىنار (يارمەتى: يەكەمجار ھەردوۋ لای ھاۋكىشەكە بەسەر p دابەشكە).

42 **بىركردنەۋەى پەخنەگرانە** چەند ژمارەى راستى دەبنە شىكارى $\log x^2 < 2 \log x$ ؟ بژمىرى پرونىكردنەۋەى بۇ ۋىنەى ھەردوۋ پرونىكردنەۋەىيەكە بەكاربەئىنە، پاسەدانى ۋەلامەكەت بكە. دوۋ پرونىكردنەۋەكە چى نىشانەدات بۇ ۋەلامەكە.

43 **ھەلە لە شىكاردا** لە كاتى شىكاركردى ھاۋكىشەى $\log x + 4 = 8$ ، دانا ۋەلامى، 999999 دەستكەۋت. ھەلەى دانا لە كۆيىپە؟

44 **بنۋوسە** باسى دوۋ پىگا بكە، دەتوانىت بەكارىان بەئىنئىت بۇ شىكاركردى ھاۋكىشەكەى تۋانى. نمونەيەك بەئىنەۋە، پرونىكەتەۋەكە ھەر پىگايەككىيان كەى بەكاردەھىنرئىت.

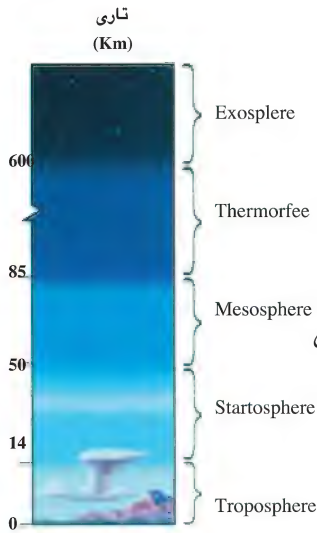
45 دەتوانىت نەخشە $N(t) = 119(0.987)^t$ بۇ دىارىكردى ژمارەى كىلگەكانى پەلەۋەر بەھەزاران لە يەككە لە ۋلاتەكان بە پىي ژمارەى سالەكانى t دواى سالى 1980

أ ئايا ژمارەى كىلگەكان زىادىكردوۋە لە سالى 1980 يان كەمىكردوۋە، چۆن ئەۋەت زانى؟

ب ژمارەى كىلگەكان سالى 1980 و سالى 2000 لە و ۋولاتەدا چەند بوۋ؟

ج بە پىي نەخشەكە كەى ژمارەى كىلگەكان بەنرىكەى دەبىتە 80 000 كىلگە؟





46 كەشنامىسى لە چىننىكى بەرگەى ھەوادا، پلەى گەرمى نەگۆرەو

دەكاتە -57° ، دەتوانرېت پىشت بە نەخشەى $P(h) = 128(10)^{-0.0682h}$ بېسەستىن ۈك ھاۋكېشەيەك بۇ پېۋانى پەستانى ھەۋاى p (بە كىلو باسكال kpa پېۋرابېت). بە پېى بەرزى h (بەكىلو مەتر پېۋرابېت) لە پوۋى زەۋىيەۋە پەستانى ھەۋا لەۋ چىنە لە نېۋان $2.55 kpa$ ۋ $22.9 kpa$ دەبېت.

ا كەمترىن بەرزى ۋ زۆرترىن بەرزى لەۋ چىنەدا چەندە بۇ ئەۋەى ھاۋكېشەكە راستبېت؟

ب چى دەبېت ئەگەر...؟ پەستانى كەش لە پوۋى دەريا $101 kpa$ بەنزىكەيى بېت، ئەگەر ئەۋ ھاۋكېشەى سەرۋەت بەكارھېنا بۇ دىيارىكردىنى پەستانى كەش لە پوۋى دەريا، ئاىا بەھايەكى گەۋرەترىان بچوۋكترت لە بەھا راستەقىنەكەى دەستدەكەۋېت. ئەمە پوۋنكەۋە.

نامادەكردىن بۇ تاقىكردەۋە

47 شىكارى ھاۋكېشەى $b^x = c$ دەكاتە چى؟

ا $x = \frac{\log b}{\log c}$ **ب** $x = \frac{\log c}{\log b}$ **ج** $x = \frac{\log b}{c}$ **د** $x = \frac{\log c}{b}$

48 شىكارى ھاۋكېشە $\log(x - 21) = 2 - \log x$ بکە.

ا $x = 4$ **ب** $x = \frac{25}{4}$ **ج** $x = \frac{21}{2}$ **د** $x = 25$

49 كام برە گەۋرەترىن بەھا ۋەردەگرېت كاتېك $p = 5$ ۋ $q = 2$ ؟

ا $\log 2p - \log 3q$ **ب** $2\log q - 3\log p$ **ج** $\log p^2 - \log q^3$ **د** $\log p - \log q$

بەرەنگارى ۋ فراوانكردىن

50 ئاىا دەتوانرېت ھاۋكېشەى $\log_x x = x$ شىكار بكرېت؟ ئەمە پوۋنكەۋە.

51 ھاۋكېشەى $x = 0.125^{\log_2 5}$ بەجەبرى شىكار بکە.

52 كۆمەلە شىكارى لاسەنگەى $\log_3 36 - \log_3 x > 1$ بدۆزەۋە؟ بژمىرى زانستى بەكاربھېنە بۇ شىكاركردىنى لاسەنگەكە بە پوۋنكردەۋەيى.

پىداچوۋنەۋەى لولپىچى

53 **ۋىنەگرتن** نرخی شوۋشتەۋەى ۋىنەيەكى پېۋانە $24cm \times 20cm$ دىنارە، نرخی شوۋشتەۋەى

ۋىنەيەكى پېۋانە $15cm \times 10cm$ دىنارە، سېۋى 5250 دىنارى لايە. ھىماى x بەكاربھېنە بۇ ژمارەى ۋىنەكانى پېۋانەى يەكەم، ۋ y بۇ ژمارەى ۋىنەكانى پېۋانەى دوۋەم (ۋانەى $1-2$).

ا لاسەنگەيەك بنۋوسە بۇ ژمارەى ئەۋ ۋىنانەى كە سېۋى دەتوانىت لە ھەر جۆرېك بېشۋاتەۋە.

ب لاسەنگەكە بەپوۋنكردەۋەيى شىكارىكە. سېۋى دەتوانىت چەند جۆرى دوۋەم بىشۋاتەۋە، ئەگەر زاننىت 4 ۋىنە دەرکەۋت لە جۆرى يەكەم؟

سنوۋردەرى پېژكرۋەكە بدۆزەۋە (ۋانەى $3-4$)

54 $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ **55** $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$ **56** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ **57** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

دژە كرادەكان بەكاربھېنە بۇ دۆزىنەۋەى پېچەۋانەى نەخشە (ۋانەى $2-4$)

58 $f(x) = 4x + 3$ **59** $f(x) = 6(x - 2)$ **60** $f(x) = \frac{x}{3} + 9$ **61** $f(x) = \frac{7x-1}{5}$

نموونه توانییه کان و لوگاریتمییه کان

Exponential and Logarithmic Models

ئامانجه کان

- به کاره پنانی نه خشی توانی و لوگاریتمی بۆ دۆزینه وهی نموونه کان بۆ پیدراوه کان.
- نموونه توانییه کان و لوگاریتمییه کان به کار دیت بۆ شیکردنه وه و دارشتنی پېشبینیه کان

کئ ئه مه به کار ده یئیت؟

ئهو که سانه ی به رده به نرخه کان مشتومال ده کن دزانن که به های خشله هاوشیوه کان به پی پیه یوه ندیه کی توانی به بار ستاییه که یه وه ده به سترینه وه (نموونه 2)

ده توانریت بۆ شیکردنه وه ی پیدراوه کان شیوازیک یان په یوه ندیه که دهریکه ویت که له نیوان دوو هینددا دووباره ده بیته وه. سه یری خشته ی خواره وه بکه بۆ به هایه کانیه نه خشی $f(x) = 2(3^x)$.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	2	6	18	54

سه رهنجده که ریژه ی هه به هایه که له به هایه کانیه y بۆ به های پیس خوی نه گۆره. هه به هایه که له به هایانه، جگه له به های یه که م، ده کاته سی ئه وه ندیه به هایه که ی پیس خوی، و هه روه ها، ئه و ریژه ی به های نه خشی به رامبه به های x که هه مان ماوه له یه کیکیان جیاده کاته وه، ریژه یه کی نه گۆره ده توانریت ئه م جوړه پیدراوانه به نه خشیه کی توانی $f(x) = ab^x$ بنویئریت.

زاراوه کان

Vocabulary

لیژ بوونه وه ی توانی (الانحدار الاسی)

Exponential Regression

لیژ بوونه وه ی لوگاریتمی (الانحدار اللوغاریتمی)

Logarithm Regression

جیاکردنه وه ی پیدراوه توانییه کان

دیاریبکه نه خشی f نه خشیه کی توانییه یان نا، ئه گه ر توانییه، ریژه ی نه گۆره که ی بدۆزه وه کاتیک $f(x) = ab^x$

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-1	1	3	5

جیاوازی یه که م $+2 \quad +2 \quad +2 \quad +2$

نه خشیه که نه خشیه کی هیلییه.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

جیاوازی یه که م $+\frac{1}{2} \quad +1 \quad +2 \quad +4$

ریژه کان $\frac{1}{2} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = 2$

نه خشیه که نه خشیه کی توانییه و ریژه نه گۆره که ی بریتیه له 2

له بیرت بیئت

نه خشی هیلی وه که نموونه یه که به کار دیت بۆ پیدراوه کان جیاوازییه یه که مه کانیه نه گۆره بیئت. هه روه ها نه خشی دووجا وه که نموونه یه که به کار دیت بۆ پیدراوه کان جیاوازییه دووه مه کانیه نه گۆره بیئت.

1. نه خشی f نه خشیه کی توانییه یان نا. ئه گه ر توانییه ریژه نه گۆره که ی بدۆزه وه کاتیک $f(x) = ab^x$

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$2.\bar{6}$	4	6	9	13.5

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	2	7	12	17

پیشتر بژمیری پروونکردنه و هیت به کارده هینا بۆ دۆزینه و هی نمونه یه کی هیلی که پیدراوه هیلییه کان دهنوینیت. واته کرداری لیژبوونه و هی هیلیت نه جامدا، بژمیری پروونکردنه و هی به کاردیت بۆ دۆزینه و هی نمونه یه کی توانی که پیدراوه توانییه کان دهنوینیت. کاتیک دلنیا ده بیت پیدراوه کان توانین. **ExpReg** (Exponential Regression) له بژمیری پروونکردنه و هیدا به کاربهین، بۆ دۆزینه و هی نمونه یه کی نوئ بۆ ئه و پیدراوانه، کرداری دۆزینه و هی نمونه یه کی توانی بۆ نواندن کۆمه لیک پیدراو پییده و تریت کرداری لیژبوونه و هی توانی **Exponential Regression** نمونه توانییه کان که بژمیری پروونکردنه و هی دروستی ده کات، ته نه نه خشه ی جوړی $f(x) = ab^x$ ده گریته و ه ههروهه کشانه و هی ته نه خشانه له بژمیره که ناگریت

جیبه جیکردن له مشتومالکردنی خشله کان

خشته ی به رامبه ر بارستای ژماره یه ک پارچه نه لماس و نرخه کی به نزیکه یی ده رده خات. نمونه یه کی توانی بۆ ئه و پیدراوانه بدۆزه و. ئه و نمونه یه کی دۆزیه و به کاربهین بۆ خه ملاندنی بارستای نه لماسی که نرخه کی 2325 هه زار دیناریت.

ههنگاوی 1 پیدراوه کان له دوو لیست له ناو بژمیره که تو ماریکه.

نرخه نه لماس	
بارسته یی (قیرات)	نرخ دینار
0.5	920 000
1.0	1 160 000
2.0	1 500 000
3.0	2 150 000
4.0	2 900 000

فرمانی لیژبوونه و هی توانی **ExpReg** به کاربهین به بژمیره که نمونه یه کی توانی ئه و پیدراوانه ته ده داتی، بریتییه له نه خشه ی توانی $V(w) = 805462.6 (1.38)^w$ کاتیک V هیمای نرخه نه لماسه که یه، W هیمایه بۆ بارسته یه که یه که به قیرات پیوراوه.

ههنگاوی 2 به پروونکردنه و هی پیدراوه کان خشته که بنوینیه،

و وینه ی پروونکردنه و هی نه خشه که بکیشه. بۆ دلنیا بوون له و هی نمونه یه کی بۆ ئه و پیدراوانه دروستکردوه رپسای نه خشه که به رامبه ر Y_1 له شاشه $Y =$ بنووسه، دووگمه ی **VARs**

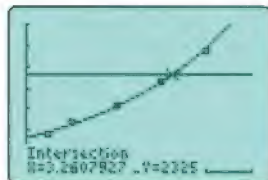
دابگره و **Statistics: 5** هه لیزیره پاشان

ENTER دابگره. بجولی بۆ **EQ EQ 1: Reg** هه لیزیره.

```
ExpReg
y=a*b^x
a=814.9602955
b=1.379191229
r^2=.9962061645
r=.9981012797
```

```
Vars: Y-VARS
1:Window...
2:Zoom...
3:GDB...
4:Picture...
5:Statistics...
6:Table...
7:String...
```

```
XY Z [TEST] PTS
[RegEQ]
1:a
2:b
3:c
4:d
5:e
6:f
7:r
```



$V = 2\ 325\ 000$ تو ماریکه به رامبه ر Y_2 له وینه ی نه خشه ی $V = 2\ 325\ 000$ فرمانی یه کتر برین له بژمیر به کاربهین. له وانه یه پیویستت به ریکه خستنی دوو ریه کان شاشه که هه بیت بۆ ئه و هی خالی یه کتر برین ده ریکه ویت.

2. دابه زینی توانی به کاربهین بۆ دۆزینه و هی نمونه بۆ پیدراوه کان خشته ی خواره و، که ی ژماره ی به کتریا کان ده بیت 2000 به کتریا.

کات (خوله ک)	0	1	2	3	4	5
ژماره ی به کتریا	200	248	312	390	489	610

نمونه 2

له بیرت بیت

ئه گه له سه ر شاشه ی بژمیر r^2 و r ته نه بیینی کاتیک لیژبوونه و هه ژمار ده که یه. دووگمه ی **CATALOG** دابگره 2^{nd} پاشان **0** دابگره و **Diagnostic** هه لیزیره.

دەتوانرېت زۆر لە پېدراوەکانی ژيانی پۆژانه به نەخشەى لۆگارىتمى بنوینیت. دەتوانیت لىژبوونەوێ لۆگارىتمى **Logarithmic Regression** بۆ دۆزینەوێ نەخشە بەکاربەھێنریت.

ھێزى تەقینەوێ	
TNT	ھێز
تەن	
2.0	
3.0	
4.0	
5.0	

```
LnReg
y=a+blnx
a=2.003115892
b=.2904046914
r=.9999625511
r=.9999812754
```



جیەجیەکردن لە فیزیادا

لە خشتەى بەرامبەر ھێزى تەقینەوێ، بە پێوەرى پێختەر دەردەکەوێت، بۆ ھێندیکى دیاریکراو لە ماددەى TNT ، نەخشەى لۆگارىتمى سروشتى بدۆزەوێ، کە دەبێتە نموونەىەك بۆ ئەو پیدراوانە. ئەو نموونەى دۆزیتەوێ بەکاربەھێنە، بۆ خەمڵاندنى ھێندە تەقینراوەکان لە ماددەى TNT تەقینەوێکەى بکاتە بومەلەرزەىەك بە ھێزى 6.5 بە پێوەرى پێختەر. پیدراوەکان لە دوو لیستدا تۆماریکە، لە بژمیری پوونکردنەوێ پاشان فەرمانى لىژبوونەوێ لۆگارىتمى بەکاربەھێنە، دوگمەى STAT دابگرە CALC پاشان **9: LnReg** ھەلبژێرە. نەخشەى $R(x) = 2 + 0.29 \ln x$ نموونەىەكى لۆگارىتمیە پیدراوەکانى نەخشەى پیکدەھێنیت. کاتیك R ھێزى بوومەلەرزەکان بێت بە پێوەرى پێختەر t ھێندى تەقینراوەکانى ماددەى TNT بە چەندھا تەن بێت. بە ھای r^2 دەریدەخات نموونەى گونجاو بۆ نواندنى پیدراوەکانى خشتەى. فەرمانى یەکتەرپین لە بژمیری پوونکردنەوێ بەکاربەھێنە بۆ دۆزینەوێ x کاتیك $y = 6.5$ ھێزى تەقاندنەوێکەى ماددەى TNT بەبارستایى 5.3 ملیۆن تەن بەنزیکەى دەکاتە ھێزى تەقینەوێ بوومەلەرزەىەك بە ھێزى 6.5 بە پێوەرى پێختەر.

نموونە 3

3. لىژبوونەوێ لۆگارىتمى بەکاربەھێنە، بۆ دۆزینەوێ نەخشەىەك کە نموونەىەك لە پیدراوەکانى خشتەى دروست بکات. کەى خێرایەىەك دەگاتە 8 m/s مەتر لە چرکەىەكدا؟



خولەك	1	2	3	4	5	6	7
خولەك (m / s)	0.5	2.5	3.5	4.3	4.9	5.3	5.6

بیریکەوێ و تاوتوییکە

- چۆن دەزانیت کە ئایا دەکریت پیدراوەکان بە نموونەىەكى توانى بنوینیت، کاتیك بە شێوێ $f(x) = ab^x$ بنوسریت.
- پوونکەوێ بۆچى پیدراوەکان لە بارى دوو خالەىەك بەس نییە بۆ ئەوێ پیت بلێت پیدراوەکان لۆگارىتمین یان توانین.
- پێختەر بە ئەم ھێلکارییەى خواروێ دروستیکە و تەواویکە. ئەو ھەنگاوانە دیاریکە بۆ دۆزینەوێ نموونەىەكى توانى یان نموونەىەكى لۆگارىتمى.



رايونلار ئاراستىسى

1 زارۋەكەن _____ بەككە كاتىك دەتۈرۈپ پىدارۋەكەن بەنەخىشە $f(x)=ab^x$ بنوئىت (لېڭبونەۋە تۈنەن يان لېڭبونەۋە لۇگارىتمى).

1 بىرۋەنە ئۈنە 1 ئايا نەخىشە f نەخىشەكە لە جۆرى $f(x)=ab^x$ ئەگەر واىە، پىژە نەگۈرەكە دىارىبەكە

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$-2\frac{5}{7}$	-1	11	95	683

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	27	18	12	8	$5\frac{2}{3}$

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	5	1	-3	-7	-11

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$2\frac{1}{4}$	3	4	$5\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{9}$

6 فېزىيا لەۋ خىشەيەى خۋارۋە دەردەكەۋىت، پەلەى گەرمى كۈپە چاىەكە چەند لە پەلەى گەرمى ژۈرەكە زىاترە، كاتىك سارد دەپتەۋە. نەۋنەيەكى تۈنەن بدۈزەۋە، ئەۋ پىدارۋانە بنوئىت. نەۋنەكە بەكاربەيئە بۇ خەملاندنى ژمارەى خولەكى خاىەندراۋ پىش ئەۋەى جىاۋازى ئىۋان پەلەى گەرمى كۈپەكەۋ ژۈرەكە بۇ كەمتر لە 4 پەلە.

چۈن چاىەكە سارد دەپتەۋە					
4	3	2	1	0	كات بە خولەك
33	38	43	48	55	پەكەنى گەرمى زىاتر لەپەلەى گەرمى ژۈرەكە

7 ئەندامبۈۈن لەم خىشەيەى خۋارۋە زىادبۈۈنى ژمارەى ئەندامانى يانەيەكى كۆمەلەيەتى مانگانە دەردەكەۋىت. نەۋنەيەكى لۇگارىتمى بدۈزەۋە پىدارۋەكەنى خىشەكە بنوئىت، نەۋنەكە بەكاربەيئە بۇ دۆزىنەۋەى ژمارەى مانگە پىۋىستەكان بۇ ئەۋ يانەيە بۇ ئەۋەى ژمارەى ئەندامەكانى بگاتە 8000

بۈۈن بە ئەندام لەيانەكە					
150	90	42	18	6	كات بەمانگ
7000	6000	5000	4000	3000	ژمارەى ئەندامەكان

راهیان و شیکارکردنی پرسپارہکان

دیاریکە ئایا f نەخشەیەکی توانییە لە جوړی $f(x) = ab^x$ ، نەگەر وایه، ریزه نەگۆره‌که‌ی دیاریکە.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1.25	1	0.75	0.5	0.25

x	-5	-3	1	3	5
$f(x)$	20	6	2	12	30

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.667	1	1.5	2.25	3.375

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-16	-8	-4	-2	-1

8

9

10

11

12

13

14

15

15

راهپیمایی نازاد

بۆ شىكارى سەيرى
راھىنەنەكان نمونە بکە

1	11-8
---	------

2 12

4 13

زانسته کوومه لایه تییه کان خشته ی بهرام بهرت

زیادابوونی ژماره‌ی شۆفیره‌کان له یه‌کێک له ولاته‌کان له
سالی 1980 تا سالی 2000 دهرده‌خات، نموونه‌یه‌کی توانی
بۆ نواندنی پیدراوه‌کانی خسته‌که‌ بدۆزوه. نموونه‌که
به‌کاربهێنه‌ بۆ دیاریکردنی ئەو کاته‌ی ژماره‌ی
به‌شاربووان له‌ وولاته‌ له 120 ملیۆن تێده‌په‌ریت.

گه یاندن

گه یاندن خشته‌گی خواروه زیادبوونی ژماره‌ی به‌شاربوون له ئینته‌رئیت له یه‌کێک له
ووڵاته‌کان له ساڵی 1990 تا ساڵی 2000 دهرده‌خات، نموونه‌یه‌کی توانی بۆ نواندنی پێدراوه‌کانی
خشته‌که‌ بدۆزوه. نموونه‌که‌ به‌کاربهێنه‌ بۆ دیارکردنی ئه‌و کاته‌ی ژماره‌ی شوڤه‌رێه‌کان له 100
ملیۆن تیده‌یه‌رئیت.

زیادیوونی ژماره‌ی شوفیرِ هکان			
30	20	10	ساله‌مکانی دوی 1970
35.3	22.5	14.6	ژماره (به‌میلیون)

ژماره‌ی به‌شدار یوونی نینته‌ر نیّت											ساله‌کانی دواى 1990
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	ژماره به (میلیون):
23.6	19.6	15.7	11.1	8.7	8.5	9.1	7.3	6.6	5.5	4.4	

ژینگه زان

ژینگه زانیاړیه‌کان له بارۍ باندې (غېرنوق) که هره‌ږشۍ له ناوچوښان لږ دکرښ
ژماره‌کۍ ده‌ستی به‌زیادبوون کړد. خسته‌کۍ خوارووه زیادبوونی ټو ژماره‌یه‌مان له ماوې 55
سال درې‌دځات نمونه‌یه‌کۍ لوگاریتمۍ بدوژوه، زیادبوونی ژمارۍ ټو باندانه بنوښت. که‌ی
ژماره‌یان ده‌گاته 500 باندې؟

ژماره‌ی بالنده‌کانی غەرنوق					
185	120	85	40	18	ژماره
57	47	40	22	5	ساله‌کان دوای 1940

دیاربیکه ئایا پذیراوه کانی خسته که توانین. ئەگەر وایه لیژبونه وەدی توانی بەکار بهێنە بۆ دۆزینە وەدی نموونەیه ک ئەمە بنوینن

x	-1	0	2	3
$f(x)$	4	2	0.5	0.25

x	1	2	3	4
$f(x)$	11	95	683	4799

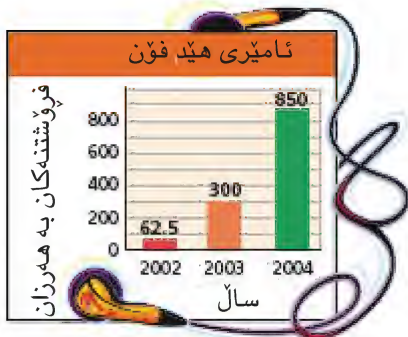
2	4
---	---

15

15 **بسم الله**

بیری پھرخنگر پیدراوکان له باره‌ی جوړه بالندهیه که له ئه‌فریقیا ئه‌وه ده‌گه‌یه‌نیت که ژماره‌یان که‌مده‌کات له سال‌ی 1930 یه‌وه به‌لایه‌نی زوړه‌وه زیاتر نیو ملیون که‌مده‌کات، به‌لام ئه‌مړو ئه‌وه که‌مبونه له 15 000 که‌متره، پیدراوی تری پښو‌ست چییه، بو ئه‌وه‌ی بریار‌به‌دیت، که ئه‌م لیژی‌ونه‌وه‌به توانیبه؟

18 ژینگه لیکولینه و دیهک و ا دمهگه یه نیت که ئهستووری بهفر له بهاردا له یهکک له ناوچه ساردهکان کاردهکاته سهر تیکرایی مانهوهی گۆک له ژياندا، ئهگهر ئهستووری بهفرهکه 5000 mm بېت تیکرپاکه دهبېته نزيکهی 0.9%، و ئهگهر ئهستووری بهفرهکه 6700 mm بېت تیکرپاکه دهبېته 0.3% کهچی ئهستووری بهفرهکه 0.17% بېت تیکرپاکه دهبېته 8250 mm، نهخشهیهکی توانی بدۆزهوه بۆ نواندنی ئه و پیدراوانه. نمونهکه بهکاربهیته بۆ خهملاندنی پړژهی مانهوهی گۆک له ژياندا کاتیک ئهستووری بهفرهکه 4000 mm بېت.



19 تهکنهلوژیا خشتهی بهرامبه، زیادبوونی فرۆشتنی ئامیرهکانی هیدفون له پشویی هاویندا دهردهخات. وایدابنی فرۆشتنی ئه و ئامیرانه به پکی زیادهکات. نهخشهیهکی توانی بۆ نواندنی پیدراوهکانی خشتهکه بنووسه، نهخشهکه بۆ خهملاندنی فرۆشتنهکان بهکاربهیته، بۆ سی سالی داهاوو.

20 دهستهواژهیهک بنووسه خشتهی بههای نهخشهیهکی بههایهکانی 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8 بۆ گۆرایی سهرهخوی جیاوازییه یهکه مهکان و دوومهکان و سییه مهکان بدۆزهوه. دهستهواژهیهک بنووسه له بارهی جیاوازییهکان له n پاده وایدابنی که بواری نهخشهکه بریتییه له ژماره سروشتیهکان.

21 بنووسه چۆن دهزانیت که کۆمهلهی پیدراوهکان توانیه و هیلی یان دوو جایی یان سیجای نییه.

22 پیدراوهکانی ئه م خشتهی خوارهوه بهکاربهیته.

x	0	2	3	4	5	6
y	18	32	43	57	76	101

ا کامیان پیدراوهکانی خشتهکه به شیوهیهکی باشر دهنوینیت نهخشهیهکی توانی یان

نهخشهیهکی لۆگاریتمی؟ ئه مه پروونبکوه

ب ئه گهر ریزی دووم له خشتهی پیشوو $\log y$ له خۆبگریت له جیاتی y ، کام نهخشه له

پیدراوهکانی خشتهی نوی به شیوهیهکی باشر دهنوینیت. نهخشهی توانی یان نهخشهی

هیلی؟ ئه مه پروونبکوه

ناماده کردن یۆ تاقیکردنه وه

23 کام له م بارانهی خوارهوه دهتوانریت به نهخشهیهکی توانی بنوینریت؟

ا تیچوونیک بههایهکهی 100 000 دینار مانگانه بهرز دهبیتوه.

ب پرووبهری چوار گۆشهیهک درژی لایهکی ده، ده، زیاد دهکات.

ج دواي ههر خولیک نیوهتیرهی برغویهک به زیاد بوونی پانییهکهی به پړژهی 10% زیادهکات.

د ژمارهی دانیشنوان به چهند جارهبوونهوهی کات، چهند جار دهبیتوه.

24 کام له م کۆمهله ژمارانهی خوارهوه توانین؟

ا (0,0,1)، (1,0,5)، (2,2,5)، (3,12,5)

ب (0,-1)، (1,0)، (2,7)، (3,20)

ج (0,-1)، (1,0,5)، (2,2)، (3,3,5)

د (0,-1)، (1,2)، (2,11)، (3,26)

25 **كورتە ۋە ئام** ژمارى نەزانراۋ لە خشتەكەدا بدۆزەۋە ئەگەر بزانىت پېدراۋەكانى تۈانين.

x	0	1	2	3
y	2	3.5		10.71875

بەرەنگارى و فراوانکردن

26 نەخشەيەكى تۈانى پوونکردنەۋەى بە دوو خالى (2,48) و (4,300) دا دەروات بدۆزەۋە. هەنگاۋەكانت پوونبەكەۋە

27 **ژینگە** سەنارىيا لەيەككە لە تاقىگەكانى كىمىيا كاردەكات، هەلمىكى ژەھراۋى هەلمزى لە ئەنجامى، تېكچوونى ئامپىرېك. لە شىكردنەۋەى خوينەكەيدا پاش 4 كاتژمىر لە پووداۋەكە دەركەوت، ماددەى تۆكسىن Toxine ى ژەھراۋى بە پېژەى 0.01006 mg/cm^3 لە خوينەكەيدا هەيە، لە شىكردنەۋەى تە دواى 2 كاتژمىر دواى شىكردنەۋەى يەكەم دەركەوت پېژەى تۆكسىن بوو بە 0.00881 mg/cm^3 وايدابنى هيندى تۆكسىن لە خوينەكەيدا بە شىۋەى تۈانى بە پى كات دەگۆرپت. نەخشەيەكى تۈانى بدۆزەۋە، پېدراۋەكان بنوئىنپت.

ب تۆكسىن هەپشە لە تەندروستى مرؤف دەكات ئەگەر پېژەكەى 0.015 mg/cm^3 لە خوئىن زىاد بكات. ئايا ئەو هيندە تۆكسىنەى كە سەنارىيا هەلمزى هەپشە لە تەندروستى دەكات؟

ج سەنارىيە دەتوانىت دەست بە كارى پۆزانەى خوئى بكاتەۋە، كاتىك تېكراپى تۆكسىن لە خوينەكەى 0.00010 mg/cm^3 كەمتر بپت. ژمارەى كاتژمىرى پيوست (بەنزىكردنەۋەى بۆ نىكتىرەى كاتژمىر) هەژماربە بۆ ئەۋەى بچپتەۋە سەركارى پۆزانەى خوئى.

پېداچوونەۋەى لولپىچى

شىكاربەكە (ۋانەى پيشوۋ)

$$2|2x| + 1 = 10 \quad 31 \quad |2x - 4| = 3 \quad 30 \quad |x + 4| = 0 \quad 29 \quad |-5x| = 45 \quad 28$$

سفرەكانى ھەر نەخشەيەك بەبەكارهيناننى شىتەلكردن بدۆزەۋە (ۋانەى پيشوۋ)

$$f(x) = 3x^2 + 24x \quad 33 \quad f(x) = x^2 + 2x - 3 \quad 32$$

$$f(x) = x^2 + 9x - 36 \quad 35 \quad f(x) = 2x^2 + 10x + 12 \quad 34$$

شىكار بکە و ساغيبكەۋە (ۋانەى 6-4)

$$216^x = 6^{2x} \quad 39 \quad 8^{\frac{x}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} \quad 38 \quad 81^x = 3^{x+4} \quad 37 \quad \frac{1}{64} = 4^{x+5} \quad 36$$

ئەم پىدراۋانە بۇ شىكارىدىن پىسارەكانى 12 و 13 بەكاربەيتە.

كەمبۇنەۋەى ژمارەى دانىشتۋانى شارىك بە رېژەى 3% لە چاۋ ژمارەى سالى رابردو.

12 بېك بنوسە ژمارەى دانىشتۋانى شارەكە ئەم سال P_T بەپى ژمارەى بۇ سالى رابردو P_L بنوئىت.

13 بېك بنوسە ژمارەى دانىشتۋانى شارەكە بۇ سالى رابردو P_L بەپى ژمارەى بۇ ئەم سال P_T بنوئىت.

14 نەخشەى $M = \frac{5}{8}K$ رېگە بە گۆپىنى ماۋەكان لە كىلۇمەتر بۇ ميل بە شىۋەى نىكرۋەى دەدات. پىچەۋانەى نەخشەكە بنوسە و بەكاربەيتە، بۇ گۆپىنى 25 ميل بۇ كىلۇمەتر.

15 ئەم يەكسان بوونە $19^{1.5} = 27$ بە شىۋەى لۇگارىتمى بنوسە.

16 بەھى برەى $\log_4 64$ چەندە؟

17 وئەى پوونكرنەۋەى نەخشەى $f(x) = 0.6^x$ بىكشە. و وئەى پوونكرنەۋەى ھەلگەراۋەى نەخشەكە بىكشە، و مەۋداكەى دىارىبەكە.

ئەمانە لە شىۋەى تۋانىۋە بۇ شىۋە لۇگارىتمى بگۆرە.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27 \quad 19 \quad 1 = 9^0 \quad 18 \quad 3^5 = 243$$

ئەمانە لە شىۋەى لۇگارىتمى بۇ شىۋە تۋانىۋە بگۆرە.

$$\log_{10} 10 = 1 \quad 22 \quad \log_2 16 = 4 \quad 21$$

$$2 = \log_{0.6} 0.36 \quad 23$$

بەھى ئەم برانە بە ھزرى ھەژماربەكە.

$$\log_{0.5} 0.25 \quad 25 \quad \log_7 49 \quad 24$$

$$\log_2 1 \quad 28 \quad \log_{0.01} \quad 27 \quad \log_{12} \left(\frac{1}{12}\right) \quad 26$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad 29$$

دروستبەكە، وئەى پوونكرنەۋەى پىچەۋانەى نەخشەكە بىكشە، بەكاربەيتەنى خستەى بەھايەكان، بوار و مەۋداى پىچەۋانەى نەخشەكە دىارىبەكە.

1 جۆرە قىتامىنىك لە خويىندا بە رېژەى 15% لە كاتژمىرىكدا كەمدەكات.

ا ئايا ئەم نەخشەى ئەم بارەدەنوئىت نەخشە- يەكى پوولەزىاد بوونە يان پوولە كەمبۇون؟

ب ئەگەر برى ئەم جۆرە قىتامىنە 400 mg بىت. نەخشەكە بنوسە برى ماۋەى قىتامىنەكە پاش T كاتژمىر بنوئىت.

ج وئەى پوونكرنەۋەى نەخشەكە بىكشە و بەكاربەيتە بۇ خەملاندنى برى مانەۋەى قىتامىنەكە پاش 7 كاتژمىر

ھەر نەخشەكە لەمانە نەخشەى گەشەيە يان نەخشەى پووكانەۋەيە دىارىبەكە.

$$f(x) = 0.5(1.25)^x \quad 2$$

$$f(x) = 0.5\left(\frac{3}{2}\right)^x \quad 3$$

$$f(x) = 2.5(0.25)^x \quad 4$$

$$f(x) = 2(1 + 0.25)^x \quad 5$$

ئەم پىدراۋانە بەكاربەيتە بۇ شىكارىدىن پىسارەكان لە 6 بۇ 9

ژمارەى خويىندىكاران لە يەككە لە قوتابخانەكاندا بە رېژەى 2% سالانە زىاد دەكات، لەپىنچ سالى كۇتايدا. ژمارەى خويىندىكارەكان ئەم سال گەيشتە 765 قوتابى.

6 ئايا ئەم نەخشەى ئەم بارە دەنوئىت نەخشەى گەشەيە يان نەخشەى پووكانەۋەيە.

7 وئەى پوونكرنەۋەى ئەم نەخشەكە بىكشە.

8 وئەى پوونكرنەۋەى نەخشەكە بەكاربەيتە، بۇ خەملاندنى ژمارەى خويىندىكارەكان پاش 5 سال.

9 كەى ژمارى خويىندىكارانى قوتابخانەكە لە 1000 خويىندىكار تىپەپ دەكات؟

10 پوونكرنەۋەى نەخشەى $f(x) = \frac{4}{5} - 3x$ بىكشە. پىچەۋانەى نەخشەكەى بنوسە وئەى

پوونكرنەۋەى بىكشە.

11 ئەم پەيوەندىيەى بە خستەكە نوئىراۋە بە شىۋەى پوونكرنەۋەى بىكشە.

x	-1	0	1	2	3
y	1	0.2	0.04	0.008	0.001

پاشان وئەى پوونكرنەۋەى پىچەۋانەى نەخشەكە بىكشە، و ئەم خستەيە بنوسە كە دىنوئىت.

نهم بره لوگاریتمیایانه به سادهترین شیوه بنووسه

$$\log 25 + \log 40 \quad 30$$

$$\log_5 25 - \log_5 25 \quad 31$$

$$\log_2 8 + \log_2 16 \quad 32$$

$$\log 100 + \log 1000 \quad 33$$

$$\log_2 128 - \log_2 2 \quad 34$$

$$\log 10 - \log 0.1 \quad 35$$

$$\log 10^5 + \log 10^4 \quad 36$$

به‌های بره‌کان بدوژوه.

$$\log_3 8^2 \quad 37$$

$$\log_5 25^2 \quad 38$$

$$\log_5 16 \quad 39$$

نهمرؤ ئاستی توندی دهنگ میوزیک له یانه‌ی لاوان

به 10 دسیبیل Decibel له‌وه‌ی دوینیی به‌رترربوو

نهمرؤ ئاستی توندی دهنگی میوزیک $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ به‌کارده‌هینریت بۆ پیوانی

توندی دهنگ به W/m^2 ده‌پوریت. هیمای I_0 بۆ

توندی به‌رگویی که‌وتن. توندی دهنگی میوزیک دوینیی

چه‌ند ئه‌وه‌نده‌ی توندی دهنگی میوزیک ئه‌مرؤیه؟

شیکاری نهم هاوکی‌شه‌یه بکه

$$5^x = 50 \quad 41$$

$$\log_9 x^2 = 5 \quad 42$$

$$3^{x-1} = \frac{1}{9} \quad 43$$

شیکاری نهم لاسه‌نگه‌یه بکه.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 64 \quad 44$$

$$\log x^{\frac{5}{2}} > 2.5 \quad 45$$

په‌یوه‌ندی $A = P(1+r)^n$ بۆ‌دیاریکردنی به‌های

دانراوی حسابی بانکی به‌کاردی، که‌ تییدا

گوژمه‌ی به‌رته‌ی P به‌ سوودی سالانه و تیكرای r

پاش n سال له سپاردنی گوژمه‌که. هه‌کار 250 000

دیناری له بانکی دانا، که‌ی نرخ‌ی حساب‌یه که‌ ده‌بیته

500 000 دینار ئه‌گه‌ر بزانیته ریژه‌ی سوودی سالانه

بریتییه له 4% ؟

نهم بره به‌ساده‌ترین شیوه بنووسه. $e^{\ln(2x+1)}$ 47

سه‌یران 5 ملیون دینار له حسابی‌ک به‌ تیكرای 48

سوودی سالانه 6% سپارد، بۆ ئه‌وه‌ی پاشکه‌وت

کردنه‌که به‌رده‌وام بیته. حساب‌ه‌که‌ی پاش 5 سال

ده‌بیته چه‌ند؟

جوژیک له بالنده‌ی سال‌ی 1940 ژماره‌یان 22 بالنده 49

بوو. به‌رده‌وام به‌زیاد بوونی توانی هه‌تا سال‌ی

2003 گه‌یشته 194 بالنده.

ا نهمرؤ ئه‌خشی گه‌شه‌ی توانی به‌کاربه‌ینه $P(t) = P_0 e^{kt}$

P_0 هیمای ژماره‌ی به‌رته‌ی و $P(t)$ ژماره‌کانییه‌تی

له‌ کاتی t دا بۆ دیاریکردنی تیكرای زیادبوون k .

ب به‌چه‌ند ژماره‌ی نهم بالنده‌ی ده‌خه‌ملینیت ئه‌گه‌ر

زیادبوونه‌که‌ی به‌هه‌مان شیوه به‌رده‌وام بیته؟

نهم خشته‌یه‌ی خواره‌وه زیادبوونی ژماره‌ی جوژیک 50

له‌ داره‌کانی به‌هارات ده‌نویینیت بۆ ماوه‌ی 6 سال له

کی‌لگه‌یه‌کی نمونه‌ییدا. بژمی‌ری پروونکردنه‌وه‌یی

به‌کاربه‌ینه، بۆ دۆزینه‌وه‌ی نهمرؤ ئه‌خشییه‌کی لوگاریتمی

که‌ پی‌دراوه‌کانی خشته‌که‌ بنویینیت. ئه‌و سال‌ی

ژماره‌ی داره‌کان ده‌بیته 70 دار بخه‌ملینه.

سال	1	2	3	4	5	6
ژماره	14	30	40	46	53	55

نهم خشته‌ی خواره‌وه زیادبوونی ژماره‌ی بالنده‌کان

له‌ پۆلیک بالنده له جوژری ده‌گه‌من ده‌نویینیت. که‌ له

شوینیکی دیاریکراودا ده‌ژی له‌ ماوه‌ی 55 سالانی

کو‌تایی.

ژماره‌ی بالنده‌کان	ساله‌کان له‌ ده‌ستکردن به‌تۆمارکردنی ژماره‌کان
18	5
22	22
85	40
185	57

ExpReg له‌ بژمی‌ری پروونکردنه‌وه‌یی به‌کاربه‌ینه، بۆ 51

دۆزینه‌وه‌ی نمونه‌یه‌کی توانی بۆ پی‌دراوه‌کانی خشته‌که.

LnReg له‌ بژمی‌ری پروونکردنه‌وه‌یی به‌کاربه‌ینه، بۆ 52

دۆزینه‌وه‌ی نمونه‌یه‌کی لوگاریتمی بۆ پی‌دراوه‌کانی

خشته‌که.

به‌راوردبکه له‌ نیوان دوو به‌های r^2 که‌ بۆ دوو نهمرؤ ئه‌خشییه‌

ده‌گه‌ریته‌وه. کام له‌م دوو نهمرؤ ئه‌خشییه‌ی باشتترین نمونه‌یه

له‌ نواندنی پی‌دراوه‌کانی خشته‌که‌دا؟ بوچی؟ 53

تاقىکردنەۋەى بەش

بە سادەترىن شىۋە بنووسە

$$\log_4 128 - \log_4 8 \quad 17$$

$$\log_2 12.8 + \log_2 5 \quad 18$$

$$\log_3 243^2 \quad 19$$

$$5^{\log_5 x} \quad 20$$

شىكارىكە

$$3^{x-1} = 729^{\frac{x}{2}} \quad 21$$

$$5^{1.5-x} \leq 25 \quad 22$$

$$\log_4 (x + 48) = 3 \quad 23$$

$$\log(6x^2) - \log 2x = 1 \quad 24$$

دەتوانىت نەخشە $y = D(0.95)^x$ بەكاربەھىنىت ۋەك
نمۇنەيەك بۇ ھەژماركردنى ئەۋەى دەمىنىتەۋە لەۋ
قىتامىنە شلەى لە لەشى مرؤف دواى خواردنەۋەى. D
ھىماى برى قىتامىنى شلى خوراۋەى.

y ھىماى برى قىتامىنى ماۋەى بە مليلتر پاش x
خولەك يەككە 15m قىتامىنى شلى خوراۋە. چەند
كاتى دەۋىت بۇ ئەۋەى قىتامىنەكەى لەشى لە 5ml
كەمترىت.

نيۋەى تەمەنى پلۇتۇنۇنيۇم دەگاتە 239 و 24 000
سال پەيۋەندى $\frac{1}{e^{-kt}} = 1$ ، نيۋەى تەمەنى مادەكەى،
 k نەگۇرى پوۋگانەۋەى، لە 100g پلۇتۇنيۇم پاش 5
سال چەند دەمىنىتەۋە؟

لېژبونەۋەى لۇگارىتمى بەكاربەھىنە بۇ دۇزىنەۋەى
نەخشەيەك بۇ ليكۇلنەۋەى ژمارەى تىمساحەكان، لە
كۆمەلەكە دا لەپىدراۋەكانى خشتەى بەرامبەر. كاتىك
 y ھىماى گۇراۋى ژمارەى تىمساحەكانە، x ھىماى
گۇراۋى كاتە بە سال.

78	62	50	ژمارە
3	2	1	سال

ديارىيكە، نەخشەكە گەشەى توانيىيەيان نەخشەى
پوۋگانەۋەى توانيىيە، پاشا ويئەى پوۋنكردنەۋەى
بكيشە

$$f(x) = 1.3\left(\frac{2}{5}\right)^x \quad 2 \quad f(x) = 0.4^x \quad 1$$

$$f(x) = 50(1 + 0.04)^x \quad 4 \quad f(x) = \frac{7}{8}(1.1)^x \quad 3$$

تارا ئۆتۇمبىللىكى بە 13 500 000 دىنار كرى.
ۋادابنى نرخی ئۆتۇمبىلەكە سالانە بە رېژەى 15%
دادەبەزىت. نەخشەى توانى بنووسە كە ببىتە
نمۇنەيەك بۇ ديارىكردنى نرخی ئۆتۇمبىلەكە بە
پىتى كات (سال)، ويئەى پوۋنكردنەۋەى ئەم نەخشە
بكيشە، كەى نرخی ئۆتۇمبىلەكە لە 3 000 000 دىنار
كەمتر دەبىت؟

ويئەى پوۋنكردنەۋەى نەخشەكە بكيشە، پاشان
پىچەۋانەى نەخشەكەى بنووسە، پوۋنكردنەۋەى
نەخشەكە بكيشە.

$$f(x) = x - 1.06 \quad 6$$

$$f(x) = \frac{5}{6}x - 1.06 \quad 7$$

$$f(x) = 1.06 - \frac{5}{6}x \quad 8$$

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(1.06 + \frac{5}{6}x\right) \quad 9$$

ئەمانە بە شىۋەيەكى تر بنووسە (توانى يان لۇگارىتم)

$$16^{-0.5} = \frac{1}{4} \quad 11 \quad 16^{\frac{1}{4}} = 2 \quad 10$$

$$\log_{81} \frac{1}{3} = -\frac{1}{4} \quad 13 \quad \log_{\frac{1}{4}} 64 = -3 \quad 12$$

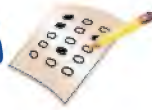
بەھاي پىدراۋى x بەكاربەھىنە بۇ كىشەنى ويئەى
پوۋنكردنەۋەى نەخشەكە، پاشان پىچەۋانەى
نەخشەكە بنووسە، و ويئەى پوۋنكردنەۋەى بكيشە
بوار و مەۋداى پىچەۋانەكەى نەخشەكەى ديارىيكە.

$$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x; x = -1, 0, 2, 4 \quad 14$$

$$f(x) = 2.5^x; x = -1, 0, 1, 2, 3 \quad 15$$

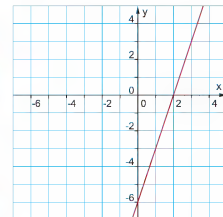
$$f(x) = 5^{-x}; x = -1, 0, 1, 2, 3 \quad 16$$

تاقىکردنەۋەى كەلەكەبوو

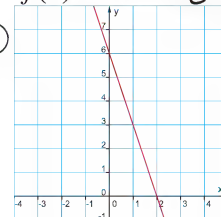


1 كام پرونكرندنەۋە پىچەۋانەى نەخشە دەنۆيىت بۆ

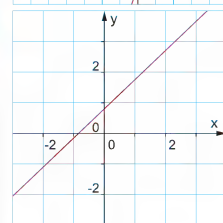
نەخشەى $f(x) = -3x + 6$



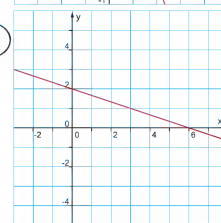
(ب)



(ا)



(د)



(ج)

2 كام لەمانەى خوارەو سادەترىن شۆەىە بۆ بەرى
 $\log_5 12 - \log_5 4$ ؟

(ا) $\log_5 48$ (ب) $\log_5 8$ (ج) $\log_5 16$ (د) $\log_5 3$

3 بەهەى x چەندە لە ھاوکیشەى $9 = \log_4 (x - 1)^3$ ؟

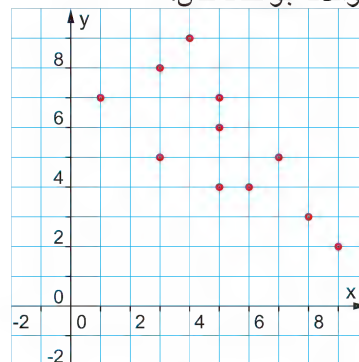
(ا) 27 (ب) 64 (ج) 65 (د) 81

4 كام لەمانە نەخشەى پەیدا بوو لە پاكیسانی
نەخشەى بنەرەتى $f(x) = \ln x$ دوویەكە بۆلای پاست
و 7 یەكە بۆ خوارەو پاشان فراوئوونى ئاسۆی
ھاوکیكەى 6 بۆت ؟

(ا) $g(x) = 6 \ln x$ (ب) $g(x) = 6 \ln(x + 2) + 7$ (ج) $g(x) = 6 \ln(x + 2) + 7$ (د) $g(x) = 6 \ln(x + 2) + 7$

(ا) $g(x) = 6 \ln(x + 2) + 7$ (ب) $g(x) = 6 \ln(x + 2) + 7$ (ج) $g(x) = 6 \ln(x + 2) + 7$ (د) $g(x) = 6 \ln(x + 2) + 7$

5 كام لەمانەى خوارەو ھاوکیشەى پاستەهێلى
باشترین نواندە بۆ خالەكان.



(ا) $y = -\frac{10}{11}x + 10$ (ب) $y = -\frac{11}{10}x + 1$ (ج) $y = -\frac{11}{10}x + 1$ (د) $y = -\frac{10}{11}x + 10$

(ا) $y = -\frac{10}{11}x + 10$ (ب) $y = -\frac{11}{10}x + 1$ (ج) $y = -\frac{11}{10}x + 1$ (د) $y = -\frac{10}{11}x + 10$

بەشى 4 نەخشە توانیەكان و لوگاریتمیەكان

6 كام لەمانەى خوارەو ھاوکیكەى $P(x) = 8x^3 + 16x^2 + x + 2$

(ا) $4x - 1$ (ب) $2x + 3$ (ج) $x + 2$ (د) $3x - 3$

7 كام نەخشە لە مانەى خوارەو سفرەكانى 1 و 0 ؟

(ا) $f(x) = x^2 + x - 1$ (ب) $f(x) = x^2 + x$ (ج) $f(x) = x^2 + x$ (د) $f(x) = x^2 + x$

(ا) $f(x) = x^2 + x - 1$ (ب) $f(x) = x^2 + x$ (ج) $f(x) = x^2 + x$ (د) $f(x) = x^2 + x$

8 ھاوکیكەى پەيوەستى بۆ دوو كۆمەلە پیدراو بریتیە لە
-0.24 لە كاتیكدا پاستەهێلى باشتترین نواندە
تەوەرەى دوو لە $y = 10$ دەپۆت. كام لەمانەى
خوارەو مەرج نیە پاست بۆت ؟

(ا) تا بەهەىكانى كۆمەلەیهك زیاد بكات بەهەىكانى
كۆمەلەكەى تر كەم دەكات.

(ب) لە پاستەهێلى باشتترین نواندە بەهەىكانى، y كەمدەكات
بەهەىكانى x ی بەرامبەر، كە لە 10 كەمتر دەپۆت.

(ج) پاستەهێلى باشتترین نواندە نموونەیهكى
باشە بۆ پیدراوكان.

(د) ئەو پاستەهێلى باشتترین نواندە، لارییەكەى سالبە.

9 كام لەم برێگەھاوتایانەى خوارەو سەرەكەى $(-2, -3)$

(ا) $y = x^2 + 4x + 1$ (ب) $y = x^2 + 4x - 1$ (ج) $y = x^2 - 4x + 1$ (د) $y = x^2 - 4x - 1$

(ا) $y = x^2 + 4x + 1$ (ب) $y = x^2 + 4x - 1$ (ج) $y = x^2 - 4x + 1$ (د) $y = x^2 - 4x - 1$

10 كام لەمانە یەكسانە بە $3(x + y)^4$

(ا) $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$ (ب) $3x^4 + 12x^3y + 18x^2y^2 + 12xy^3 + 3y^4$ (ج) $81x^4 + y^4$ (د) $3x^4 + 3y^4$

(ا) $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$ (ب) $3x^4 + 12x^3y + 18x^2y^2 + 12xy^3 + 3y^4$ (ج) $81x^4 + y^4$ (د) $3x^4 + 3y^4$

(ا) $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$ (ب) $3x^4 + 12x^3y + 18x^2y^2 + 12xy^3 + 3y^4$ (ج) $81x^4 + y^4$ (د) $3x^4 + 3y^4$

(ا) $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$ (ب) $3x^4 + 12x^3y + 18x^2y^2 + 12xy^3 + 3y^4$ (ج) $81x^4 + y^4$ (د) $3x^4 + 3y^4$

11 لاری پاستەهێلى $y = mx + b$ موجهە و یەكترپىنى

ستوونى 5. لاری پاستەهێلكە دەست بە كەمبوونەو
دەكات كام لەمانە هەلەیه ؟

(ا) یەكترپىنى ئاسۆی پاستەهێلكە نوێیەكە كەمترە
لە یەكترپىنى پاستەهێلكە بنەرەتییهكە.

(ب) پاستەهێلى نوێ پاستەهێلى بنەرەتى تەنها لە
(0, 5) دا دەپۆت.

(ج) لاری پاستەهێلى نوێ گەورەترە لە 0.

(د) پاستەهێلى نوێ تەریبە بە پاستەهێلى بنەرەتى.

21 رادىيۆم - 226 (Radium - 226) بۇ چارەسەرى پزىشكى بەكار دەھىنرېت نىوھى تەمەنى ئەم ماددە 1620 ساتە.

- أ بهای k بدۆزەو كەسەر بەرادىيۆم - 226
 ب 100 g لە رادىيۆم - 226 پاش 3240 سال
 چەندى لىدەمىنېتەو؟ وەلامەكەت نزيك
 بکەوہ بۇ نزيكتريں گرام.

22 زريان 26 شەتلى سنەوېەرى ھەيە. دەيەوېت لە دوورى يەكساندا، بيانرېوېنېت، بە دەورى باخچەيەكى چوار گۆشە درېژى لايەكى 21 مەتر بېت، لە ھەر گۆشەيەكى شەتلىك دەروېنېت.
 أ زۆرتريں ژمارەى لە توانادابووى شەتلەكان
 كە بتوانيت بېروېنېت چەند؟

ب ماوہى نىوان دوو شەتل چەندە؟
 23 ماوہ لە ئەنجامى دابەشكردەكە بدۆزەرەوہ.
 $x - 4 - 2x^5 + 6x^4 - 10x^3 - 2x^2 + 54x + 14$

درېژە وەلام

24 ئەم خشتە ژمارەى كاتژمېرەكان دەنوېنيت كە خوېندكارەكە ھەموو ئىوارەيەك بۇ بە جيھېنانى ئەركى مالەوہ دەيخايەنېت بۇ ھەندىك لە پۆلەكان.

12	10	8	6	4	(x)
3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	(y) ژمارەى كاتژمېرەكان

- أ دياربېكە ئەم پېدراوانە توانيېە.
 ب پېدراوہكانى خشتەكە بە شيوہى
 پروونكردەوہيى بنويئە.
 ج پاسەدانى ئەوہ بکە نەخشەى $f(x) = \frac{1}{16}(\sqrt{2})^x$
 نمونەيەك بۇ پېدراوہكان دەنوېنېت.
 د خوېندكارى پۆلى سى يەم خوېندنى ھەموو
 ئىوارەيەكى چەند دەخايەنېت؟

پيزكراوہى $N = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ بەكاربېئە بۇ
 شيكاركردى دوو راھيئانى 12، 13

12 دانەى n_{21} چەندە؟
 أ 2 ب -3 ج 4 د -6

13 كام لەمانە ھەلگەراوہى پيزكراوى N
 أ $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}$

كورتە وەلام

14 دانەى وونبوو چەندە؟
 $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \square & 2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 & 10 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

15 بەھای $\log_{6.25} 2.5$ چەندە؟
 16 ياساى ھاوگېشەى دووجا بەكاربېئە بۇ
 دۆزىنەوہى رەگى موجب بۇ نەخشەى
 $f(x) = x^2 + 2.6x - 7.31$

17 دووبارە بۆوہى رەگى 2 لەم ھاوگېشەيەدا چەندە؟
 $x^3 - 8x^2 + 20x - 16 = 0$

18 جيگۆركېى نەخشەى بنەرەتى $f(x) = x^2$ بۇ نەخشەى
 $g(x) = \frac{1}{2}(5x)^2 - 4$ كرا ھاوگۆلكەى
 چوونەوہيەكەكەى چەندە؟

19 كام ھيژ لە ھيژەكانى 2 يەكسانە بە؟ 268435456

كورتە وەلام

20 يەكېك لە خوېندگاكان بژمېرى چاپەكۆنەكانى خستە
 مەزاد بۇ فروشتن وداينكردى بە گۆژمەى لە
 5 200 000 دينار كەمتر نەبېت خوېندنگا كە نرخى
 بژمېرى 500 000 دينارو نرخى ئامېرى چاپى بە
 50 000 دينار ديارىكرد خوېندنگاكە بەھيواى 5
 بژمير بۇ ھەردوو ئامېرى چاپ بەلايەنى كەمەوہ
 بفروشت.

أ سىستەمى لاسەنگەى ھيلى بنووسە پرسيارەكە
 بنويئيت x ژمارەى بژميرەكان y ژمارەى
 ئامېرى چاپەكانە.

ب بە شيوہى پروونكردەوہيى سستەمى ئەو
 لاسەنگانەى نووسيوئە بنويئە.

سېفەتى نەخشەكان

Properties of Functions

بەشى پېنجەم

وانەكان

1-5 نەخشەى پەلدار

لاپەرەى تەكنۆلۇژيا

2-5 جېگۇرپكىى نەخشەكان

تاقىكرىنەوەى نىوەى بەش

3-5 كرىدارەكان لەسەر نەخشەكان

4-5 نىوونە بىركارىيەكان

خاشاكەكانى بۆشايى

گەشتەكانى بۆشايى ئاسمان لە پاش خۇيان

زىاتر لە 28 000 پارچە خاشاكان

جېھىشتووە، لە بۆشايىدا مەلەدەكەن. دەتوانىت

ئەو ئاراستەى كە زىادىوونى ژمارەى ئەو

خاشاكانەى دەيگرە بەر شىبكەيتەو بە

بەكارهينانى نەخشەكان و

پوونكرىنەوەكانيان

ئايا تۆ ئامادەيت؟

✓ زاراۋەكان

ھەر زاراۋەيەك بە يېتاسەكەي لاي چەپ بېسەتەۋە.

- | | | | |
|-----------|---|---|--|
| پاڭىشان | 1 | ا | ليكۆلنەۋەيەكى ئاماربيە بۇ پەيۋەندى نىۋان دوو گۇراۋ. |
| لارى | 2 | ب | تيكراي نەگۇر بۇ گۇراۋنى نەخشەي ھيلى. |
| ليژبۈنەۋە | 3 | ج | پىژە لەنىۋان دوو كۆمەلە لە پىۋانەكان. |
| پەيۋەستى | 4 | د | جىگۇرپكىي ئەندازەيى ھەر خاللىك لە خالەكانى شىۋە ئەندازەيەكەيان |
| | | | بۇ پروونكرنەۋەيى بەھەمان ماۋە و ئاراستە دەجولپىت. |
| | | ه | پىۋانەي ھىزى پەيۋەندى ھيلى نىۋان دوو گۇراۋ و ئاراستەكانيانە. |

✓ پىكەۋە بەستنى دەق و جەبر

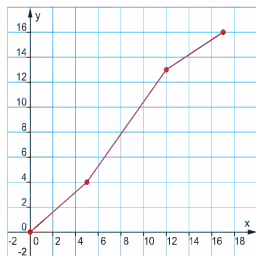
ھاۋكىشەيەك بنووسە ھەر بارىك لەمانە بنويىت.

- | | |
|---|---|
| 5 | تيچۈۋنى بەكرىگرتنى ستۇدىۋى تۆماركردن كاتژمىرى يەكەم 30 000 دىنارەو 20 000 دىنار |
| 6 | بۇ ھەر كاتژمىرىكى زىادە |
| 6 | تانكىيەكى ئاۋ 30 گالۇن ئاۋى تىدايە، ترومپايەك 8 گالون ئاۋ زىاد دەكاتە سەرى بۇ ھەر خولەككىك. |

✓ ھىلە پروونكرنەۋەيەكان

ۋىنەي پروونكرنەۋەيى بەرامبەر بەكاربەيتنە بۇ ديارىكردى بەھاي داۋاكراۋ

- | | | | | | |
|----|--------------------------|----|---|----|--|
| 7 | $f(6)$ | 8 | $f(15)$ | 9 | بەھاي x كاتىك $f(x)=2$ |
| 10 | بەھاي x كاتىك $f(x)=9$ | 11 | لارى پارچە راستەھيلى نىۋان $x=6$ و $x=14$ | 12 | لارى پارچە راستەھيلى نىۋان $x=14$ و $x=18$ |



✓ ليكدانى دوو پادەدارەكان

ليكبدە، پاشان بە سادەترين شىۋە بنووسە.

- | | | | | | |
|----|-----------------|----|--------------------|----|----------------|
| 13 | $(x-6)(x+4)$ | 14 | $(6-x)(4-x)$ | 15 | $(5x+8)(2x-7)$ |
| 16 | $(x^2-7)(4x+5)$ | 17 | $(3x^2+8)(7x^2+8)$ | 18 | $(x-8)(x+8)$ |

✓ نووسىنى برى پادەدارەكان بەسادەترين شىۋە

ئەمانە بە سادەترين شىۋە بنووسە.

- | | | | |
|----|------------------------|----|--------------------------|
| 19 | $8(3x^5)-(2x)^3(5x^2)$ | 20 | $5(x+3)^2-6(x+3)$ |
| 21 | $3x(4-x^3)-6x^2(x+4)$ | 22 | $3x^3(x^2+4)^2-x(x^4-5)$ |

رېبەرى خويىندىن: تېرۋانىن لەسەر بەشەكە

Vocabulary

زاراۋەكان

Composition of functions	ئاۋىتەكردنى نەخشەكان
One-to-one function	نەخشەى يەك بۇ يەك
Piecewise function	نەخشەى رېسا پەلدار
Step function	نەخشەى پەلدار

پۇشنايەك لەسەر زاراۋەكان

بۇ راھاتن لەگەل ھەندىك زاراۋى ھاتو لەم بەشەدا، ئەم ھەنگاۋانە پەپرەيكە:

1. لە واتاكانى وشى ئاۋىتە كۆمەلە شتىك پېكەۋە دابنرىن، چۆن وشى ئاۋىتە بە واتايە بەكارىت بۇ تېگەيشتنن لە ئاۋىتەكردنى نەخشەكان لە بېركارىيدا.

2. ئەگەر سەيرى پەلەكانى پەيژە بكەيت لە تەنیشتەۋە، ئايا ئەۋە دەبىنىت وئەى پوونكردەۋەى نەخشە دەنۆيىت؟ تا چ رادەيكە لە پوونكردەۋەى نەخشەپېسا پەلدار دەچىت؟

3. پېناسەى نەخشەت لەبېرىت، بۇ چوونت لەسەر نەخشەى يەك بۇ يەك چىيە؟ نمونەيكە لە بېركارىيدا بھېنەۋە و نمونەيكە ژيانى پۇژانە بۇ نەخشەى يەك بۇ يەك و نمونەيكە تر بۇ نەخشەيكە يەك بۇ يەك نەبىت.

4. پەلەكانى پەيژە تەرىپىن و بەيەكەۋە نەبەستراۋىن، چى تېدەگەى لە دەستەۋاژەى نەخشەى پەلدار.

لە رابردودا

خويىندوۋتە

- نەخشە جياۋازەكان و پوونكردەۋەكانىان و ھاۋكېشەكانىان.
- جېگۇپكى زۆر لە نەخشەكان.
- جېبەجېكردى كىدارە جياۋازەكان لەسەر پرە جياۋازەكان.
- بەكارھىنانى نەخشە ھېلپەكان و دوۋجاكان و تۈنەكان بۇ دروستكردى نمونەى بېركارىيانە، بارەكانى ژيانى پۇژانە بنۆيىت.

لەم بەشەدا

لەمەۋودا فېردەبىت

- نواندە جياۋازەكانى نەخشەكە.
- جېگۇپكى نەخشە بىكە پەلدارەكان.
- ئەنجامدانى كىدارەكان لەسەر نەخشەكان.
- دروستكردى نمونە بېركارىيەكان بە بەكارھىنانى نەخشە جياۋازەكان.

لە داھاتودا

دەتۋانىت كارامەيەكانى ئەم بەشە

بەكارىيىت

- لە قۇناغەكانى داھاتو كە جياكارى و تەۋاۋكارى و ئامار دەخوئىن.
- لە خويىندى ۋانەكانى ترى ۋەك تەندروستى و فېزىيا و كىمىيا و ئابۋورىدا.
- لە دەرۋەى خويىندىگا بۇ دارشتنى نمونەى پىدارۋەكان و جېبەجېكردى بېشېنىيەكان، لە بۋارە جۆر بەجۆرەكانى ۋەك ۋەرزىش و گەشت و پارەدار كىردن.

بىر كارى بە خويندە وە و نووسىن



ستراتىژى خويندە وە: پرسىارەكان بخويندە وە بۆئە وە تىبگەيت

پرسىارەكە چەندجارىك بخويندە وە، بۆئە وە لە بىرۆكە پرسىارەكە تىبگەيت پاشان پرسىارەكە بە شىنەيى و بە وردى بخويندە وە بۆ دىارىكردى داواكراو. لەكاتى خويندە وەدا ھىل بەژىر زانىارىيەكان بكېشە - كىلەكانى دەقى پرسىارەكە ھەنگاوى جۆراو جۆر بىت، بىكە بەچەند بەشك، پاشان پلان بۆ شىكاركردەكەى دابرىژە.

دۆزىنە وەى بۆشايى نەخشەى $f(x) = \frac{7}{2}\sqrt{x}$ پىسايەكە بۆ خەملاندنى ئاسۆ بەكىلۆمەتر كاتىك چاوى بىنەر لە بەرزى x مەتر لە پرووى زەوى بىت. دەتوانىت وینەى پروونكردە وەبى نەخشەكە بكېشيت بۆ بەرامبەرەكەت لەسەر مەريخ بەكېشانىكى ئاسۆيى ھاوكۆلكەكەى $\frac{9}{5}$ بىت. نەخشەى دوورى ئاسۆ لە مەريخ بنووسە و بەكاربەينە بۆ ھەژماركردى دوورى ئاسۆ لە كەشتىيەوانى بۆشايى سەر مەريخ، لە پرووى ھەسارەكە وە 6 مەتر چاوى بەرز دەكاتە وە.

ھەنگاو	پرسىار	وەلام
1	بىرۆكە پرسىارەكە چىيە؟	جىگۆركى نەخشەى رەگى دووجا بە گۆپىنى ھاوكۆلكەكانى.
2	پرسىارەكە داواى چ وەلامىك دەكات؟	• نووسىنە وەى نەخشەكە بۆ تىخستى ھاوكۆلكەكەى نوئ. • ھەژماركردى بەھاي نەخشە نوپىيەكە كاتىك x بەھايەكى دىارىكراو وەردەگرىت.
3	ئەم زانىارىيانە - كىلى پىويس بۆ شىكاركردى پرسىارەكە چىن؟	• نەخشەى $f(x) = \frac{7}{2}\sqrt{x}$ دوورى لەسەر زەوى دەنوئىت. • نەخشەى سەر مەريخ برىتييەلە كشانى نەخشەى زەوى بەھاوكۆلكەكەى $\frac{9}{5}$. • كەشتىيەوانى بۆشايى لەسەر پرووى مەريخ 6 مەتر چاوى بەرز دەكاتە وە.
4	پلانم چىيە بۆ شىكاركردى ئەو پرسىارە فرە ھەنگاوە؟	• نووسىنى نەخشەى دوورى ئاسۆيى لەسەر مەريخ. • ھەژماركردى بەھاكەى كاتىك $x = 6$.

ھەولبە

بۆ ھەر پرسىارىك خشتەيەك بۆ ھەنگاوەكانت دروستبەكە (ھەرەكە لەسەرە وە ديارە)

1. درىژى لاكېشە $x + 5$ ، پانى $x + 4$ مەتر بىت خشتەيەكى
پىژەيى بنووسە، پىژەى پرووبەرى لاكېشەكە بۆ چۆوہەكى
بنوئىت. بوار و مەوداى گونجاو بۆئەم خشتەيە ديارىبەكە.
2. نەخشەى $d = \frac{15w}{2.54\pi}$ نمونەيەكە بۆ ھەژماركردى تيرەى
گورىس (بەسانتىمەتر) كە پىويسە بۆ بەرزكردە وەى w تەن.
گورىسك تيرەكەى 3.5 cm بىت بارستاى چەن تەن زياتر
دەتوانىت بەرزبكاتە وە لە گورىسكى تر تيرەكەى 5.1 cm بىت؟



نەخشە پړسا پەلدارەکان

Piecewise Functions

1-5

ئامانجەکان

- نەخشە پړسا پەلدار دەنوسیت و وێنە پرونکردنەوێیەکی دەکیشیت.
- نەخشە پړسا پەلدارکان بۆ باسکردنی باری ژبانی پۆزانه بەکار دەهێنیت.

زاراوەکان Vocabulary

- نەخشە پړسا پەلدار
Piecewise function
- نەخشە پلەدار
Step function

بۆچی ئەمە فیژدەبین؟

دەتوانیت نەخشە بکە پەلدار بەکار بهێنیت بۆ نواندنی توانای پێشپڕکێکار لە پێشپڕکێ سیانی (نموونه 4).

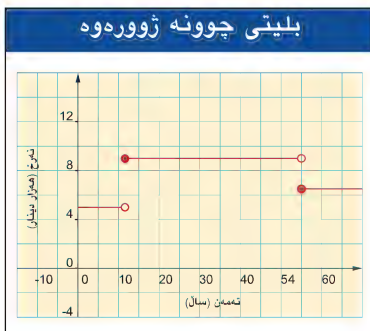
نەخشە پړسا پەلدار **Piecewise Function** بریتییە لە کۆبونەوەی نەخشەیکە یان زیاتر که لقاەکانی، پړسای ئەو نەخشە لە بەشیکەو بەشیکە بۆ بەشیکە تر بوارەکی دەگۆرێت بۆ نموونه. نرخ بلیتی چوونە ژورەوێ مۆزەخانە نیشتمانی بە جیاوازی تەمەنەکان دەگۆرێت، بە جۆرێک که بۆهەر چەشنە تەمەنێک نرخێک دیاری دەکریت بەم شێوەیە. بەهای ئەم نەخشە نرخ بلیتی چوونە مۆزەخانە بە پێی تەمەن دەنوێنێت، نەگۆرە لەمەودای هەر بەشێکدا که بوارەکی چەشنە تەمەنێک دەنوێنێت، بەهایەکان بە پێی جیاوازی بەشەکان جیاوازدەبن. (نرخ بلیتەکان بە پێی تەمەنەکان جیاوازا دەبن).

نموونه 1 جیەجیکردن لە بوارێ خۆشیدا

خشتەیکە بۆ نواندنی وێنە پرونکردنەوێی بەرامبەرت دروستیکە. پاشان بە وشە باسیکە.

هەنگاوی 1 خشتەیکە دروستیکە.

لەبەرئەوێ سەری پارچە راستەهێڵەکانی ناو وێنە پرونکردنەوێیەکی بوارەکی دەکەن بە سێ بەشەو. خاڵی سەرەکان و ئەو خاڵانە لێوێ نزیکە بۆ دیاریکردنی ئەو بەشە بەکار بهێنە.



نرخ بلیتی چوونە ژورەوێ

نرخ	تەمەن
5000	لە 5 بۆ 12
9000	لە 13 بۆ 54
6500	لە 54 گەورەتر

بوارێ نەخشەیکە بۆ سێ بەش دابەش دەکریت

تەمەنەکانی لە 12 کەمتر $[5, 12)$

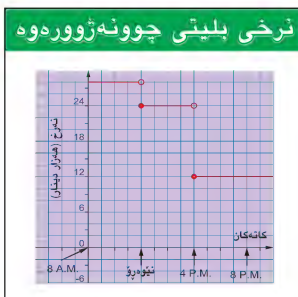
تەمەنەکانی لە 13 کەمتر نەبێ و لە 55 کەمتر بێت $[13, 55)$

تەمەنەکانی کەمتر نەبێت لە 55 $[55, \infty)$

هەنگاوی 2 باسکردنی بە وشە بنوسە.

بەشەکانی بوار و نرخەکان بەپێی خشتەیکە بەکار بهێنە.

تەمەنی کورێک لە 12 سالی بەرەو خوار بۆ نرخ بلیتەکی 5000 دینار دەدات بەلام ئەوێ لە 13 سالی کەمتر نەبێت و لە 54 سالی زیاتر نەبێت بۆ بلیتەکی 9000 دینار دەدات. ئەوێ لە 55 سالی کەمتر نەبێت 6500 دینار دەدات.



1. خىشتەيەك دروستىكە ويئە پروونكردەنەويى بەرامبەر



بنويىت، پاشان باسكردى بە وشە بنوسە.

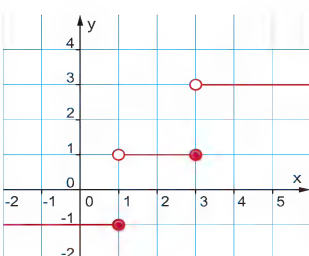
دەتوانىت نەخشەي پىسا پەلدار بە نوسىنى نەخشەيى دەرېپىت
وەك نەخشەيى نموئە 1، بەم شىۋەيە دەنوسرىت.

$$f(x) = \begin{cases} 5000 & 0 < x < 13 \\ 9000 & 13 \leq x < 55 \\ 6500 & x \geq 55 \end{cases} \quad \text{لق}$$

بەم شىۋەيە دەخوئىرىتەو، $f(x)$ يەكسانە بە 5000 كاتىك x گەرەتەر لە 0 و بچوكتەر لە 13 بىت،

9000 كاتىك x كەمتر نەبىت لە 13 و كەمتر لە 55 بىت، 6500 كاتىك x كەمتر نەبىت لە 55.

بۇ دىارىكردى بەھاي نەخشەيەكى پىسا پەلدار بۇئە بەھايەي دىدرىت، لىقەكەي دىارىكە، پاشان
پىساي نەخشەيى ئەو بەشە بەكاربەيئە.



جۆرىك لە نەخشەيى بنكە پەلدار سىفەتلىكى گرنگيان ھەيە

لە بەھايەكەي نەگۆرە لەھەر بەشكە لە بەشەكانىدا. بەم

نەخشەنە دەوترىت نەخشەيى پەلدار **Step Function**.

نموئە لەسەر نەخشەيى پەلدار:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \leq 3 \\ 3 & x > 3 \end{cases}$$

بۇ تىگەيشتىت لەھۆكارى ناوانى نەخشەكە بە پەلدار، بە وردى سەرنجى پروونكردەنەويى

نەخشەكە بەدە.

ھەژماركردى بەھاكانى نەخشەيى پىسا پەلدار

2 نموئە

بۆھەر نەخشەيەكى پىسا پەلدار بەھاي بەرامبەر $x = -2$ و $x = 5$ بدۆزەو.

$$f(x) = \begin{cases} -5 & x \leq 0 \\ 4 & 0 < x \leq 3 \\ 12 & x > 3 \end{cases} \quad \text{أ}$$

لەبەرئەوئەي $-2 < 0$ ، ئەو ئەلقەي بەرامبەر $x \leq 0$ بەكاربەيئە

$$f(-2) = -5$$

لەبەرئەوئەي $3 < 5$ ، ئەو ئەلقەي بەرامبەر $x > 3$ بەكاربەيئە

$$f(5) = 12$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4 & x < 5 \\ x^2 - 3 & x \geq 5 \end{cases} \quad \text{ب}$$

لەبەرئەوئەي $-2 < 5$ ، ئەو ئەلقەي بەرامبەر $x < 5$ بەكاربەيئە

$$f(-2) = 3(-2) + 4 = -2$$

لەبەرئەوئەي $5 \leq 5$ ، ئەو ئەلقەي بەرامبەر $x \geq 5$ بەكاربەيئە

$$f(5) = 5^2 - 3 = 22$$

2. بۇ ھەر نەخشەيەكى پىسا پەلدار بەھاي بەرامبەر $x = -1$ و $x = 3$

بدۆزەو.

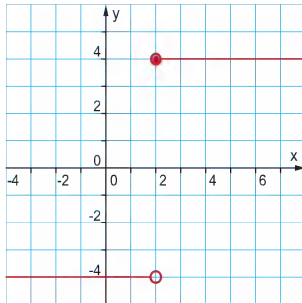


$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & x < 0 \\ 5x - 2 & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ب}$$

$$f(x) = \begin{cases} 12 & x < -3 \\ 15 & -3 \leq x < 6 \\ 20 & x \geq 6 \end{cases} \quad \text{أ}$$

وینە پوونکردنەوی هەر نەخشەیکە بکێشه.

$$f(x) = \begin{cases} -4 & x < 2 \\ 4 & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{ا}$$

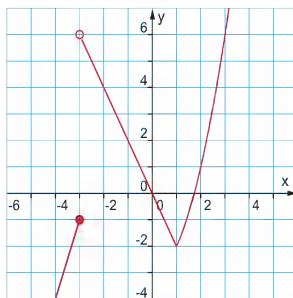


پوونکردنەوی نەخشەیکە لەدوو بەش پێکدێت و هەریەکەیان نیو راستەهێڵە لەبەرئەوی $x = 2$ بوازی نەخشەیکە دەکات بەدوو بەشەوه، بەهای نەخشەیکە لەو بەهایدا هەژماریکە. بەکارهێنانی دوو لقی بنکەیکە. لەبەرئەوی $f(x) = -4$ کاتی $x < 2$ وینە خالی $(2, -4)$ لە شیۆی بازنەیکە بچوک کراوی بکێشه، پاشان بە دەستپێکردن لەم خالەوه وینە نیو راستەهێڵەیکە بە ئاسۆیی بۆلای چەپ بکێشه. لەبەرئەوی $f(x) = 4$ کاتی $x \geq 2$ وینە خالی $(2, 4)$ لە شیۆی بازنەیکە بچوکی پێکراوه بکێشه، و بەدەستپێکردن لەم خالەوه نیو راستەهێڵەیکە بە ئاسۆیی بۆلای راست بکێشه.

x	$3x+8$	$-2x$	x^2-3
-4	-4		
-3	-1	6	
-2		4	
-1		2	
0		0	
1		-2	-2
2			1
3			6

$$g(x) = \begin{cases} 3x+8 & x \leq -3 \\ -2x & -3 < x < 1 \\ x^2-3 & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{ب}$$

نەخشەیکە لەدووبەشی هێڵی و بەشیکی دووجا پێکدێت. بوازی نەخشەیکە لە $x = -3$ و $x = 1$ بەش دەبێت. خستە بەهایەکان بۆ وینە کێشانی پوونکردنەوی هەرلقی بەکاربهێنە.



بازنەیکە پێ $(-3, -1)$ و بازنەیکە بەتال لە $(-3, 6)$ دیاریکە بە شیۆیکە لەسەر پوونکردنەوهکە بەهای نەخشەیکە لە $x = -3$ بەپوونی دیاریکە. پێویست بە دانانی خال لەسەر $(-2, 1)$ ناکات. چونکە پوونکردنەوی دوو لقی هەم خالەدا بەیهک دەگەن.

3. وینە پوونکردنەوی نەخشەیکە بکێشه.

$$f(x) = \begin{cases} -3x & x < 2 \\ x+3 & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{ب} \quad f(x) = \begin{cases} 4 & x \leq -1 \\ -2 & x > -1 \end{cases} \quad \text{ا}$$



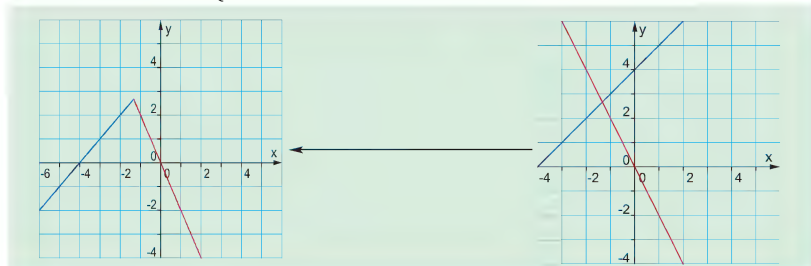
سەرنبجە نەخشەیی پێسا پەلدار مەرج نییە نەخشەیکە بەردەوام بێت، واتە پوونکردنەوهکە خالی لێکداپراوی تێدا. بۆ نووسینی پێسای نەخشەیی پێسا پەلدار یەکەمجار دیاریکە لە کویدا بوازی نەخشەیکە بەش دەبێت، پاشان پێسای هەر بەشی بۆ نووسە پاش ئەو پێساکان لە نووسینی نەخشەیدا کوێکەوه.



لە خۆیتەکارەوه بۆ خۆیتەکار وێنەى پروونکردنەوهیى نەخشە پێسا پەلدارەکان

کاتێک وێنەى پروونکردنەوهیى نەخشەى پێسا پەلدار دەکێشم، وێنەى پروونکردنەوهیى ھەر لقیەک دەکێشم، ھەر وەکو نەخشەى ھەڵە، پاشان ئەم

بەشە پروونکردنەوهیى بە ھاىەکانى x ی $f(x) = \begin{cases} x+4 & x < -2 \\ -2x & x \geq -2 \end{cases}$ نەمۆنە دەکەوێتە دەرەوهى بەشەکە دەسپەرمەوه.



جێبەجێکردن لەسەر وەرزش

4 نەمۆنە

ئالان بەشداری لە پێشبڕکێى سیانی بەدرێژى 153 km کرد، لە ھەیکە کاتژمێر دا 3 km مەلەى کرد و 120 km بەسواری پاسکیل لە ماوهى 4 کاتژمێردا بڕى. پاشان 30 km بۆ ماوهى 3 کاتژمێر پاریکرد. وێنەى پروونکردنەوهیى بکێشە بۆ ئەو دوورییە ئالان بەپێى کات بڕیویەتى. پاشان نەخشەى ھەڵە پێسا پەلدار بۆ ئەو پروونکردنەوه بنوسە.

ھەنگاوى 1 خشتەى ھەڵە دروستبکە پێدراوەکان کورتبکاتەوه. یاسای

پەيوەندى نۆوان خێرایى و کات و دوورى براو بەکاربھێنە، بۆ

دیاریکردنى تیکرایى خێرایى ئالان لە ھەر قۇناغىکى پێشبڕکێکەدا.

نۆوانى ئالان لە پێشبڕکێى سیانی			
قۇناغ	کات	دوورى	خێرایى
مەلەوانى	1	3	3
پاسکیل سواری	4	120	30
پاکردن	3	30	10

ھەنگاوى 2 لەبەرئەوهى کات گۆراویکى ئازادە، دیاریبکە لە

کوێدا بواری نەخشەى بەش دەبێت بە بەکارھێنانى پێدراوەکانى کات.

مەلەوانى $0 \leq t \leq 1$ یەك کاتژمێر مەلەى کردووه

پاسکیل سواری $1 < t \leq 5$ 4 کاتژمێر پاریکردووه

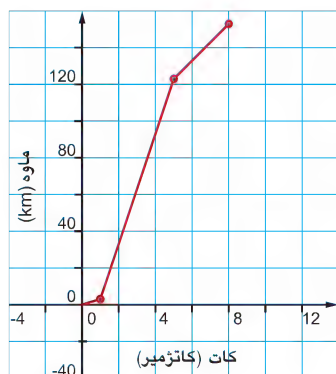
پاکردن $5 < t \leq 8$ 3 کاتژمێر پاریکردووه

ھەنگاوى 3 وێنەى ھەڵەى پروونکردنەوهیى دروستبکە.

پاش کاتژمێرێک. ئالان 3 km بڕى. ھەتاکو ئەوهى

بڕیویەتى لە کۆتایى قۇناغى دووھم (پاش 5 کاتژمێر)

123 km بڕى لە کۆتاییدا 153 km تەواوکرد لە 8 کاتژمێردا.



ئاگاداریە!

دەتوانرێت پەيوەندى $d = vt$

بنوسرێت، بەشێوهى $v = \frac{d}{t}$

بۆ دۆزینەوهى تیکرایى خێرایى

هەنگاوی 4 نەخشەى ھێلى بۆھەر لقیك بنووسە.

شێوەى لارى - خال بەکاربھێنە

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مەلەوانى $d = 3t$ و خالى $m = 3$ بەکاربھێنە $(0, 0)$

بە پاسکیل $d = 30t - 27$ و خالى $m = 30$ بەکاربھێنە $(5, 123)$

پاکردن $d = 10t + 73$ و خالى $m = 10$ بەکاربھێنە $(8, 153)$

$$d(t) = \begin{cases} 3t & 0 \leq t \leq 1 \\ 30t - 27 & 1 < t \leq 5 \\ 10t + 73 & 5 < t \leq 8 \end{cases}$$

نووسینی نەخشەى بۆئەم نەخشە بریتییه لە:

4. پێباز لە یەكێك لە چێشتخانەكانى پایتەخت ئیش دەكات، بۆھەر كاتژمێرىكى ئیش 8000 دینار وەردەگرێت، كاتێك كاتژمێرەكانى ئیشکردنى ھەفتەىەكى لە 40 كاتژمێر تێپەرنەكات. و 12 000 دینار وەردەگرێت بۆھەر كاتژمێرىكى ئیشکردن زیاد لە 40 كاتژمێر تێپەرنەكات. وێنەىەكى پوونکردنەوھى بكێشە، دەستكەوتنى پێباز بەپێى ژمارەى كاتژمێرەكانى ئیشکردن لە ھەفتەىەكدا بنوینێت، ئەگەر بزانیات ناتوانیت زیاتر لە 60 كاتژمێر لە ھەفتەىەكدا ئیش بكات. نەخشەىەكى پێسا پەلدار بۆئەو پوونکردنەو بنووسە.



بیركەو و تاوتویكە

1. پونكەو ئەگەر لە توانادابێت نەخشەى پەلدار بەدەستبھێنرێت بەھایەكەى نەگۆرێت. لەھەر لقیك و پوونکردنەوھكەى نەچراوێت.
2. پێكخەریە ئەم خشتەىەى خوارەو دروستكە و تەواویكە. بۆھەر چوارچۆیەكە باسى بوار و مەودای ھەموو نەخشەكە بنووسە و نمونەى بۆ بھێنەو.



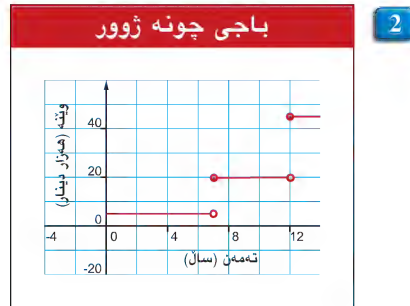
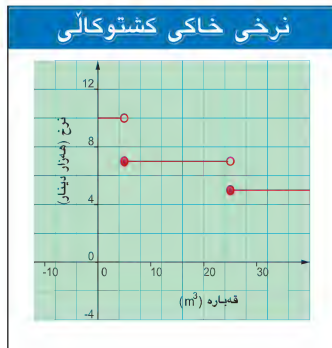
نەخشە	بوار	مەودا	نمونە
پێسا پەلدار			
پەلدار			

رَاهِيَّانِي ئَارَاسْتَهْكَرَاو

1 پەيوەندى ئىۋان نەخشەى پەلدار و نەخشەى رېسا پەلدار پرونىكەو.

1 پروانە نمونە

خستەيەك بۆھر وینەيەكى پرونکردنەوہ بکیشە و بە وشە باسیبکە.



2 پروانە نمونە

بەهای نەخشەكە هەژماربەكە كاتیك $x = -6$ و $x = 3$

$$f(x) = \begin{cases} -8 & x \leq -5 \\ 0 & -5 < x < 6 \\ 5 & x \geq 5 \end{cases} \quad 4$$

$$g(x) = \begin{cases} 5x - 9 & x < 2 \\ 4 - x^2 & x \geq 2 \end{cases} \quad 5$$

3 پروانە نمونە

وینەى پرونکردنەوہی نەخشەكە بکیشە.

$$f(x) = \begin{cases} 7 & x < -2 \\ -2 & x \geq -2 \end{cases} \quad 6$$

$$g(x) = \begin{cases} -2x + 8 & x \leq 4 \\ \frac{1}{2}x & x > 4 \end{cases} \quad 7$$

4 پروانە نمونە

8 تیچوونی بەکرى گرتنى كەشتیەكى بچوك 20 000 دینارە لە كاتژمێركدا بۆ 4 كاتژمێرى یەكەم، و 3 000 دینارە بۆھر كاتژمێركى زیاده، وینەى پرونکردنەوہی بکیشە، تیچوونی بەكریگرتنى كەشتیەكە بۆ ژمارەى كاتژمێرەكان بنوینیت، كە لە 8 كاتژمێر زیاتر نەبێت.

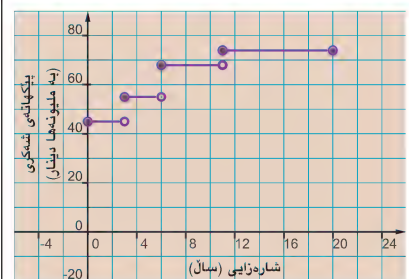
پاښتون وشکيارکړنې پرسيارهکان

خسته يه ډروسټکه بوهه وینه يه کی پروونکرده، پاشان به وشه باسیکه.

پاښتاني نازلاد

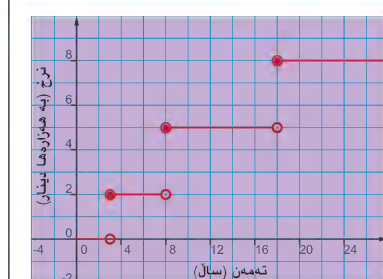
بوشکارکړنې	تماشای
پرسيارهکان	نمونه
1	10-9
2	12-11
3	14-13
4	15

موچې سالانه بهیې سالهکانی خرمهت



10

مرخکانی یوځمکي ټراوه



9

به های نه خسته که هه ژماریکه کاتيک $x = -2$ و $x = 2$ و $x = 6$.

$$f(x) = \begin{cases} 12 - 9x & x \leq 0 \\ x^2 + 3x & 0 < x < 3 \\ 4^x & x \geq 3 \end{cases} \quad 12$$

$$f(x) = \begin{cases} 9x - 2 & x < -3 \\ x^2 - 3 & -3 \leq x < 1 \\ 5 & x \geq 1 \end{cases} \quad 11$$

وینه پروونکرده و بهی نه خسته که بکیشه.

$$g(x) = \begin{cases} -2x - 5 & x < -2 \\ x^2 - 3 & x \geq -2 \end{cases} \quad 14$$

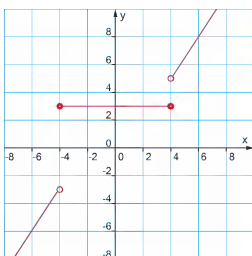
$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x + 1 & x < 4 \\ \frac{3}{4}x - 2 & x \geq 4 \end{cases} \quad 13$$

نرخي مه پرينه وه	بارستايي (kg)
30 000	15 يان كه متر
50 000	ننوان 15 و 50
75 000	50 يان زياتر

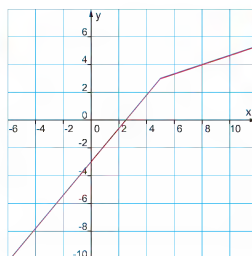
15 تيچووني پرينه وهی خوری مه پ دهگورپيت، به گوراني بارستاکی.

هم خسته ي بهرام بهر نرخه کانی پرينه وهی مه پیکه که، هوشيار و مریده گريت. وینه پروونکرده و بهی بکیشه، تيچووني پرينه وهی مه پ بنوینيت، بارستايي له 60 kg زياتر نه بپيت. نه خسته يه کی بنکه په لدار بنووسه همه دهر بپريت.

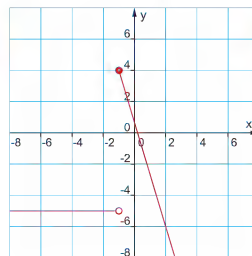
بوهه وینه يه کی پروونکرده وه نه خسته يه کی رپسا په لدار بنووسه.



18



17



16

19 گهراج ئوتومبيل له پایتهخت بوهه کاترميریکي وهستان 6000 دينار وهرده گريت،

له ماوهی چوار کاترميری يه که مده، بوهه کاترميریکي زياده 3000 دينار وهرده گريت. نه خسته ي

رپسا په لدار بنووسه بوهه ژمارکړنې تيچووني وهستاني ئوتومبيل بهیې ژماره ي کاترميرهکان.

20 گەشت ھەلۇ و تۈنە بە ئۆتۈمبىل لە سلىمانىيەو ھەلۇ دھۆك پۇيشتن. ئەم وىنەى بەرامبەر ناوئەندەى خىرايى ئۆتۈمبىلەكە بەپىي قۇناغەكان دەنۇيىت، بۇ ماوئەى 30 خولەك لەناو شاردا بە ناوئەندەى خىرايى 45 km / h دەپۇيشت پاشان ماوئەى 3 كاتۇمىر لە پىگاي خىرا بە ناوئەندەى خىرايى 90 km / h دەپۇيشت، و 30 خولەك بە ناوئەندەى خىرايى 60 km / h دەپۇيشت لە شاخ.



أ نەخشەيەكى پىسا پەلدار بنوسە ئەو دورىيەى ئۆتۈمبىلەكە برىويەتى بەپىي كات بنۇيىت.

ب وىنەى پوونكردەوئەى نەخشەكە بكىشە.

ج **چى دەبىت ئەگەر ... ؟** ماوئەى گەشتەكە چەند دەخايەنىت ئەگەر ناوئەندەى خىرايى ئۆتۈمبىلەكە لە قۇناغى دووم 75 km / h لە جياتى 90 km / h بىت.

نەخشەى پووت بەشىوئەى نەخشەى پىسا پەلدار بنوسە.

23 $h(x) = 2|x| - 4$

22 $g(x) = |x - 4|$

21 $f(x) = |x|$

24 خزمەتگوزارى دەزگاي ھىوا بۇ نىراو پۇستىيەكان بۇ گەياندنى ھەر كىلۇگرامىك 11 000 دىنار وەردەگرىت، بۇ ئەو نىراوانەى كىشيان لە 2kg تىپەر نەكات، و بۇ ئەو نىراوانەى كىشيان لە 2kg زىاترە 3000 دىنار بۇ ھەر كىلۇگرامىك بۇنرخەكەى زىادەكرىت، و وىنەيەكى پوونكردەوئەى بكىشە بۇ تىچوونى گەياندنى نامەيەك كىشەكەى لە 2kg زىاتر نەبىت. نەخشەيەكى پىسا پەلدار بنوسە ئەمە دەربېرىت.

وىنەى پوونكردەوئەى نەخشەكە بكىشە.

25
$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & x \leq 0 \\ 2^x - 4 & 0 < x \leq 3 \\ 2x - 2 & x > 3 \end{cases}$$

26
$$g(x) = \begin{cases} -3 & x \leq 0 \\ 3^x - 4 & x > 0 \end{cases}$$

بوار و مەوداي ھەر نەخشەيەك بدۇزودە.

27
$$g(x) = \begin{cases} -\frac{5}{2}x - 2 & x \leq -2 \\ -x - 5 & x > -2 \end{cases}$$

28
$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & x < 4 \\ 3x - 7 & x \geq 4 \end{cases}$$

29 بىر كىرىمى پەخىرگەر بۇچى نواندى نەخىشە پىسا پەلدار باشتىن نواندى بۇ بەرزى سەرخى كارەبایى لە زەوى پاش t چركە لە بەرزىونەوى؟ ئایا دەتوانىت بىرىت بە نەخىشە پەلدار؟

30 بنووسە ھۆى چىيە وا دەكات بەكارەپنانى نەخىشە پىسا پەلدار باشتىن نواندى بۇ بارەكانى ژيانى پۇژانە؟ دوو نمونە بەلایەنى كەمەو لەناو وەلامەكەت بەپىنەو.

تامادە كىرىم پۇتاقى كىرىمەو

31 يەككە لە بىركارەكانى بەكىرىدانى ئۆتۆمبىل لە پۇژىكا 15 000 دىنار وەردەگىت، ئەگەر ژمارەى ئەو كىلۆمەترانەى ئۆتۆمبىلەكە دەبىرىت لە 200 km تىپەرنەكات. ئەگەر ئۆتۆمبىلەكە لە 200 km زىاتىرى بىرى لەسەر كىرىگرتە پىوىستە 50 دىنار بۆھەر كىلۆمەترىكى زىاد بدات، كام لەم نەخىشانەى خوارەو تىچوونى بەكىرىگرتنى ئۆتۆمبىلەكە بەپىى ژمارەى كىلۆمەترە بىراوكان لە پۇژىكا دەنوینىت؟

$$f(x) = \begin{cases} 15\,000 & 0 \leq x \leq 200 \\ 15\,000 + 50(x - 200) & x > 200 \end{cases} \quad \text{ج} \quad f(x) = \begin{cases} 15\,000 & 0 \leq x \leq 200 \\ 50x & x > 200 \end{cases} \quad \text{ا} \\ f(x) = \begin{cases} 15\,000 & 0 \leq x \leq 200 \\ 15\,000 + 50x & x > 200 \end{cases} \quad \text{د} \quad f(x) = \begin{cases} 15\,000x & 0 \leq x \leq 200 \\ 15\,000x & x > 200 \end{cases} \quad \text{ب}$$

32 كام لەم نەخىشانەى خوارەو نەخىشەى بەردەوامە؟

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & x < -2 \\ 2x & x \geq -2 \end{cases} \quad \text{ج} \quad f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & x < 0 \\ -1 & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ا} \\ g(x) = \begin{cases} 5x - 4 & x < 3 \\ 2x + 5 & x \geq 3 \end{cases} \quad \text{ب} \quad (x) = \begin{cases} 3x + 4 & x \leq -1 \\ 3^x + 4 & x > -1 \end{cases} \quad \text{د}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 5x & x < -5 \\ 3 - x^3 & -5 \leq x < -2 \\ 5 - x^2 & x \geq -2 \end{cases} \quad f(-2) \text{ بدۆزەو كاتىك} \quad \text{33}$$

11 د 9 ج 1 ب 5- ا

بەرنەنگارى و فراوانكىرىن

نەخىشەى گەورەترىن تەواو بىرىتىيە لە نەخىشەى $f(x) = [x]$ ھىماى گەورەترىن ژمارەى تەواو لە x زىاترنەبىت. بژمىرى پوونكىرىنەوېى ھىماى $\text{Int}(x)$ بۇ نواندى ئەم نەخىشە بەكاردەھىنىت. ئەگەر نرخى قووتوئەك شەربەت 750 دىنار بىت. ئەوا نەخىشەى $f(x) = \text{Int} \left\lfloor \frac{x}{750} \right\rfloor$ ژمارەى قووتوئە شەربەتەكانت دەداتى. كە دەتوانىت بە x دىنار بىكرىت.

34 نەخشەيەك بنووسە بۇ ھەژمارکردنى ژمارەى قووتوى پەتاتەى سوورکراوہ کە دەتوانیت بیکریت بە x دینار. ئەگەر بزانیت نرخی قوتویەك 650 دینار، ئەم خشتە بەکاربەینە بۇ دیاریکردنى ژمارەى قووتوہ پەتاتە سوورکراوہکان کە دەتوانیت بە دەھەزار دینار بیکریت.

تییینی: نەخشەى بچووکتیرین تەواو بریتییه لە $f(x) = [x]$ کاتیك $[x]$ ھیئامی کەمتیرین ژمارەى تەواوہ لە x کەمتر نەبیت وەك $f(2.9) = f[2.9] = 3$

35 گەراجى ئۆتۆمبیل 4000 دینار وەردەگریت بەرامبەر وەستانى ئۆتۆمبیلیك ماوہكەى لە یەك كاتژمیر تپەپنەكات. ئەگەر ماوہى وەستان لە كاتژمیریك زیاتر بوو، گەراجە 1500 دینار وەردەگریت بۆھەر كاتژمیریكى زیادە، یان كەرتیک لە كاتژمیریكى زیادە. نەخشەيەك بنووسە تیچوونى وەستانى ئۆتۆمبیل بەپێى كات t كاتژمیر بنوینیت. ئەم نەخشە بەکاربەینە بۇ ھەژمارکردنى تیچوونى وەستانى ئۆتۆمبیلیك بۆماوہى 5 كاتژمیر و 23 خولەك.

پیداچوونەوہى لولویچی

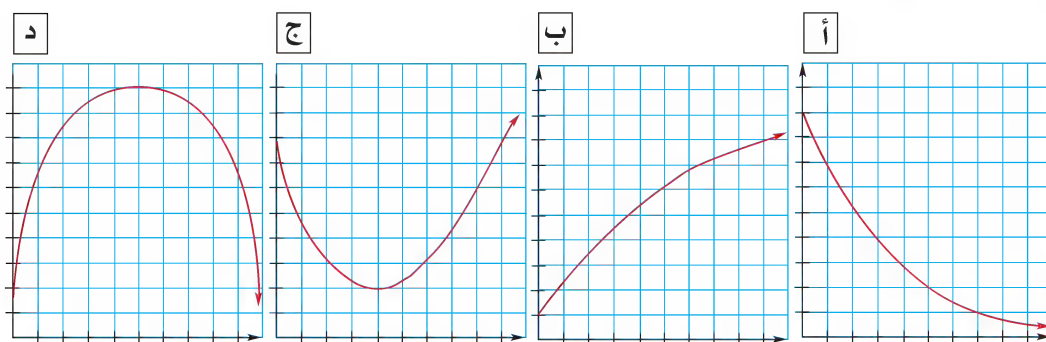
36 **ئەندازە** پەيوەندییەكى ھیلى ھەيە لایەكانى چەندلا پێكە و كۆى پێوانەكانى گۆشەكانى ناوہوى بەيەكەوہ دەبەستیت، وەك لەم خشتەى خواروہ دەردەكەویت. نەخشەيەك بۇ دەریپینی ئەم پەيوەندییە بنووسە. (وانەى 1 - 2)

ژمارەى لایەكان	3	4	5	6	8
سەرچەمى پێوانەى گۆشەكانى ناوہوہ بەپلە	180	360	540	720	1080

دەركەنارەكانى ھەر نەخشەيەك و بوار و مەوداى دیاریبکە (پۆلەكانى پێشوو)

$$f(x) = \frac{5}{x-3} + 1 \quad \text{37} \quad f(x) = \frac{3}{x+2} + 1 \quad \text{38} \quad f(x) = \frac{4}{x-1} - 3 \quad \text{39}$$

ھەریەكە لەم وینە روونکردنەوہییانە، بارێك لەپرسیارەكانى خواروہ (40 - 43) دەنوینیت دیاریكە. (وانەى 5 - 1)



40 كۆمپانیایەك یەكێك لە بەرھەمەكانى لەبازار خستەروو، بەبى ئەوہى پروپاگەندەى بۇ بكات، قازانجى دابەزى! پاشان پروپاگەندەى بۆكرد قازانجى بەرزبووہ.

41 دابەزینی نرخی بژمیر بەپێى كات.

42 دابەزینی قازانجى دوكانى ئایس كریم لە زستان، بەلام بەھار و پایز بەرز دەبیتەوہ لەھاویندا زۆر بەرز دەبیتەوہ.

43 پلەى گەرمى بەرز دەبیتەوہ. لەنیوان كاتژمیر 12:00 پاش نیوہرۆ تا 5:00 پاش نیوہرۆ.

دۆزىنەۋەى جىاۋازىيەكان و رېژەكان



بىرت بىت، ھەردەم جىگىربوۋنى جىاۋازىيەكان يان رېژەكان يارمەتت دەدەن بۇ دىارىكردى
جۆرى ئەو نەخشەيەى بەكارىدەھىيىت بۇ نۈاندنى كۆمەلە پىدراۋەكان. دەتوانىت بەرنامەى
EXCEL ى بژمىر بۇ ھەژماركردى جىاۋازىيەكان و رېژەكان بەخىرايى بەكاربەھىيىت.

پىدراۋەكانى خشتەى بەرامبەر بەكاربەھىيە. بەرنامەى EXCEL
بەكاربەھىيە بۇ ھەژماركردى جىاۋازىيەكانى يەكەم و جىاۋازىيەكانى
دوۋەم و رېژەكان، نەگۆرەكە دىارىبكە ئەگەر ھەبوو.

x	5	6	7	8	9	10	11
y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4

سەرەتا سەردىرى رېزەكان بخەرە ناۋبژمىرەكە، ۋەك دىارە بىرت
نەچىت، جىاۋازى نىۋان بەھايەكانى x پىۋىستە يەكسان بن.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	5	6	7	8	9	10	11
2	y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4
3	جىاۋازىيەكانى يەكەم		2.4	3.2	4	4.8	5.6	6.4
4	جىاۋازىيەكانى دوۋەم							
5	رېژەكان							

1 ھەژمارى جىاۋازىيەكان بكة ياساى $C2 - B2 =$ لە خانەى
C3 تۆماربەكە بۇ ھەژماركردى جىاۋازى نىۋان دوو بەھايى
يەكەم لە بەھايەكانى y ئەۋەى لە C3 دايە لەبەرگەرۋە بۇ
خانەكان لە D3 ھەتا H3.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	5	6	7	8	9	10	11
2	y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4
3	جىاۋازىيەكانى يەكەم		2.4	3.2	4	4.8	5.6	6.4
4	جىاۋازىيەكانى دوۋەم			0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
5	رېژەكان							

2 جىاۋازىيەكانى دوۋەم ھەژماربەكە ياساى $D3 - C3 =$ لە
خانەى D4 تۆماربەكە بۇ ھەژماركردى جىاۋازىيەكانى
دوۋەم ئەۋەى لە D4 دايە لەبەرگەرۋە بۇ خانەكان لە E4 تا H4.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	5	6	7	8	9	10	11
2	y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4
3	جىاۋازىيەكانى يەكەم		2.4	3.2	4	4.8	5.6	6.4
4	جىاۋازىيەكانى دوۋەم			0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
5	رېژەكان		3.40	1.94	1.61	1.45	1.36	1.30

3 رېژەكان ھەژماربەكە ياساى $C2 / B2 =$ لە خانەى C5 بۇ
ھەژماركردى رېژەى دوو بەھايى يەكەمىن لە بەھايەكانى y
ئەۋەى لە خانەى C5 لەبەرگەرۋە بۇ خانەكانى D5 تا H5.
لەمەى پىشوو دەردەكەۋىت جىاۋازىيەكانى دوۋەم نەگۆرە

ھەۋلەدە

بۇ ھەرىكە لەم كۆمەلە پىدراۋانە بەرنامەى EXCEL بەكاربەھىيە بۇ ھەژماركردى جىاۋازىيەكانى يەكەم و
جىاۋازىيەكانى دوۋەم و رېژەكان. ئەگەر نەگۆرى تىدابوو دىارىبكە.

x	4	7	10	13	16	19
y	1.31	2.48	3.65	4.82	5.99	7.16

x	2	4	6	8	10
y	-20	124	364	700	1132

x	1.5	3	4.5	6	7.5
y	-9	15	57	117	195

x	3	4	5	6	7
y	8.96	35.84	143.36	573.44	2293.8

5 بىرى رەخنەگر كام جۆر لە نەخشەكان گونجاۋترە بۇ نۈاندنى پىدراۋەكانى راھىنانى 4؟ بەلگە بۇ ۋەلا مەكەت بەھىنەۋە.

جیگورکی نه خشه کان

Transforming Functions

به شه قهرزه کانی خویند کاران



نه گهر له دانهوهی قهرزه کت دوا بکویت نهوا له بهر دم
هاوکاران بلاوی دهکینه وه

داوی لیپوردن دهکمه له دواکوتنم له دانهوهی به شه
قهرزه کانم چاوه پروانی جیگورکیم.

بوچی نه مه فیرده بین؟

دهتوانیت جیگورکی نه خشه کان به کار بهینیت بو
باسکردنی نهو گورپانکاریانهی له باجی تومار
کردنی ناو له زانکودا پرووده دات (نمونه 4)

له وانه کان و پوله کانی پیښودا فیروویت چو نه خشه
جیاوازه کان جیگورکی پیبکهیت، دهتوانیت نه خشه ی ریسا
پهلدار جیگورکی پیبکهیت به جیگورکی کردنی هر لقیك له
لقه کانی. نه خشته ی خواره وه ریسا کانی جیگورکی
نه خشه کان کورت دهکاته وه.

نامانجه کان

- نه خشه کان جیگورکی پیده کات.
- جیگورکی نه خشه ده ناسیت.

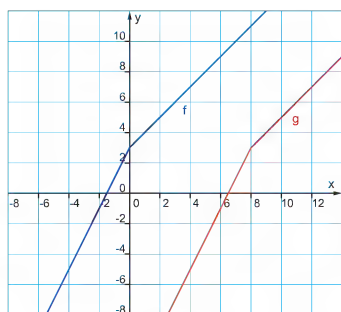
جیگورکی نه خشه ی $f(x)$

پاکیشانی ستوونی	پاکیشانی ناسویی
$f(x) \rightarrow f(x) + k$ بولا ی سهر وه راده کیشریٹ نه گهر $k > 0$ بولا ی خواره وه راده کیشریٹ نه گهر $k < 0$	$f(x) \rightarrow f(x - h)$ بولا ی راست راده کیشریٹ نه گهر $h > 0$ بولا ی چه پ راده کیشریٹ نه گهر $h < 0$
ویننه دانه وه به دهوری تهوهری یه کهم x - axis	ویننه دانه وه به دهوری تهوهری دووهم y - axis
$f(x) \rightarrow -f(x)$	$f(x) \rightarrow f(-x)$
فراوانبوون یان چوونه وه یه کی ستوونی	فراوانبوون یان چوونه وه یه کی ناسویی
$f(x) \rightarrow af(x)$ فراوانبوونه نه گهر $a > 1$ ، چوونه وه یه که نه گهر $0 < a < 1$	$f(x) \rightarrow f\left(\frac{1}{b}x\right)$ فراوانبوونه نه گهر $b > 1$ ، چوونه وه یه که نه گهر $0 < b < 1$

فیربه

جیگورکی نه خشه ریسا پهلداره کان

نه خشه ی $g(x)$ پهیدا بو له جیگورکی نه خشه ی
به پاکیشانی 4 یه که بولا ی راست.



پیویسته هر لقیك له لقه کانی نه خشه که 4 یه که بولا ی
راست رابکیشریٹ. $x - 4$ له جیاتی x له ریسا ی نه خشه ی
 $f(x)$ دابنی، پاشان ریسا که به ساده ترین شیوه بنووسه.

$$g(x) = f(x - 4) = \begin{cases} (x - 4) + 3 & x - 4 > 0 \\ 2(x - 4) + 3 & x - 4 \leq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x - 1 & x > 4 \\ 2x - 5 & x \leq 4 \end{cases}$$

ساغبه که وه ویننه ی پروونکردنه وه ی هر دوو نه خشه که له پروتختی پووتان بکیشنه بو
پالپشتی وه لاهمه که ت

1 نمونه

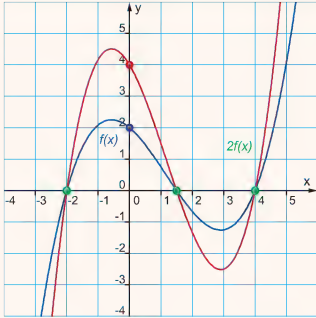
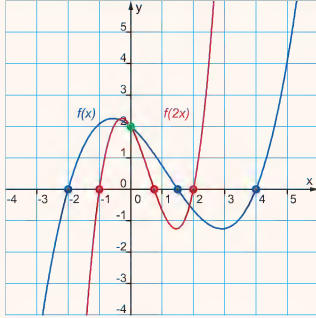
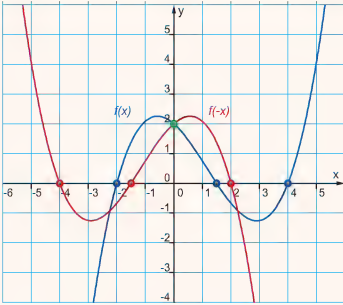
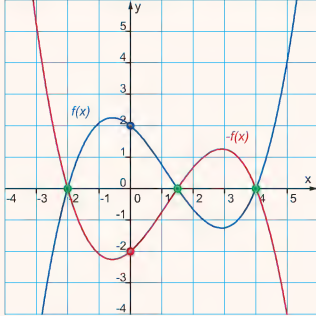
ناگادار به!

پاکیشانی ناسویی، ریسا یه کانی
نه خشه ی بنکه پهلدار ماوه کانی
بواره که ی دهگورپت به لام
پاکیشانی ستوونی ته نها
ریسا کانی نه خشه که دهگورپت.

1. نهخشه $g(x)$ ی پیدابوو به جیگورپکی نهخشه $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x-3 & x > 0 \end{cases}$ بنووسه به کشانی (مط) ناسویی هاوکولکهی 2 بیت.



لهکاتی جیگورپکی نهخشه لهوانهیه یهکترپینهکانی لهگه‌ل ته‌ورهی پووتانهکان بگورپت و لهوانه‌شه نهگورپت. کاتیگ جیگورپکیهکه پیناسه ده‌کریت، ده‌وانیت یهکترپینهکانی نهخشه - وینه دیاریبکه‌یت.

کاریگه‌ریه‌کانی جیگورپکی له‌سه‌ر یهکترپینهکانی ناسویی و ستوونی نهخشه $f(x)$	
کشانی یان چوونه‌ویهکی ستوونی هاوکولکهی b بیت	کشانی یان چوونه‌ویهکی ناسویی هاوکولکهی a بیت
 <p>یهکترپینهکانی ناسویی ناگورپت یهکترپینهکانی ستوونی له a ده‌ریت</p>	 <p>یهکترپینهکانی ناسویی له b ده‌ریت یهکترپینهکانی ستوونی ناگورپت</p>
وینه‌دانه‌وه به ده‌وری ته‌ورهی دوهم	وینه‌دانه‌وه به ده‌وری ته‌ورهی یه‌کهم
 <p>یهکترپینهکانی ناسویی ده‌گورپت به دژه‌کی یهکترپینهکانی ستوونی ناگورپت</p>	 <p>یهکترپینهکانی ناسویی ناگورپت یهکترپینهکانی ستوونی ده‌گورپت به دژه‌کی</p>



دیاریکردنی یهکترپینهکان

نمونه 2

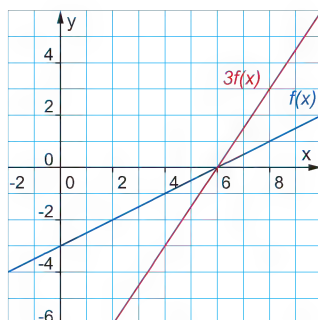
یهکترپینهکانی نهخشه $f(x)$ دیاریبکه، پاشان یهکترپینهکانی نهخشه $g(x)$ دیاریبکه، به‌بی وینه‌کیشانی روونکردنه‌وه‌یی.

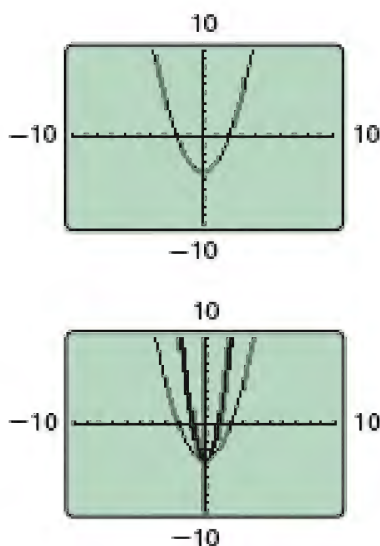
$$g(x) = 3f(x); f(x) = \frac{1}{2}x - 3$$

یهکترپینهکانی نهخشه بنه‌په‌تیه‌که دیاریبکه.

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2}(0) - 3 = -3 & 0 &= \frac{1}{2}x - 3 \\ f(0) &= -3 & x &= 6 \end{aligned}$$

یهکترپینی ستوونی 3- و یهکترپینی ناسویی 6 له‌به‌رئه‌وهی $g(x)$ کشانی ستوونیه بۆ نهخشه $f(x)$ به هاوکولکهی 3 که‌واته یهکترپینی ناسویی ناگورپت، به‌لام یهکترپینی ستوونی له هاوکولکهی کشان ده‌ریت که (3) یه. یهکترپینی ستوونی بۆ نهخشه $g(x)$ بریتیه له $3(-3) = -9$





ب $g(x) = f(2x) : f(x) = x^2 - 4$

به بژمیری پروونکردنه وهی دهرده که ویت که یه کتربرینی ستوونی بۆ نه خشه که بریتییه له -4 و دوو یه کتربرینی ئاسویی ههیه بریتین له 2 و 2 له نه خشه ی $f(x)$ دا سهرنج بده نه خشه ی $g(x)$ بریتییه له نه خشه ی $f(x)$ چونه وهیه کی ئاسویی نه خشه ی $f(x)$ هاوکۆله ی $\frac{1}{2}$ بیت. له مه وه دهرده چیت یه کتربرینی ستوونی ناگۆریت و ههر یه کتربرینیکی ئاسویی له $\frac{1}{2}$ دهردیت. یه کتر برینه کانی ئاسویی بۆ نه خشه ی $g(x)$ بریتین له -1 و 1.

ساغبه که وه له سهر هه مان شاشه وینه ی پروونکردنه وه ی نه خشه ی $g(x)$ بکیشه بۆ پالپشتی وه لامه که ت.

2. یه کتربرینه کانی نه خشه ی $f(x)$ دیاریبکه، پاشان یه کتربرینه کانی نه خشه ی $g(x)$ به یی وینه کیشانی پروونکردنه وه کی دیاریبکه.



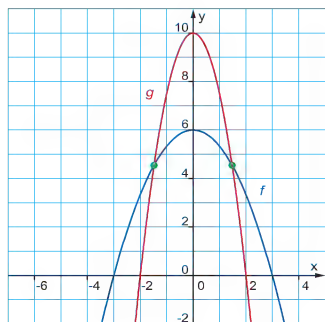
$g(x) = \frac{1}{3}f(x) \quad f(x) = x^2 - 9$ **ب** $g(x) = -f(x) \quad f(x) = \frac{2}{3}x + 4$ **ا**

نموونه 3 ئاویته کردنی جیگۆرکییه کان

وینه ی پروونکردنه وه ی نه خشه ی $g(x) = f\left(\frac{\sqrt{15}}{2}x\right) + 4$ کاتیک $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 6$

ههنگاوی 1 وینه ی پروونکردنه وه ی نه خشه ی $f(x)$ بکیشه پروونکردنه وه ی $f(x)$ ته وه ره ی دووهم له (0,6) و ته وه ره ی یه که م له (-3,0) و (3,0) دهرپیت ههنگاوی 2 ههر جیگۆرکییه که به جیا تاقیبه که وه.

جیگۆرکییه یه که م بریتییه له چونه وه یه کی ئاسویی هاوکۆله ی $\frac{2}{3}$ یه. پاش ئهم جیگۆرکییه که یه کتربرینی ستوونی ناگۆریت، وه که خوی 6 ده مینیت به لام یه کتربرینه کانی ئاسویی ده بیته -2 و 2. جیگۆرکییه دووهم بریتییه له راکیشانی 4 یه که بۆ سهر وه، خسته که بۆ پروونکردنه وه ی راکیشانی ههرسی خاله که به کار به یه نه.



(0, 6)	(2, 0)	(-2, 0)	خاله کانی یه کتربرین
(0, 10)	(2, 4)	(-2, 4)	وینه ی راکیشانه کی

ساغبه که وه وینه ی پروونکردنه وه ی دوو نه خشه ی $f(x)$ و $g(x)$ له هه مان پرووته ختی پۆوتان بکیشه.

3. وینه ی پروونکردنه وه ی نه خشه ی $g(x) = -\frac{1}{2}f(x)$ کاتیک $f(x) = 2^x - 4$ بیت.





سهرۆکایهتی یهکێک له زانکۆکان نهخشه ی بنکه په لدار به کارده هینیت بۆ دیارکردنی باجی تۆمارکردنی خویندکاران به پیتی ژماره ی کاتژمێره وانهکان تیايدا تۆمارده کهن.

$$f(x) = \begin{cases} 110\,000x & 0 < x < 12 \\ 1\,320\,000 & 12 \leq x \leq 18 \\ 150\,000(x-18) + 1\,320\,000 & x > 18 \end{cases}$$

سهرۆکایهتی زانکۆ بریاریدا بۆ وهرزی پایز باج به پێژهی 10% زیاده کریت، هه وره ها بریاریدا 750 000 دینار باج بخریته سهر ههر که سیك ناوی تۆمار ده کریت. نهخشه یه ک بنووسه رپگه به هه ژمارکردنی باجی تۆمارکردن له وهرزی پایز به پیتی x ده دات.

1. پرسیاره که تیپگه

نهخشه ی نوێ به جیگۆرکی نهخشه ی سهره کی به دوو جیگۆرکی دیاریده کریت زیاده کردنی باجی تۆمارکردنی 10% پاشان خستنه سهری باجی کاره کارگیریه کان بره که ی 75 000 دیناره. ده توانین باجی 10% بگۆرین بۆ لیکدانی ههر لقی که له لقهکانی نهخشه له 110% یان 1.1 ئه وه ده گه ی نیت نهخشه بخریته ژیر کشانی ستوونی هاوکۆله که ی 1.1 بیت، به لām زیاده کردنی باجی کارگیریه کان، واته گۆرینی نهخشه که به راکیشانی بۆ سهره وه به بری 75 000 یه که.

2. پلان دابنی

جیگۆرکی یه که م جیبه جیکه، پاشان جیگۆرکی دووهم و نهخشه ی پهیدا بوو بنووسه.

3. شیکاریه

دهستبه که به دۆزینه وه ی نمونه ی باجه کان پاش زیاده کردنی 10%.

$$g(x) = (1.1)f(x) = \begin{cases} (1.1)110\,000x & 0 < x < 12 \\ (1.1)1\,320\,000 & 12 \leq x \leq 18 \\ (1.1)[150\,000(x-18) + 1\,320\,000] & x > 18 \end{cases}$$

ههر لقی که له 1.1 بده

$$= \begin{cases} 121\,000x & 0 < x < 12 \\ 1\,452\,000 & 12 \leq x \leq 18 \\ 165\,000(x-18) + 1\,452\,000 & x > 18 \end{cases}$$

ئێستا نمونه ی باجه کان پاش زیاده کردنی باجی کارگیریه کان بره که ی 75 000 دیناره بدۆزه وه.

$$h(x) = g(x) + 75\,000 = \begin{cases} 121\,000x + 75\,000 & 0 < x < 12 \\ 1\,452\,000 + 75\,000 & 12 \leq x \leq 18 \\ 165\,000(x-18) + 1\,452\,000 + 75\,000 & x > 18 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 121\,000x + 75\,000 & 0 < x < 12 \\ 1\,527\,000 & 12 \leq x \leq 18 \\ 165\,000(x-18) + 1\,527\,000 & x > 18 \end{cases}$$

4. ساغبه وه

وه لāmه که ت به به کاره یانی هه ندیک له به هایهکانی ساغبه وه. ئه گه ر باجی سهره کی بۆ 20 کاتژمێر 1 620 000 دینار بیت، به زیاده بوونی ئه و باجه 10% و خستنه سهری 75 000 دینار، ئه م باجه ده بیته 1 857 000 دینار. به های نهخشه نوییه که بدۆزه وه کاتیک 20 = x.

$$h(20) = 165\,000(20-18) + 1\,527\,000 = 330\,000 + 1\,527\,000 = 1\,857\,000 \quad \checkmark$$

4. مۇزەخانەى زانستەكان 5 000 دىنار باجى چۈنەئورەوۋە وەردەگرىت، بۆھەر مندالىك تەمەنى لە 12 سال كەمترىت، 7500 دىنار وەردەگرىت بۆھەر كەسىك تەمەنى لە 12 سال كەمتر نەبىت (12 سالى بەرەو سەرەو) كارگىپرى مۇزەخانەكە بىپارىدا نرەكانى چۈنەئورەوۋە 20% بەرزىكاتەو، ھەر بلىتەك 500 دىنار بخاتە سەرى. بۇ ئاسانكارى كرىن بەھۇى ئامىرەوۋە. نەخشەيەك بنووسە. نرەى نوئى چۈنەئورەوۋە بەپىئى تەمەنى كرىپار بىت.



بىرىكەوۋە و تاوتوبىكە

1. كام لەم جىگۇپكىيانە يەكتىرىپنەكانى ستونى ناگۇپىت؟
2. پوونى بكەوۋە بۇچى خالى (0, 0) ناگۇپىت لەزىر كارىگەرى ھەركشانىك وھەر چۈنەوۋەيەكەك.
3. پىكخەرىيە ئەم خشتەى خوارەوۋە دروستبەكە و پاشان تەواوبىكە. باسى كارىگەرى ھەر جىگۇپكىيەك لەسەر يەكتىرىپنەكان بەك.



جىگۇپكى	يەكتىرىپنى ئاسۇيى	يەكتىرىپنى ستونى
كشان يان چۈنەيەكى ئاسۇيى بە ھاوگۇلكەى b		
كشان يان چۈنەيەكى ستونى بە ھاوگۇلكەى		
وئەدانەوۋە بەدەورى تەوۋەرى x		
وئەدانەوۋە بەدەورى تەوۋەرى y		

2-5 رايۇنەكان

رايۇنەنى ئاراستەكراو

پىساي نەخشەى $g(x)$ يەيدابوو لە ئەنجامى جىگۇپكىي نەخشەى $f(x) = \begin{cases} x-3 & x \leq 0 \\ 4x & x > 0 \end{cases}$ بنووسە.

1. راكىشانى 6 يەكە بۇلاى چەپ
2. چۈنەوۋەيەكى ئاسۇيى ھاوگۇلكەى $\frac{1}{4}$ بىت.

يەكتىرىپنەكانى نەخشەى $f(x)$ پاشان نەخشەى $g(x)$ دىارىكە بەبى وئەكىشانى پوونكردەوۋەيى

$$g(x) = f(4x) : f(x) = -x^2 + 16 \quad 4 \quad g(x) = \frac{1}{6}f(x) : f(x) = 4x + 12 \quad 3$$

وئەنى پوونكردەوۋەيى نەخشەى $f(x)$ بكىشە پاشان جىگۇپكىي بەكاربىتە بۇ وئەكىشانى پوونكردەوۋەيى نەخشەى $g(x)$

$$g(x) = -2f(x) : f(x) = |x-1| - 2 \quad 6 \quad g(x) = f(2x) - 1 : f(x) = -x^2 + 1 \quad 5$$

7. باجەكان يەكەك لە حكومەتەكان پشت دەبەستىت بە نەخشەى $T(x) = \begin{cases} 0.02x & 0 < x \leq 10\,000\,000 \\ 0.05x & x > 10\,000\,000 \end{cases}$

بۇدىارىكردى باجى دەرامەت بەپىي داھاتى تاك x. حكومەت بىپارى زىادكردى باجىكى 20% دا و باجىكى بىراوۋە 100 000 دىنار سەپاند، بۆھەر كەسىك باجى لەسەرە بىدات، نەخشەيەكى نوئى بۇ دىارىكردى نرەى باج بەپىي داھات بنووسە.

جیٲه جیٲکردنه كان

پیسای نهخشه ی $g(x)$ په یدابوو له نه نجامی جیٲوړکی نهخشه ی $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ 4x & x \geq 1 \end{cases}$ بنووسه به یٲی نه مانه:

9 کشانی ئاسوی هاوکلکه ی 2

8 چوونه وه یکی ستوونی هاوکلکه ی $\frac{1}{4}$

10 ٲاکٲشانی 3 یکه بو خواره وه

یه کٲرٲینه کانی نهخشه ی $f(x)$ ٲاشان نهخشه ی $g(x)$ دیار یکه به یٲی وٲنه کیٲشانی روونکردنه وه که ی

$$g(x) = f\left(\frac{5}{3}x\right) ; f(x) = x^2 - 25 \quad 12 \quad g(x) = \frac{2}{3}f(x) ; f(x) = -\frac{3}{2}x + 9 \quad 11$$

$$g(x) = -f\left(\frac{1}{3}x\right) ; f(x) = x^2 - 3x - 4 \quad 14 \quad g(x) = f(2x) ; f(x) = -\frac{2}{5}x + 2 \quad 13$$

$$g(x) = f\left(-\frac{1}{2}x\right) ; f(x) = x^3 + 8 \quad 16 \quad g(x) = 2f(x) - 4 ; f(x) = 3^x - 1 \quad 15$$

وٲنه ی روونکردنه وه یی نهخشه ی $f(x)$ بکیٲشه، ٲاشان جیٲوړکی به کار یٲنه بو دیارکردنی وٲنه ی روونکردنه وه یی نهخشه ی $g(x)$

$$g(x) = -f(2x) ; f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2 \quad 18 \quad g(x) = 3f(-x) ; f(x) = \frac{1}{2}x + 4 \quad 17$$

19 کار بو هه ژمارکردنی تیٲوونی ٲیډاویستییه کانی ئاهه نگی قوتا بخانه کان، یه کیٲ له کوٲمانیا کان

$$c(n) = \begin{cases} 18\,000n & n \leq 50 \\ 400\,000 + 10\,000n & n > 50 \end{cases}$$

پشت ده به ستیٲ بهم نهخشه یه. n ژماره ی که سان بیٲ.

ا به ٲووه به یی کوٲمانیا که ٲریاریدا له وهرزی زستان نرخه کان 10% دابه زٲنیٲ. نهخشه ی نوی بو هه ژمارکردنی تیٲوونه کان بنووسه.

ب به ٲووه به یی کوٲمانیا که ٲریاریکی تریدا، بو هه که سیٲ ٲری 2000 دینار دابه شکٲنیٲ، نهخشه ی نوی بو هه ژمارکردنی تیٲوونه کان بنووسه.

سزادانی تیٲه ٲراندنی خٲرای دیارکراو	زیاده ٲوی (km/h)
سزادان (دینار)	
30 000	10-1
50 000	15-11
100 000	20-16
150 000	25-21
200 000	←26

20 نارامی هاتوچو شاره وانی ٲایتهخت ئه و ئوٲوٲمبیلانه ی ٲاده ی خٲرای دیاریکراو تیډه ٲه ٲین سزاده دات، به ٲیٲی ئه م خشته ی به رام به ر

ا نهخشه یه که بو هه ژمارکردنی نرخ سزادان به ٲیٲی ماوه ی تیٲه ٲراندن بنووسه

ب شاره وانی سزایه کی تر ٲه که ی 50 000 دینار ده سه ٲنیٲ، ئه گه ر هاتو ٲاده ی خٲرای له و شوٲنانه ی قوتا بخانه ی تیډاه تیډه ٲه ٲنیٲ. نهخشه یه که بنوسه که نرخ سزادان له و شوٲنانه ی قوتا بخانه ی تیډاه دیاریبکات.

ج چی ده بیٲ نه گه ر...؟ شاره وانی ٲریاریدا سزادان له سه ر ٲاده ی خٲرای به 15% زیاده بکات نهخشه ی نوی بو دیارکردنی سزادان بنووسه.

21 بیر ی ٲه خنه گه ر وادابیٲی روونکردنه وه ی نهخشه ی $f(x)$ ته وه ی x, n جار ده ٲرٲ.

ا چه ند جار روونکردنه وه ی نهخشه ی $bf(ax)$ ته وه ی x ده ٲرٲ؟ ئه مه روونبکه وه.

ب روونبکه وه بوچی ناتوانیٲ ژماره ی ئه و خالانه دیاربکه یٲ که روونکردنه وه ی نهخشه یه که $f(x-h) + k$ ته وه ی x ده ٲرٲ.

22 ٲاره یه کیٲ له بانکه کان ٲیگه به هه لگرای ئه و کارته بانکیه ی ده ریکردوه ده دات قهرز له ئامٲری ٲاکٲشانی بانک گوژمه ی 6000 دینار وهرده گریٲ، ئه گه ر نرخ گوژمه ی ٲاکٲشراو 200 000 تیٲه ٲنه کات، و 3% نرخ گوژمه ی ٲاکٲشراو کاتیٲ له 200 000 دینار زیاتر بوو.

ا نهخشه یه که بنووسه، ئه و ٲه ٲه ٲاره ی بانکه که به ٲیٲی گوژمه ی ٲاکٲشراو وهریده گریٲ بنوٲنیٲ.

ب وادابیٲی بانکه که ٲریاریدا ئه وه ی وهریده گریٲ 15% زیاده بکات. نهخشه یه که بو ئه مه بنووسه.

راهیٲانی نازاد	بوشیکارکردنی
تاما شای	ٲرسیاره کان
1	10-8
2	16-11
3	18-17
4	19

ده روازه یه که نارامی هاتوچو



ٲولیس له هه ندیٲ له شاره کان کامٲرای وٲنه گرتن داده نٲن، بو دیاریکردنی ئه و ئوٲوٲمبیلانه ی سه رٲیٲی ده که ن و سزایان ده دات.

23

جار خیراتریوون.

۵



24

وینہ کہ وہ بو وینہ کی تر دہ گوریت

۱. وینے پوونکردنوهوی نه خشه کانی $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$ کاتیگ $1 \leq x \leq 2$ و $g(x) = -x^2 + 6x - 7$

کاتیك $h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 7 & 2 \leq x \leq 4 \\ 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$ له هه مان پووته ختی پووتان بکیشه.

ب. وینے پروونکر دنه وهی ئه مانه بکیشه $f_1(x) = -f(x) + 8$ و $g_1(x) = -5g(x) + 3$ و $h_1(x) = -h(x) + 8$

ٻوهر نه خشه يهڪ نه خشه يهڪي پهيدابوو لهئنهجامي جيگورڙڪيهڪهي به جيگورڙڪيي ديارڪراو بنووسه.

25

26



27

بوومه‌کاني به نرخيکي قايلکه‌ر (مغريه) خسته‌روو.

i

كرينى هه نديك له نيوان 0 kg و 10 kg بنوينيت.

5

لهه ژماره کړدنی نرخي x kg به روبوومی

کشتوکالی به کار بهینریت.

८

روویہ کی تری نیشاندا بو کریار بہرامبہر ہەر

كىلوگرامىك دەيكرېت يەك كىلوگرام بەخۇرايى

بیت، وینہ کی روونکردنہ وہی نہ خشہ نویہ کہ بکیشہ ۛو جیگورکیہی نہ خشہی

بنهره‌تی پهدای دهکات، باسیپکه.

28 کار يه کيک له کومپانياکاني فروشتنی بژمير پشت به نه خشي $P(n) = -0.002n^2 + 19n - 9000$

دبه ستيت بۇ دياريكردنى قازانجه کاني فروشتنى n بژميردا، کومپانياکه بۇ سالى داهاوو پشت به نه خشي $R(n) = P(0.8n)$ دبه ستيت.

ا کاريگهري ئهم گۇرانکاريپانه له سهر ژماره ي ئهو بژميرانه ي کومپانياکه پيوسته بيفروشتيت چييه بۇ نه وي زورترين قازانجي ده سته ويئت؟

ب ژماره ي بژميره کاني پيوسته بيفروشتيت بۇ هيئانه ي بهرترين پاده ي قازانج بدوزه وه.

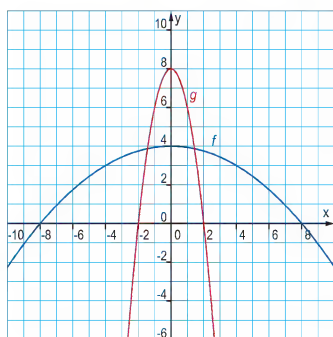
29 بيرکردنه وي ره خنه گرانه نه خشي هکي هيلی، يه کترپينه ئاسوييه کي يه کسانه به 2 و يه کترپينه ستوونييه کي يه کسانه به 3 نه خشه که به شيوي ستووني فراوان بکريت هاوکولکي 2 بيت، پاشان 3 يه که بۇ خواره وه رابکيشريت، وه به شيوي ئاسويي فراوان بکريت هاوکولکي 2 بيت، يه کترپينه نوپيه کاني نه خشه پاش جيگورکي چنده؟

30 بيرکردنه وي ره خنه گرانه بوچي له راکيشاني ستونيدا بواري نه خشه که ناگوريت به لام له راکيشاني ئاسوييدا بواريه کي ده گوريت؟ ئهمه روونبکه وه.

31 بنووسه ئايا ده توانريت روونکردنه ويه کي پسو (به يه که وه نه به ستراو) بۇ روونکردنه ويه کي نه پسو جيگورکي پيکريت، تهنه کشان و چوونه ويه که به کاربه يئريت؟

تاماده کردن بۇ تافیکردنه وه

32 کام له مانه ي خواره وه بريتيه له نه خشي $g(x)$ له وينه ي روونکردنه وي به رامبه ردا؟



ا $g(x) = 2f\left(\frac{1}{4}x\right)$ **ج** $g(x) = 2f(4x)$

ب $g(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{4}x\right)$ **د** $g(x) = \frac{1}{2}f(4x)$

33 کام له مانه نه خشي $g(x) = f(4x)$ يه کاتي $f(x) = \begin{cases} 2x & x > 8 \\ x^2 & x \leq 8 \end{cases}$

ا $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x > 2 \\ \frac{x^2}{16} & x \leq 2 \end{cases}$ **ج** $g(x) = \begin{cases} 8x & x > 32 \\ 4x^2 & x \leq 32 \end{cases}$

ب $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x > 8 \\ \frac{x^2}{16} & x \leq 8 \end{cases}$ **د** $g(x) = \begin{cases} 8x & x > 2 \\ 16x^2 & x \leq 2 \end{cases}$

34 يه کترپيني ستووني نه خشي $g(x) = \frac{3}{5}f(5x)$ بريتيه له 15. يه کترپيني ستووني بۇ نه خشي $f(x)$ چنده؟

ا 3 **ب** 9 **ج** 25 **د** 75

به رنه گاري و فراوانکردن

35 **ئه ندازه** نه خشي $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + 4 & x < 0 \\ -\frac{1}{2}x + 4 & x \geq 0 \end{cases}$ به کاربه يئنه.

ا وينه ي روونکردنه وي نه خشي $f(x)$ بکيشه و يه کترپينه کاني دياربکه. پاشان رووبهري

ناوچه ي دياريکراو به روونکردنه وي نه خشه که و ته وهري يه که م هه ژماربکه.

ب وينه ي روونکردنه وي نه خشي $g(x) = 4f(2x)$ بکيشه. پاشان رووبهري ناوچه ي دياريکراو به روونکردنه وه که و ته وهري يه که م هه ژمار بکه.

36 نه خشي $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ به کاربه يئنه.

ا يه کترپيني نه خشي $g(x) = 3f\left(\frac{1}{2}x\right)$ دياربکه **ب** يه کترپيني نه خشي $h(x) = -g\left(\frac{1}{2}x\right)$ دياربکه

پیداچوونہوہی لوولیچی

37 زہویناسی لہنیوان سالی 1999 و 2002 دا 973 بومہلہرزہ لہ ولاتہ یہکگرتووہکانی ئەمریکای داوہ. 43% ئەو بومہلہرزانہ لہ کالیفورنیای داوہ. بە نزیکۍ چەند بومہلہرزہ لہو ماوہیہ لہ کالیفورنیای داوہ. (پۆلەکانی پیشوو)

گەرەترین و بچووکتەین بەها بۆھەر نەخشەییەك بدۆزەوہ، پاشان بوار و مەودای نەخشەكە دیاریكە. (پۆلەکانی پیشوو)

$$g(x) = -3x^2 + 6x - 9 \quad \text{39}$$

$$f(x) = 4x^2 - 2x + 8 \quad \text{38}$$

بەهای ھەر نەخشەییەکی رێسا پەلدارى خوارەوہ کاتیك $x = -4$ و $x = 0$ و $x = 5$ ھەژماریکە. (وانەى 5-2)

$$g(x) = \begin{cases} 5 - 2x & x < -3 \\ 4 + x & x \geq -3 \end{cases} \quad \text{41}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x < 1 \\ x^2 - 4 & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{40}$$

تاقىردنەۋەى نىۋەى بەش

1-5 نەخشە رېسا پەلدارەكان

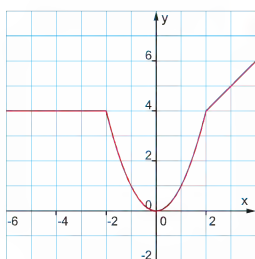
ۋىتەى پوونكردنەۋەىى نەخشەكە بكىشە.

$$h(x) = \begin{cases} -x+1 & x < -3 \\ -x & -3 \leq x < 1 \\ -x-1 & x \geq 1 \end{cases} \quad 2$$

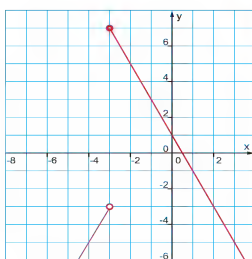
$$f(x) = \begin{cases} 3 & x < 0 \\ 2x+3 & x \geq 0 \end{cases} \quad 1$$

3 بەكرى گرتنى پاسكىل بۆگواستەۋە لە شاخ بۆسى كاتژمىرى يەكەم 25 000 دىنارى تېدەچىت، و 5000 دىنار بۆھەر كاتژمىرىكى زىادە. ۋىتەىكى پوونكردنەۋەىى بكىشە بۆ بەكرىگرتنى پاسكىل بۆ كاتىكى دىارىكراۋ لە 0 تا 8 كاتژمىر.

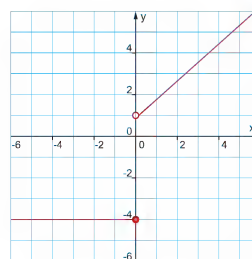
نەخشەىكى رېسا پەلدار بۆھەر يەكەك لەم ۋىتە پوونكردنەۋەىيانە بنووسە.



6



5



4

2-5 جىگۆركى نەخشەكان

يەكترىپىنەكانى ئاسۋىى و ستوونى بۆ نەخشەى $f(x)$ دىارىبكە، و دەرئەنجامى يەكترىپىنەكانى ئاسۋىى و ستوونى بۆ نەخشەى $g(x)$ بەبى ۋىتەكىشانى پوونكردنەۋەىى دىارىبكە.

$$g(x) = -f\left(\frac{1}{2}x\right), \quad f(x) = 2x - 2 \quad 7$$

$$g(x) = 2f(x), \quad f(x) = x^2 - 4 \quad 8$$

ۋىتەى پوونكردنەۋەىى $g(x)$ بكىشە بە زانىنى $f(x)$

$$g(x) = 2f(x) + 3, \quad f(x) = |x| - 3 \quad 9$$

$$g(x) = -3f(x), \quad f(x) = x^2 + 1 \quad 10$$

کردارەکان لەسەر نەخشەکان

Operations with Functions



کۆ ئێمە بەکار دەهێنێت؟

کالاهێنەرەکان دەتوانن کردارەکان لەسەر نەخشە بەکار بهێنن بۆ دیاریکردنی تیچوونی ئەوەی بە درایوی بیانی دەیکرن (نموونه 5)

ئامانجەکان

- کۆکردنەوە و لێدەرکردنی نەخشەکان و لێکدان و دابەشکردنیان.
- ئاوێتەکردنی نەخشەکان و هەژمارکردنی بەهای نەخشە ئاوێتە.

دەتوانیت کردارەکان لەسەر نەخشەکان ئەنجامبەدیت، وەک چۆن کردارەکان لەسەر ژمارەکان و پرەکان ئەنجام دەدەیت. دەتوانیت نەخشەکان کۆبکەیتەوه و لە یەکتریان دەرکەیت و لێکیان بدەیت. ئەو کردارانەش لەسەر پرێساکانیان ئەنجامدەدرێت.

کردارەکان لەسەر نەخشەکان	
کردارەکە	نووسینەوه
کۆکردنەوە	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
لێدەرکردن	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
لێکدان	$(fg)(x) = f(x) \times g(x)$
دابەشکردن	$g(x) \neq 0 \text{ کاتێک } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$



نموونه 1 کۆکردنەوە و لێدەرکردنی نەخشەکان

$f(x) = 2x^2 + 4x - 6$: $g(x) = 2x - 2$ هەر نەخشەیهك بدۆزەوه.

$(f + g)(x)$ **ا**

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= (2x^2 + 4x - 6) + (2x - 2) \\ &= 2x^2 + 6x - 8\end{aligned}$$

لهجیاتی هەر نەخشەیهك پرێساکە ی دابنێ سادەبکە

$(f - g)(x)$ **ب**

$$\begin{aligned}(f - g)(x) &= f(x) - g(x) \\ &= (2x^2 + 4x - 6) - (2x - 2) \\ &= 2x^2 + 4x - 6 - 2x + 2 \\ &= 2x^2 + 2x - 4\end{aligned}$$

لهجیاتی هەر نەخشەیهك پرێساکە ی دابنێ سێفەتی بەشینهوه بەکار بهێنە سادەبکە

1. $f(x) = 5x - 6$: $g(x) = x^2 - 5x + 6$ ئەمانە بدۆزەوه.

$(f - g)(x)$ **ب**

$(f + g)(x)$ **ا**



کاتێک نەخشەیهك دابەشی نەخشەیهکی تر دەکەیت دانیابە لەهەر بوارێک لە ئەنجامی دابەشکردنەکە پەیدا دەبێت.

نمونە

2

ليكدان و دابه شکردنى نهخشەکان

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 6 \quad ; \quad g(x) = 2x - 2 \quad \text{هەر نهخشەيەك بدۆزەوہ.}$$

$$(gf)(x) \quad \text{ا}$$

$$(gf)(x) = g(x) \times f(x)$$

لەجياتى ھەرنەخشەيەك پيساگەى دابنى

سيفەتى بەشپنەوہ بەكاربھيتنە

ليكدانیکە

سادەبکە

$$= (2x - 2)(2x^2 + 4x - 6)$$

$$= 2x(2x^2 + 4x - 6) - 2(2x^2 + 4x - 6)$$

$$= 4x^3 + 8x^2 - 12x - 4x^2 - 8x + 12$$

$$= 4x^3 + 4x^2 - 20x + 12$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \quad \text{ب}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

نەجامى دابه شکردنەكە بەشپووى كەرت بنووسە

بەتەواوہتى شيتەلېكە سەرنجبدە $x \neq 1$

كورتبکەوہ

سادەبکە

$$= \frac{2x^2 + 4x - 6}{2x - 2}$$

$$= \frac{2(x-1)(x+3)}{2(x-1)}$$

$$= \frac{\cancel{2}(x-1)(x+3)}{\cancel{2}(x-1)}$$

$$= x + 3 \quad (x \neq 1)$$

$$2. \quad f(x) = x + 2 \quad ; \quad g(x) = x^2 - 4 \quad \text{هەر نهخشەيەك بدۆزەوہ.}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \quad \text{ب}$$

$$(fg)(x) \quad \text{ا}$$



ئاويته كردنى نهخشەکان

ئاويته كردنى نهخشەى f لەگەڵ نهخشەى g ، بریتییه لەو نهخشەى يەكەم بەم شپوہ دەنووسریت

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

بوارى نهخشەى ئاويته $(f \circ g)(x)$ بریتییه لە كۆمەڵە بەهای x لەبوارى g دا. وادەكات لە $g(x)$ سەربە بوارى f بێت.

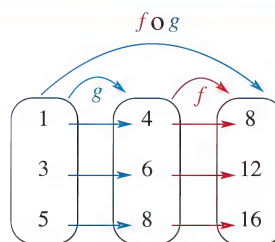
بۆ ھەژمارکردنى $f \circ g(1)$ يەكەمجار ھەژمارى $g(1)$ بكە:

$$g(1) = 4$$

پاش ئوہ ھەژمارى $f(4)$ بكە

$$f(4) = 8$$

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(4) = 8 \quad \text{كەواتە}$$



خویندەوہى بیر کارى

نەخشەى ئاويته $(f \circ g)x$ يان

f of g of x بە $(f \circ g)$

يان g of f of x

دەخويندريتهوہ

پيساى پزيبەندى کردارەکان لەسەر نهخشە ھەمان پيساى پزيبەندى کردارەکانە لەسەر ژمارەکان و

برەکان بۆ ھەژمارى $(f \circ g)(3)$ يەكەمجار $g(3)$ ھەژماربکە، پاشان ھەژمارى بەهای f بکە، کاتيک

بەهای بۆ ناوى $g(3)$ بێت.

هه ژمارکردنی به های نه خشه ئاویتەکان

3 نمونه

$f(x) = 3x + 1$ و $g(x) = x^3$ هه ژماری هه به هایه بکه.

ب $g(f(2))$

ههنگای 1 هه ژماری $f(2)$ بکه

$$f(x) = 3x + 1 \quad f(2) = 3 \times 2 + 1 = 7$$

ههنگای 2 هه ژماری $g(7)$ بکه

$$g(x) = x^3 \quad g(7) = 7^3 = 343$$

$$g(f(2)) = 343 \text{ کهواته}$$

ا $f(g(2))$

ههنگای 1 هه ژماری $g(2)$ بکه

$$g(x) = x^3 \quad g(2) = 2^3 = 8$$

ههنگای 2 هه ژماری $f(8)$ بکه

$$f(x) = 3x + 1 \quad f(8) = 3 \times 8 + 1 = 25$$

$$f(g(2)) = 25 \text{ کهواته}$$

ئاگاداریه!

هیمای ئاویتەکردنی نه خشه ی

(0) و هیمای لیکدان (•)

تیکه لاو مهکه.

$$(fg) x \neq f(g(x))$$

3. $f(x) = 2x - 3$ و $g(x) = x^2$ هه ژماری هه به هایه بکه.

ب $g(f(3))$

ا $f(g(3))$



دهتوانیت بره جه بریهکان وه به های بوناو نه خشه به کار به یئیت، وهک چون ژمارهکان به کار ده یئیت بو دوزینه وهی پرسی نه خشه ی ئاویتە $f(g(x))$ له نه خشه ی $f(x)$ له جیاتی x بره ی $g(x)$ دابنی. پاشان ئه و بره ی ده رده چیت به ساده ترین شیوه ی بنووسه.

نووسینی نه خشه ی ئاویتە

4 نمونه

$f(x) = 5x + 2$ و $g(x) = \frac{2}{x-1}$ هه نه خشه یهکی ئاویتە بنووسه و بوارهکمی دیاریبکه.

ا $f(g(x))$

له جیاتی x پرسی نه خشه ی g دابنی

$$f(g(x)) = f\left(\frac{2}{x-1}\right)$$

پرسی f به کار به یئنه. سه رنجبه $x \neq 1$

$$= 5\left(\frac{2}{x-1}\right) + 2$$

ساده بکه

$$= \frac{10}{x-1} + 2 \quad ; \quad x \neq 1$$

بوازی نه خشه ی $f(g(x))$ بریتییه له کۆمهله ی ژماره راستیهکان جگه له 1 یان $\{x | x \neq 1\}$ چونکه $g(1)$ پیناسه نه کراوه.

ب $g(f(x))$

له جیاتی x پرسی نه خشه ی f دابنی

$$g(f(x)) = g(5x + 2)$$

پرسی نه خشه ی g به کار به یئنه، سه رنجبه $x \neq 1$

$$= \frac{2}{(5x+2)-1}$$

ساده بکه

$$= \frac{2}{5x+1}, \quad x \neq -\frac{1}{5}$$

بوازی نه خشه ی $g(f(x))$ بریتییه له کۆمهله ی ژماره راستیهکان جگه له $-\frac{1}{5}$ یان $\{x | x \neq -\frac{1}{5}\}$ چونکه $f(-\frac{1}{5}) = 1$ و $g(1)$ پیناسه نه کراوه.

4. $f(x) = 3x - 4$ و $g(x) = \sqrt{x} + 2$ نه خشه ی ئاویتە بنووسه و بوارهکمی دیاریبکه.

ب $g(f(x))$

ا $f(g(x))$



دهتوانیت ئاویتەکردنی نه خشهکان به کار به یئیت بو ساده کردنی زنجیره که له نه خشهکان.

دلسوز ماتورسكىلىكى (سكوتر) كەنرخى بەيۇرۇ بۇ دانراوہ لە ئىتالىاۋە دەھىنئىت. تىچوونى گشتى ھەر ماتورسكىلىك 10% باجى گومرگى و 75 يۇرۇ باركردىنى دەچىتەسەر.



نرخى دراۋەكان
بۇھەر 1000 دىنارى عىراقى
0.84 دۇلارى ئەمىرىكى
3.09 پىالى سعووى
1260 لىرەى لوبنانى
0.52 يۇرۇى نەۋرۋى

نەخشەيەكى ئاۋىتە بنووسە، نمونەيەك بنوئىت،

بۇ تىچوونى ھەر ماتورسكىلىك بەدىنار بەيپى

نرخەكەى يۇرۇ (c) ھەژمارىكات.

ھەنگاۋى 1 نەخشەيەك بۇھەژماركردىنى

تىچوونى ماتورسكىلىك بەيۇرۇ

$$E(c) = c + 0.1c + 75$$

$$= 1.1c + 75$$

ھەنگاۋى 2 نەخشەيەك بۇھەژماركردىنى

تىچوونى بە دىنار بەيپى

$$R(c) = 1920c$$

1 يۇرۇ = 1920 دىنار بەكاربەيئە

ھەنگاۋى 3 نەخشەى ئاۋىتەى $R(E(c))$ بدۆزەۋە

$$R(E(c)) = 1920E(c) = 1920(1.1c + 75) = 2112c + 144\,000$$

ھەژمارى تىچوونى ماتورسكىلىك بەدىنار بكة نرخەكەى 1200 يۇرۇ بىت.

ھەژمارى بەھای نەخشەى ئاۋىتەى $R(E(c))$ بكة كاتىك $c = 1200$

$$R(E(1200)) = 2112 \times 1200 + 144\,000 = 2\,678\,000$$

تىچوونى گشتى ئەم ماتورسكىلە 2 678 000 دىنارە

5. يەككە لە دوكانەكانى نامىزى مۇسىقى ئاشكرايكر نامىزى عود بە پىژەى 20% دادەشكىنئىت بۇئەۋ كىپارانەى بەرگى عود دەكرن لە دوكانەكەدا، داشكانىكى ترى بۇ زىادكرا پىژەكەى 15% بۇھەر ئامىزىكى عود كە دەيكرن.



نەخشەيەكى ئاۋىتە بنووسە بۇھەژماركردىنى نرخى كۇتايى بۇئەۋ كىپارەى

بەرگى عود دەكرىت لەكاتى كىپىنى ئامىزىكى عود دا نرخەكەى x دىنارە.

ئالان يەككە لەۋ كىپارانەى لەدوكانەكە زۇرترىن شت دەكرىت. عودىكى كرى

نرخەكەى 248 000 دىناربوو، ئالان ئەۋ بەرگەى لەۋ دوكانە بەچەند كرىۋە؟

بىرىكەۋە و تاۋتويىكە

1. ئەۋ ھۆيەى وادەكات لە $(f+g)(x) = (g+f)(x)$ پوونىكەۋە.

2. ھەردوۋ نەخشەى $f(x)$ و $g(x)$ بدۆزەۋە بەجۇرىك كە $f(g(x)) = g(f(x))$

3. پىكخەرىە ئەم خشتەيە دروستىكەۋە و تەۋاۋىكە، پاشان ھەركردارىك لەسەر دوۋ نەخشەكە بەرپىگای راست بنووسە.

نووسىن	كردار
	كۆكرىدەۋەى دوۋ نەخشە
	لۆدەكردىنى دوۋ نەخشە
	لۆكدانى دوۋ نەخشە
	دابەشكردىنى دوۋ نەخشە
	ئاۋىتەكردىنى دوۋ نەخشە



راھینانی ئاراستەکراو

1 **زاراوەکان** ئاوێتەکردنی نەخشەکان بەچی لە کردارەکانی تر جیاوازه؟

$f(x) = 8x + 13$: $g(x) = x^2 - 5x$ ھەر نەخشەیکە بدۆزەو.

4 $(g - f)(x)$

3 $(f - g)(x)$

2 $(f + g)(x)$

2 **بروانە نمونە** $f(x) = 2x^2 + 2x$: $g(x) = x + 1$ ھەر نەخشەیکە بدۆزەو.

7 $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

6 $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

5 $(fg)(x)$

3 **بروانە نمونە** $f(x) = 3x^2$: $g(x) = 7 - x$ ھەر بەھایەکە بدۆزەو.

10 $f(g(-2))$

9 $g(f(5))$

8 $f(g(5))$

4 **بروانە نمونە** $f(x) = x^2$: $g(x) = 2x - 3$: $h(x) = \sqrt{x+1}$ ھەر نەخشەیکە بدۆزەو و بوارەکەمی دیاریبکە.

13 $f(h(x))$

12 $g(f(x))$

11 $f(g(x))$

14 **ئابووری بەکاربەر** بۆ خوێندن لە زانکۆ، کرێکار ئێو پارە وەریدەگرێت 10% ی پاشەکەوت دەکات و 50 000 دیناری تری دەمخاتەسەر، پوختە مانگانە کرێکار وەریدەگرت لە پاش

داشکانی باج و سەرانی 80% ی موچە بنەرەتی یەکە پێکدەھێنێت.

نەخشەیکە ئاوێتە بنووسە بۆ ھەژمارکردنی ئەوەی کرێکار مانگانە پاشەکەوتی دەکات بەپێی موچە بنەرەتی g .

ب) ئەوەی کرێکار پاشەکەوتی دەکات ھەژماربکە، ئەگەر بزانی موچە بنەرەتی مانگانە 2 400 000 دینارە.

راھینان و شیکارکردنی پرسیارەکان

$f(x) = 2x^2 - 8$: $g(x) = x^2 + 5x + 6$: $h(x) = 2x + 4$ ھەر نەخشەیکە بدۆزەو.

18 $(g - h)(x)$

17 $(f + h)(x)$

16 $(f - g)(x)$

15 $(f + g)(x)$

23 $\left(\frac{g}{h}\right)(x)$

22 $(gh)(x)$

21 $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$

20 $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

19 $(fg)(x)$

$f(x) = 2\sqrt{x+3}$: $g(x) = -3x + 1$ ھەر بەھایەکە بدۆزەو.

26 $f(g(4))$

25 $g(f(1))$

24 $f(g(1))$

29 $g(f(97))$

28 $f\left(g\left(\frac{4}{3}\right)\right)$

27 $g(f(6))$

$f(x) = 4x + 3$: $g(x) = \frac{x}{x+3}$: $h(x) = x^2 - 2$ ھەر نەخشەیکە ئاوێتە بدۆزەو و بوارەکەمی دیاریبکە.

32 $f(h(x))$

31 $g(f(x))$

30 $f(g(x))$

33 **کارەکان** بری تێچوونی کاشی کردنی ژوریک 100 000 دینار، بۆھەرەکە یاردی دووجا 4000

دینار زیاد دەدات، بزانی (یارد یەکەیکە ئینگلیزیە بۆ پێوانی درێژی و ھەر یاردەیکە یەکسانە بە

3 پێ و پێ یەکەیکە تری ئینگلیزیە بۆ پێوانی درێژی بەکاردرێت دەکاتە 30.48 cm

نەخشەیکە ئاوێتە بنووسە بۆ ھەژمارکردنی تێچوونی کاشی کردنی ژوریک پووبەرەکە x پێ چوارگۆشە بێت.

ب) پووبەری ژوورەکە بە پێ دووجا بدۆزەو ئەگەر زانیت تێچوونی کاشی کردنەکە 380 000 دینارە.

راھینانی ئازاد

شیکارکردنی تەماشای	پرسیارەکان
نموونە بکە	
1	18-15
2	23-19
3	29-24
4	32-30
5	33

34 لهکاتی گهرمکردنی هوای ناو بالون! تا 83° بوههريهک پي سيچا لههوا توانای بهرزکردنهوې 25°C

بهزیکي ههيه

ا نهخشهيهک بنووسه بۆ بالونیک و ژماره ی ئه و گرامانه ی که دهتوانیت ههلیبگریټ کاتیټ 3 km ههوا ی گهرمی تیډابیت.

ب چهند مهتر سيچا له ههوا ی گهرم پيويسته بۆ ههلگرتنی کهسيکه بارستهکه ی 75 kg بیت.

ج نهخشه ی $g(x) = \frac{x}{453.6}$ پيسايهکه بۆ گورپنی گرام بۆ (پاوهند له يهکه يهکی ئينگليزيه بۆ پيوانی بارستايی)، نهخشهيهک بنووسه ژماره ی ئه و پاوهندانه ی بالونهکه دهتوانیت ههلیبگریټ کاتیټ x پي سيچا ههوا ی گهرمی تیډابیت، بنويټ.

د ژماره ی پي سيچاکان لهههوا ی گهرم بۆ بهرزکردنهوې 1000 پاوهند بخهملنه.

35 **ثابوری بهکار بهر** کۆژين دوو بلیتی کرپنی پيیه، دهتوانی بۆکرپنی پيلاو له دوکانیکی پيلاو بهکار بهيټ. بلیتی يهکه م داشکانی $10\,000$ دینار بۆ دابين دهکات بهلام بلیتی دووم داشکانی پيژهي 15% دابين دهکات.

ا نهخشه ی $f(p)$ بنووسه، بۆئهو پارانه ی کۆژين بۆ کرپنی پيلاو دهيدات نرخهکه ی p دینار بیت، ئهگهر تهنها بلیتی يهکه م بهکار بهيټ.

ب نهخشه ی $g(p)$ بنووسه، بۆئهو پاره ی کۆژين بۆ کرپنی پيلاو دهيدات نرخهکه ی p دینار بیت، ئهگهر تهنها بلیتی دووم بهکار بهيټ.

ج $f(g(p))$ و $g(f(p))$ بدۆزهو.

د ئامۆژگاری کۆژين دهکيت، کام بلیتيان يهکه م جار بهکار بهيټ؟ ئه مه پروونبکهو.

ه کهمترین نرخ کۆژين دهيدات بۆ کرپنی جووته پيلاويټ نرخهکه ی $49\,000$ دینار بیت بدۆزهو.

بوومه له رزه ئه و شهپوله ی بوومه له رزه دروستی دهکات بهخپرایی 9 km/s بلاو دهبيټه و، زیانهکانی زۆر زۆر دهبيټ له و ناوچانه ی دهوری شوینی بوومه له رزه که یان داو.

ا نهخشهيهک بۆ ههژمارکردنی پروبه ی ناوچهيهک 2 km^2 بوومه له رزه کاريتيدهکات پاش t چرکه بدۆزهو.

ب زهويناسان خهملاندیان کاریگه ی بوومه له رزه کۆتايی دیت پاش ئه و ی پروبه ی ناوچه ی کارتيکراو دهگاته $35\,000\text{ km}^2$ ، کاریگه ی بوومه له رزه که چهند دهخايه نيټ.

37 **دانيشتوان** نهخشه ی $p(t) = 160\,000 \times 1.05^t$ پيسايهکه بۆ دياریکردنی ژماره ی دانيشتوانی يهکيټ له شارهکان، کاتيټ t ژماره ی سالهکان بیت، که له سالی 1980 دا ئه نجامدراو. و نهخشه ی $d(p) = 0.0044p$ ژماره ی پزیشکهکانی ئه م شاره به پي ژماره ی دانيشتوان بیت کاتيټ p ژماره ی دانيشتوانی شاره که بیت.

ا نهخشهيهکه بنووسه بۆ ههژمارکردنی ژماره ی پزیشکهکانی ئه م شاره به پي ژماره ی سالهکان، له سالی 1980 وه.

ب **خهملاندن** ژماره ی پزیشکهکانی ئه م شاره بۆ سالی 2010 بخهملنه.

ج که ی ژماره ی پزیشکهکانی ئه م شاره له 5000 پزیشک زیاتر دهبيټ؟

38 **بیری رهخنه گر** ئه گهر $f(x) = x$ ئایا هه موو کات نهخشه ی $f(g(x))$ يهکسانه به نهخشه ی $g(f(x))$ پروونبکهو

x	2	3	4	5
$f(x)$	0	1	2	3
x	1	2	3	4
$g(x)$	1	2	4	8

ئه م دوو خشته ی بهرام بهر بهکار بهيټه بۆ دۆزینهو ی هه ر بهه ايهک.

$f(g(2))$ **42** $g(f(4))$ **41** $f(g(3))$ **40** $g(f(5))$ **39**

39 **بیرکردنه و ی رهخنه گرانه** ئایا دهتوانیت ئه م دوو خشته بهکار بهيټیت بۆ دۆزینهو ی

$f(g(4))$ وهلامه کهت پروونبکهو.

40 **بنووسه** ئایا سه رجه می دوو نهخشه ی هیل دهبیټه نهخشه ی هیل؟ ئایا ئه نجامی لیکانی دوو نهخشه ی هیل دهبیټه نهخشه ی هیل؟ ئه مه پروونبکهو.

دهروازه يهک

بوومه له رزه



بوومه له رزه له ئه نجامی جووله ی چينهکانی زهوی نزیک شوینی قلیشبردو پهیداده بیت. قلیشهکان شکانی توپکلی زهوی و دهکوتیه سنووری چينه تهکتونییهکان.



45 كام لەم دوو نەخشە خوارەوۋە پاسەدانى ئەمە دەكەن، $f(x)$ و $g(x)$ كاتىك $(f \circ g)(x) = (3x+4)^2$

$g(x) = x^2$ ؛ $f(x) = 3x+4$ (ا)
 $g(x) = 3x+4$ ؛ $f(x) = x^2$ (ب)
 $g(x) = \sqrt{x}$ ؛ $f(x) = 3x+4$ (د)
 $g(x) = 4x^2$ ؛ $f(x) = (3x)^2$ (ج)

46 كام نەخشە برىتییە لە $(fg)(5)$ ئەگەر $f(x) = 2x+1$ و $g(x) = 5x-2$

253 (ا)
 53 (ب)
 47 (ج)
 13 (د)

47 كام لەمانەى خوارەوۋە نەخشەى $(f \circ g)(x)$ كاتىك $f(x) = 4-x^2$ ، $g(x) = \frac{1}{2}x-2$ ؟

$(f \circ g)(x) = -\frac{1}{2}x^2$ (ا)
 $(f \circ g)(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$ (ب)
 $(f \circ g)(x) = -x^2 + \frac{1}{2}x + 2$ (د)
 $(f \circ g)(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + 2x - 8$ (ج)

48 **تەنھا وەللام** $(f+g)(2)$ بدۆزەوۋە كاتىك $f(x) = (x+1)^2$ و $g(x) = 3x$

بەرەنگارى و فراوانکردن

49 $g(x)$ بدۆزەوۋە ئەگەر بزائىت $f(x) = 2x-6$ و $f(g(x)) = 3x^2+4$

50 $g(f(x))$ بدۆزەوۋە كاتىك $f(x) = 3x+8$ و $g(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 5x+2 & x \geq 0 \end{cases}$

51 **فىزىيا** نەخشەى $y = -0.12x^2 + 2.8x$ رېسايەكە بۆ

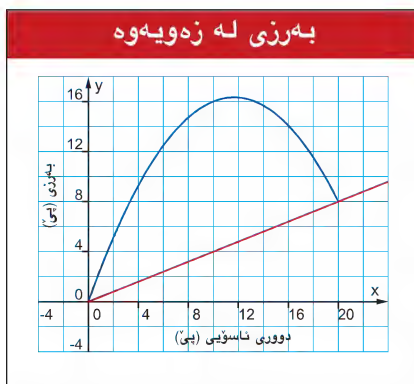
هەژمارکردنى بەرزى تۆپى پى دەنۆيىت. كە بە ئاراستەى گىردەكە لىدەدرىت، بەپىي دوورى ئاسۆيى x لەخالى لىدانەو. هەرەوھا نەخشەى $y = \frac{2}{5}x$ دۆزىنەوۋەى بەرزى خالىك لەسەر گىردەكە بەپىي دوورى لە خالى لىدانى تۆپەكە دەنۆيىت.

ا بەرزى لە ئاستى خالى لىدان بۆ بەرزترىن

خال تۆپەكە دەيگاتى بدۆزەو.

ب بەرزى لە ئاستى خالى لىدان بۆ خالى كەوتنە

خوارەوۋەى تۆپەكە لەسەر گىردەكە بدۆزەو.



پىداچوونەوۋەى لوويىچى

52 **كار** سالانە بەھاي بژمىرىك نرەكەى 2 500 000 دىنارە بە پىژەى 20% دادەبەزىت. (۱-۴ وائەى)

ا نەخشەيەك بۆ دۆزىنەوۋەى بەھاي بژمىر پاش t سال بنووسە.

ب بەھاي بژمىر پاش 10 سال دەبىتتە چەند؟

بنووسە ئەگەر زائىت $f(x) = \begin{cases} 8x & x \geq 0 \\ x-9 & x < 0 \end{cases}$ رېسايەك بۆ ھەر نەخشەيەك بنووسە. (۵-۲ وائەى)

53 $g(x)$ برىتییە لە نەخشەى پەيداۋو لە جىگۆرپكى نەخشەى $f(x)$ بە راکىشانى 5 يەكە بۆلای چەپ.

54 $h(x)$ برىتییە لە نەخشەى پەيداۋو لە جىگۆرپكى نەخشەى $f(x)$ بە كشانى ئاسۆيى

ھاوگۆلەكەى 3 بىت.

نموونه بیرکارییهکان

Mathematical Models



کی ئه مه به کار ده هیئت؟

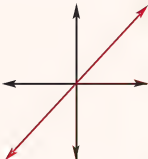
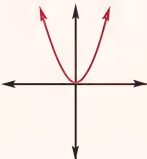
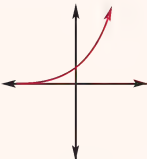
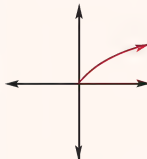
دهتوانیت نموونه بیرکارییهکان بۆ شیکردنه وه و
پیشبینی کردنی ژماره‌ی ئامیره‌کانی پاره‌پێدان
(صرف الالی) که ئیش ده‌کهن به‌کار بهیئت. (نموونه 3)

زۆر لهو پیدراوانه‌ی له‌سه‌رباره‌کانی ژیان کۆده‌کرینه‌وه

شیوه‌یه‌ک پیکده‌هیئت ده‌توانیت به‌کار بهیانی نه‌خشه‌یه‌ک لهو نه‌خشانه‌ی خویندوته بنوینیت
ئه‌و کاته ده‌توانیت ئه‌م نه‌خشانه‌ی بۆ شیکردنه‌وه و دارشتنی پیشبینیه‌کان به‌کار بهیئت. هه‌ندیک
لهو نه‌خشه‌ بنه‌رتیه‌یه‌ی تا ئیستا خویندوته وه‌بیر خۆت بینه‌وه.

ئامانجه‌کان

بۆ نواندنی باری ژبانی پۆژانه
به‌هۆی نه‌خشه‌کان نموونه‌ی
بیرکاری به‌کار ده‌هێنرێت بۆ
به‌جیهانی پیشبینیه‌کان.

نه‌خشه‌ بنه‌رتیه‌یه‌کان				
جۆر	هیئت	دوجا	توانی	ره‌گی
هاوکیشه	$f(x) = x$	$f(x) = x^2$	$f(x) = b^x, b > 0$	$f(x) = \sqrt{x}$
پوونکردنه‌وه				
نه‌گۆری جیاوازییه‌کان پێژده‌کان	نه‌گۆری جیاوازییه‌کانی یه‌که‌م بۆ به‌هایه‌کانی y که به‌هایه‌کانی x وه به‌ستراوه‌ له‌ دوریدا یه‌کسانن	نه‌گۆری جیاوازییه‌کانی دوهم بۆ به‌هایه‌کانی y که به‌هایه‌کانی x وه به‌ستراوه‌ له‌ دوریدا یه‌کسانن	نه‌گۆری پێژده‌ی به‌هایه‌کانی y که به‌هایه‌کانی x وه به‌ستراوه‌ له‌ دوریدا یه‌کسانن	نه‌گۆری جیاوازییه‌کانی دوهم بۆ به‌هایه‌کانی x که به‌هایه‌کانی y به‌ستراوه له‌ دوریدا یه‌کسانن



یارمه‌تی

له‌به‌رئه‌وه‌ی نه‌خشه‌ی ره‌گی
دوجای نه‌خشه‌ی
هه‌لگه‌پاره‌یه‌ بۆ نه‌خشه‌ی
دوجا ئه‌وا به‌های x و
به‌های y ئالوگۆر ده‌بن.

جیاکردنه‌وه‌ی نموونه‌کان به‌به‌کار بهیانی نه‌گۆری جیاوازییه‌کان یان پێژده‌کان

نه‌گۆری جیاوازییه‌کان یان پێژده‌کان به‌کار بهیانه‌ بۆ دۆزینه‌وه‌ی نه‌خشه‌ی بنه‌رتی
گونجاوتر بۆ نواندنی ئه‌م کۆمه‌له‌ پیدراوانه‌.

دریژی سپرینگه‌که‌ پشت به‌و بارستاییه‌ ده‌به‌ستیت که پێوه‌ی هه‌لواسراوه

10	9	8	7	6	5	4	بارستای (kg)
39	37.6	36.2	34.8	33.4	32	30.6	دریژی (cm)

سه‌رنجده‌ جیاوازی نیوان هه‌ردوو به‌های هاوسی بۆ بارستاییه‌که‌ نه‌گۆره‌. ساغبه‌که‌ وه
ئه‌گه‌ر جیاوازی نیوان هه‌ردوو به‌های هاوسی بۆ دریژی نه‌گۆره‌.

39	37.6	36.2	34.8	33.4	32	30.6	دریژی (cm)
----	------	------	------	------	----	------	------------

جیاوازییه‌کانی یه‌که‌م 1.4 1.4 1.4 1.4 1.4 1.4

له‌به‌رئه‌وه‌ی جیاوازی یه‌که‌م نه‌گۆره‌ ئه‌وا نه‌خشه‌ی هیئت گونجاوتره‌ بۆ نواندنی
پیدراوه‌کانی خسته‌که‌.

نموونه 1

ب) ته‌مه‌نی دار به تیره‌کمی دیاری ده‌کریټ.

تیره‌کمی (cm)	1.6	3.6	6.4	10.0	14.4	19.6	25.6
ته‌مه‌ن (سال)	2	3	4	5	6	7	8

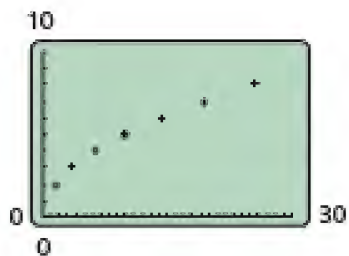
سه‌رنج‌بده جیاوازی نیوان ه‌ردوو به‌های هاوسی له خشته‌کدها بۆ ته‌مه‌ن نه‌گۆره. ساغ‌بکه‌وه ئه‌گه‌ر جیاوازی نیوان دوو به‌های ته‌نیشت بۆ تیره نه‌گۆر بیت.

تیره‌کمی (cm)	1.6	3.6	6.4	10.0	14.4	19.6	25.6
---------------	-----	-----	-----	------	------	------	------

جیاوازی‌یه‌کانی یه‌که‌م 6.0 5.2 4.4 3.6 2.8 2.0

جیاوازی‌یه‌کانی دووهم 0.8 0.8 0.8 0.8 0.8

له‌به‌رئه‌وه‌ی جیاوازی‌یه‌کانی دووهم بۆ گۆراوی ئازاد x نه‌گۆرین، که به به‌هاکانی گۆراوی به‌ستراو y وه به‌ستراوه له‌دووریدا یه‌کسانن.



ئه‌وا نه‌خشه‌ی پرگی دووجا گونجاوترین نموونه‌یه بۆ نواندنی ئه‌م پێدراوانه پاسه‌دان خاله‌کانی خشته‌که ئه‌وه درده‌خه‌ن گونجاوترین نه‌خشه بریتییه له $f(x) = \sqrt{x}$

ج) قه‌باره‌ی بری ئاوی ماوه پاش به‌هه‌لمبوون به‌کات دیاریده‌کریټ.

کات (کاتزمیر)	1	2	3	4	5	6
قه‌باره (mL)	512	384	288	216	162	121.5

له‌به‌رئه‌وه‌ی جیاوازی‌یه‌کانی نیوان دوو به‌های هاوسی له‌خشته‌کدها بۆ کات نه‌گۆره. تۆش ئه‌وه پاسه‌دان بکه جیاوازی‌یه‌کانی نیوان دوو به‌های هاوسی بۆ قه‌باره نه‌گۆره.

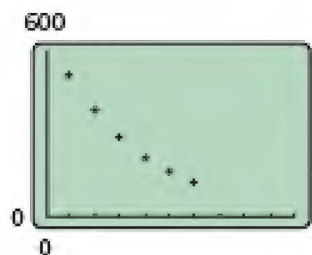
قه‌باره (mL)	512	384	288	216	162	121.5
--------------	-----	-----	-----	-----	-----	-------

جیاوازی‌یه‌کانی یه‌که‌م -128 -96 -72 -54 -40.5

جیاوازی‌یه‌کانی دووهم 32 24 18 13.5

جیاوازی‌یه‌کانی یه‌که‌م نه‌گۆر نییه. ه‌روه‌ها جیاوازی‌یه‌کانی دووهم. ساغ‌بکه‌وه ئایا رێژه‌ی ه‌ر به‌هایه‌ک له قه‌باره بۆ به‌های پێش خۆی نه‌گۆره یان نا.

$$\frac{121.5}{162} = 0.75 \quad \frac{162}{216} = 0.75 \quad \frac{216}{288} = 0.75 \quad \frac{288}{384} = 0.75 \quad \frac{384}{512} = 0.75$$



له‌به‌رئه‌وه‌ی رێژه‌ی ه‌ر به‌هایه‌کی قه‌باره بۆ به‌های پێش خۆی نه‌گۆره. ئه‌وا نه‌خشه‌ی توانی گونجاوتره بۆ نواندنی پێدراوه‌کانی خشته‌که.

ساغ‌بکه‌وه له‌م خاله‌ پرونکردنه‌وه‌بیانه‌دا دیاره که پێدراوه‌کانی خشته‌که ده‌نویټت که نه‌خشه‌ی گونجاو بۆ نواندنی ئه‌م پێدراوانه بریتییه له نه‌خشه‌ی که‌مبووه توانی (دالة تراجع اسی)

1. نه‌گۆری جیاوازی‌یه‌کان یان رێژه‌کان به‌کاربه‌هێنه بۆ دۆزینه‌وه‌ی نه‌خشه‌ی

بنه‌رته‌ی گونجاو که کۆمه‌له پێدراوه‌کان بنویټت.

x	21	22	23	24
y	243	324	432	576

x	12	48	108	192	300
y	10	20	30	40	50

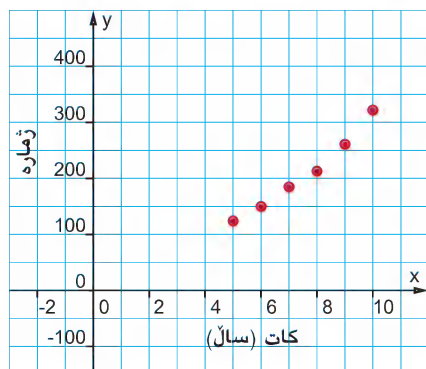
دەگمەنە جیاوازی نیوان پیدراوه راستییەکان یان پێژەکیان نەگۆرپیت بەواتای بیرکارییانە، بەلام دەتوانیت جیاوازییەکان یان پێژەکانیان شیکەیتەووە بۆ ئەوەی بزانی نزیكە لەوەی بپێتە نەگۆر. ھەرھەم دەتوانیت پیدراوه راستییەکان بەخالی پروونکردنەوھیی بنوینیت، جۆری نەخشە گونجاو بۆ نواندنی بناسیتەووە پاشان فەرمانی لێژبوونەووە Regression لە بژمیری پروونکردنەوھیی بەکاربھێنە بۆ دۆزینەوھیی ئەو نەخشەیی پیدراوھەکان بە باشتترین شیوہ دەنوینیت.



نموونه 2 جیپەجیکردن لەسەر پارێزگاریکردنی ڕەگەز

یەكێك لە زانایەكانی بواری ئازەڵ پیدراوھەكانی لەسەر پەرەپێدانی ژمارەییەك لە گامیشی بوفالو كۆكردووە لە گەلە گامیشیەك كە لە كێلگەییەكی سروشتی بەرەلەكراوون نەخشەییەك بنووسە ئەم كۆمەلە پیدراوھە بنوینیت.

كات (سال)	5	6	7	8	9	10
ژمارە	124	150	185	213	261	322



ھەنگاوی 1 خالی پروونکردنەوھیی دروستبەكە كە پیدراوھەكانی ناو خشتەكە بنوینیت خالە پروونکردنەوھییەكان دەریدەخات كە شیوہییەكی دووجا یان شیوہییەكی توانی ھەیە

ھەنگاوی 2 لە جیاوازییەكان بكۆلەو.

ژمارە	124	150	185	213	261	322
جیاوازی یەكەم	26	35	28	48	61	
جیاوازی دووھم	9	-7	20	13		

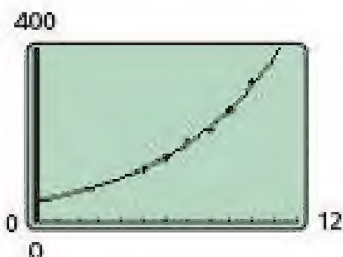
وادیارە نە جیاوازییەكانی یەكەم و نە جیاوازییەكانی دووھم نەگۆرپییە.

ھەنگاوی 3 لە پێژەكان بكۆلەو.

$$\frac{322}{261} = 1.234 \quad \frac{261}{213} = 1.225 \quad \frac{213}{185} = 1.151 \quad \frac{185}{150} = 1.233 \quad \frac{150}{124} = 1.210$$

ھەموو پێژەكان نزیكە لە 1.2، ئەمەش ھانمان دەدات لەدوای نموونەییەكی توانی بگەڕێن.

ھەنگاوی 4 بژمیری پروونکردنەوھیی بەکاربھێنە بۆ دۆزینەوھیی نموونەیی توانی



نەخشەیی توانی $f(x) = 48.581(1.207^x)$ پێسایەكە بۆ پیدراوھەكانی خشتەكە.

2. نەخشەییەك بنوسە پیدراوھەكانی خشتەیی خوارەووە بنوینیت.

x	12	14	16	18	20	22	24
y	110	141	176	215	258	305	356

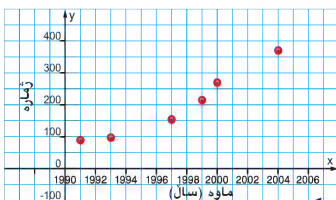


یارمەتی

بۆ ئەوەی ھاوئێکەیی
پەڕەستی 2 لە شاشەكە
CATALOG
دەركەوێ دوگمەیی
پاشان 0 دابگرە پاشان
Diagnostic On ھەلپژیرە.

کاتیک پیدراوهکان پیزنهکراهن یان جیاوازی نیوانیان نهگورنه بیټ. پیویسته چهند نمونهیهک تاقیبکه یتهوه بۆ دۆزینه وهی ئه وهی باشتی پیدراوهکان دهنویټت. له بژمیری پونکردنه وهییدا بهایهک دهردهکویټ پییدهوتریت هاوکۆلهی دیاریکردن «معامل التحید» به r^2 هیما کراوه یان هیما R^2 بۆ دانراوه. ههتاکو هاوکۆلهک به له 1 نزیکبیټهوه، ئهوا نمونهی باشتی نواندن کۆمهله پیدراوهکان.

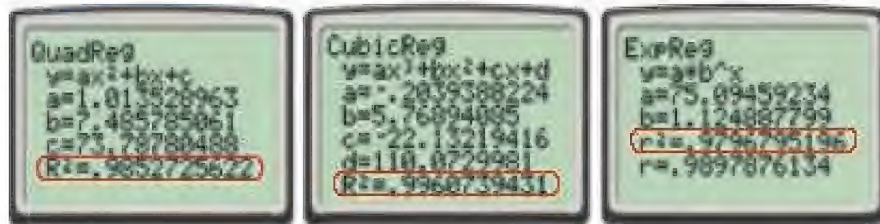
ژماره ی نامیر	سال
90	1999
98	1993
159	1997
227	1999
270	2000
370	2004



جیبه جیکردن له سهه کردارهکانی بانک

له پیدراوهکانی بهرامبهرت ژمارهکانی نامیری پاره پیدان (صراف الالی) له یهکێک له وولاتهکان سال بهدوی سال پیشاندادهات. نهخشهیهک بنووسه ئهه کۆمهله پیدراوه بنویټت به پشتبهستن به سالی 1990 سالی سفر بیټ.

له بهرئه وهی جیاوازییهکانی بههای گورپای ئازاد نهگورنییه و ههروهها جیاوازییهکانی بههای گورپای په یوهست نهگورنییه، ئهوا ناتوانیت لیکۆلینه وهی جیاوازییهکان بکهیت. خالی پونکردنه وهی دروستبکه بۆ نواندن پیدراوهکان به پشتبهستن به 1990 به سالی سفره. له خاله پونکردنه وهییهکانه وه دهردهکویټ که شیویهکی دووجا یان سیجا و یان توانی ههیه. بژمیری پونکردنه وهی به کاربهیینه بۆ نهجامدانی گهراوهی ههر جورێک.



بهراوردبکه له نیوان بههاکانی r^2 . دیاره نمونهی سیجا باشتیینه. دهتوانیت ئهه نهخشه به کاربهیټیت.

$$f(x) = 0.2x^3 + 5.44x^2 - 22.13x + 110.07$$

نمونهیهکه بۆ دیاریکردنی ژماره ی نامیرهکان به پیی سالهکانی پاش سالی 1990

3. ئهوه نهخشه بنووسه که پیدراوهکانی ئهه نهخشه ی خواره وه دهنویټت.

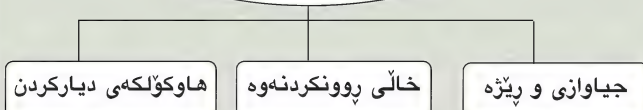


x	11	14	25	31	40	50
y	245	302	480	557	645	705

بیربکه وه و تاوتویبکه

1. بۆچی بهکارهینانی جیاوازییهکان و ریژهکان لهکاتی ئیش کردن به پیدراوه راستیهکان به سنوورداد دانهنرین.
2. ریکخه ریه ئهه خشته ی خواره وه دروستبکه و تهواویبکه. پرونیبکه وه چۆن ههر ریکایهک یارمهتیت دهدات نمونهی گونجاو بۆ نواندن پیدراوهکان دیاریبکهیت.

دیاریکردنی نمونه



راھینانی ئاراستەکراو

جیاوازییەکان و پڕژەکان بەکاربەھێتە بۆ دۆزینەوێ ئێو نەخشە بنەرەتییهی کە باشتەری
نموونه بۆ ناوندی پیدراوەکان پیکدەھێنێت

1 پروانە نمونە

x	y
0	125
1	150
2	180
3	216
4	259.2
5	311.04

3

x	y
11	2
47	6
99	10
167	14
251	18
351	22

2

x	y
6	69.6
13	51.4
20	33.2
27	15
34	-3.2
41	-21.4

1

خشتە خوارەو پوونیدەکاتەو کە بری ماوە ماددە ئایۆدین - 131 بەگرام پاش t پۆژ
لەدەستکردن بە تاقیکردنەو.

کات t بەپۆژەکان	0	1	2	3	4	5	6
برکە m بەگرام	1000	917.40	841.62	772.10	708.33	649.82	596.14

ا نەخشەیک بنووسە پیدراوەکانی خشتەکە بنوینێت.

ب نەخشەکە بەکاربەھێتە بۆ دۆزینەوێ ژمارە پۆژەکان بۆ ئەوێ بری ئایۆدینی - 131 ماوە
لە 50 g کەمترە.

لەم خشتە خوارەو ژمارە پاسکیلەکان لە شوینی فرۆشتنی پاسکیل لە بیست و چوار مانگی
پیشوو دەرەکەوێت.

کات t بەمانگەکان	0	4	9	12	15	20	24
ژمارە	62	54	45	48	55	53	60

ا نەخشەیک بنووسە پیدراوەکانی خشتەکە بنوینێت.

ب نەخشەکە بەکاربەھێتە بۆ دۆزینەوێ ژمارە پاسکیلەکان لە مانگی شەشەم.

ج ئایا ئامۆژگاری خاوەن دوکانەکە دەکەیت پشت بەم نەخشەیک ببەستێت بۆ پیشینی
کردنی ژمارە پاسکیلەکانی ناو دوکانەکە پاش سالیکی لە ئیستاو؟

راھینان و شیکارکردنی پرسیارەکان

جیاوازییەکان و پڕژەکان بەکاربەھێتە بۆ دیاریکردنی نەخشەیک بنەرەتی کە باشتەری نموونه بۆ
پیدراوەکان پیکدەھێنێت.

x	y
4	4
9	6
16	8
25	10
36	12

8

x	y
2	97
8	202
14	253
20	250
26	193
32	82

7

x	y
1	380
3	343
5	310
7	279
9	252
11	228

6

راھینانی نازاد

شیکارکردنی تەماشای	راھینان
1	8-6
2	9
3	10

9 كشتوكال يەككە لە جوتيارەكان تاقىكرەنەوئەيەكى ئەنجامدا لەسەر برى ئەو پەينەى پيوستە لە دۆنمە زەويەكدا بكرىت، بۆ دەستكەوتنى باشترين بەرھەم بۆ ئەم مەبەستە چەند كىلگەيەكى بەكارھېنا، ئەنجامى تاقىكرەنەوئەكەى لەم خشتەى خوارەو تۆماركرد، نەخشەيەك بنووسە پيڊراوەكانى ناو خشتەكە بنويىت.

150	135	125	115	90	70	45	بىرى بىيىن بۆيەك دۆنم (kg)
76	86	84	88	70	60	29	بىرى بەرھەم بۆيەك دۆنم (رپە)

10 زىندەزانى ئەم خشتەى خوارەو تۆمارەى خەملىنراوى جۆرىك لە بەكترياي (ابريشيا كولى) لە دەفرىكى تاقىكرەنەوئەدا دەنويىت پاش 6 خولەك لە دەستپيكرىن بە تاقىكرەنەو.

60	50	40	30	20	10	0	كات t بەخولەك
2354	1686	1188	842	596	423	300	تۆمارەى بەكتريايكان

- أ رېسايەك بنووسە كە تۆمارەى بەكتريايكان بەپيى كات بنويىت. باشترين نواندن بىت.
- ب رېسايەكە بۆ دۆزىنەوئەى تۆمارەى بەكتريايكان پاش 3 كاتژمىر بەكاربھيئە.
- ج چەند كاتى دەويىت بۆئەوئەى تۆمارەى بەكتريايكان 3 ئەوئەندەى تۆمارەى سەرەتاكەى لېيىت؟
- مولكايەتى** ئەم خشتەيە نرخەكانى تۆماريەك خانووى فروشراو بەپيى پروبەرەكەى دەنويىت

276	227	233	138	109	248	پرووبەر (m ²)
187	169.9	172.5	136.75	125.9	179	نرخ (مليۇن دىنار)



- أ رېسايەك بۆ ھەتۆماركردنى نرخى خانوو بەپيى پروبەرەكەى بدۆزەو. (پرووبەر ۈك گۆراوى ئازاد بەكاربھيئە)
- ب رېسايەكە بەكاربھيئە بۆ دۆزىنەوئەى پرووبەرەى نزيكراوئەى خانوويەك نرخەكەى 175 مليۇن دىنار بىت.
- ج ئايا باوئەردەكەيت ۈلەمەكەت بۆ لىقى (ب) ورد بىت؟ ئەمە پروونبەكەو.

12 ئابوورى يەككە لە زانايانى ئابورى لىكۆلىنەوئەيەكى لەسەر ناوئەندى كرىي پۆزانەى تاكەكانى كۆمەلە كرىكارىكى كەرتى تايبەت كرد، بەپيى تەمەن ئەنجامدا پيڊراوەكانى بەم شۆوئەى خوارەو تۆماركرد.

68	58	48	38	28	18	تەمەن (سال)
21 390	37 570	41 230	37 440	30 650	17 480	ناوئەندى كرىي (دىنار)

- أ نمونەيەكى گونجاو بۆ نواندن پيڊراوەكانى خشتەكە بدۆزەو.
- ب نمونەيەك بەكاربھيئە بۆ دۆزىنەوئەى ناوئەندى كرىي پۆزانەى كرىكارىك لەم چەشنە، تەمەنى 43 سال بىت.

13 تەندروستى ئەم خشتەى خوارەو تەمەنى ژنان لە يەككە لە كۆمەلگەكان دەنويىت كاتىك يەكەم مندايان دەيىت.

2000	1995	1990	1985	1980	سال
24.9	24.5	24.2	23.7	22.7	ناوئەندى تەمەنى ژن كاتىك مندايى يەكەمى دەيىت

- أ سالى 1980 بە سالى سفر دابنى بژمىرى پروونكرەنەوئەى بەكاربھيئە بۆ دۆزىنەوئەى نمونەيەكى دووجا و يەككىتر سىجا بۆ نواندن پيڊراوەكانى خشتەكە.
- ب ھەردوو نمونەكە بەكاربھيئە بۆ خەملاندى تەمەنى يەكەم مندايىوئەى ژن لەم كۆمەلگەيدا لە سالى 2010 بخەملىنيت.
- ج كام خەملاندىن بەلاى تۆ لە راست نزيكە؟ ئەمە پروونبەكەو.

دەروازەيەك

مىژووى بىركارى



زاناي بىركارى فرەنسى
لۆجندەر Legendre
(1752 – 1833) لە سالى
1806 پېرپووى يەككە لە
كلكدارەكانى دۆزىيەو،
بەپىگاي وئە كيشانى
چەماوئەك بەنزيكترين
شويىن لە توانادا بىت
بروات، لە ھەندىك لەو
شويىنەى كلكدارەكەى
تيدابىنراو.

14 ئەم خىشتەيە خواروۋە قەبارى ھەۋاي گەرم v لە ئالۇن بەيى پلەي گەرمى بەرگە ھەۋا t دەنۇيىت.

47	44	41	37	پلەي گەرمى
1130	1027	934	850	قەبارە (m^3)

- ا) نەخىشەيەكى تۈنى بۇزۇۋە پىدراۋەكانى خىشتەكە بنۇيىت.
- ب) نەخىشەيەك بۇ ديارىكردنى قەبارى ھەۋاي گەرم لەناۋ ئالۇنەكە بەكاربەيىنە ئەگەر پلەي گەرمى بەرگە ھەۋا $42^\circ C$ بىت.
- ج) ئايا نەخىشەكە گونجاۋ دەيىت كاتىك پلەي گەرمى لە 47 پلە زياترەيىت؟ ھۆيەكەي بلى.

15 **كىشوكال** ئەم خىشتەي خواروۋە ژمارى كىلگەكان لە يەككە لە ۋلاتە گەرەكان و ناۋەندە پوۋبەرى كىلگەكە لەسەدەي بىستەم دەنۇيىت.

1997	1987	1969	1950	1930	1910	سال
1.9	2.1	2.7	5.4	6.3	6.4	ژمارى كىلگەكان
487	462	390	216	157	139	ناۋەندە پوۋبەر (دۇنم)

- ا) ژمارى كىلگەكان ۋەك گۇپراۋى ئازاد بەكاربەيىنە بۇ دۇزىنەۋەي نەخىشەيەك بۇ ناۋەندە پوۋبەرى كىلگەكە
- ب) نەخىشەكە بەكاربەيىنە بۇ خەملاندنى ناۋەندە پوۋبەرى كىلگەكە. كاتىك ژمارى كىلگەكان دەگاتە 1 ملۇن
- ج) نەخىشەكە بەكاربەيىنە بۇ خەملاندنى ناۋەندە پوۋبەرى كىلگەكە. كاتى ژمارى كىلگەكان دەيىتە 4.5 ملۇن

16 **بازارى دراۋ** سالى 1990 كۇمپانىيائى ھەلۇي پىشەسازى دامەزرا. ئەم خىشتەي خواروۋە ھەندىك لە نرخی پىشكى (سەم) ئەم كۇمپانىيائە دەنۇيىت.

2003	2000	1997	1994	1991	سال
151 190	132 440	107 260	96 410	79 410	نرخی پىشك بە دىنار

- ا) نەخىشەيەك بۇ نۈۋەندى پىدراۋەكانى خىشتەكە بۇزۇۋە.
- ب) پىژەي سەدى نرخی بەرزىۋونەي پىشكى كۇمپانىيائى ھەلۇ لە سالىكدا چەندە؟
- ج) ئەگەر پىشكى كۇمپانىيائى ھەلۇ لە سالى 2004 ، 155 520 دىنار بىت. ئايا ئەم نرخی دەگونجىت لەگەل ئەۋ نرخی نەخىشەكە ديارەكات؟ ئەمە پوۋنەكەۋە.
- د) نەخىشەكە كە بۇ خەملاندنى ئەۋ سالى نرخی پىشكى كۇمپانىيائى ھەلۇ دەگاتە 200 000 بەكاربەيىنە.
- ه) بەھۇي ھەلئاسان سالى 1991 ئەۋەي نرخی يەك دىناربۋو 1.34 بەرز بوو سالى 2003 بەراۋرد بىكە لەنۇۋان بەرزىۋونەۋەي نرخی پىشكى كۇمپانىيائى ھەلۇ و پىژەي ھەلئاسان.

17 **زىندەزانى** ئەم خىشتەي خواروۋە ژمارى جۇرەكانى خىشۇكە، لەھەندىك لە دۈۋرگەكانى كاريبي و پوۋبەرى ئەۋ دۈۋرگەكە بە ميل دۈۋجايە.

100	108	45	53	16	11	ژمارە
44 218	29 371	4 244	3 435	32	5	پوۋبەر

- ا) نۈۋەنەيەك بۇ نۈۋەندى پىدراۋەكانى خىشتەكە بۇزۇۋە، دۈۋى ئەۋەي ژمارە بەگۇپراۋى سەرىبەست دابىرەيت
- ب) ھەمان نۈۋەنە بەكاربەيىنە بۇ خەملاندنى پوۋبەرى دۈۋرگەيەك كە 75 جۇر خىشۇكى تىدەيىت.
- ج) ۋردى خەملاندەكە لە لىقى (ب) دا چۇن دەبىنەيت؟ ئەمە پوۋنەكەۋە.



18 بیرکردنه وهی په خنه گرانه هه ندیک جار واده ده که ویت نه خشه ی دوو جا با شتره له نه خشه ی

هیلی بۆ پیدراوه کان، دهر باره ی هاوکولکه ی a له پسا دوو جا که دا چی ده لیت؟

19 بنووسه وا دابنئ پسا یه کی گونجاوت دوزیه وه پیدراوه کانئ دوو گؤراو بنوینت. ئایا گه یشتیه ئه و نه جامه ی که په یوه ندیه کی هوکاری باش هیه له نیوان دوو گؤراوه که؟ پشتگیری وه لامه که ت به نمونه بکه.

ناماده گردن بۆ تاقیکردنه وه

x	y
3	2
4	23
5	50
6	93
7	122
8	167

20 کام له مانه ی خواره وه له سه ر پیدراوه کانئ خشته ی به رامبه ر

جیبه جی ده بیت؟

(ا) جیاوازیه کانئ یه که م بۆ گؤراوی به ستراو نه گؤره.

(ب) جیاوازیه کانئ دووهم بۆ گؤراوی به ستراو نه گؤره.

(ج) پیژه ی به های گؤراوی په یوه ست نه گؤره

(د) پیژه ی گؤراوی ئازاد نه گؤره

21 به های n چنده که پیگه به نواندنئ پیدراوه کانئ خشته ی به رامبه ر به پسا یه کی توانئ ورد ده بیت؟

x	5	6	7
y	16	28	n

(ا) 40

(ب) 49

(ج) 45

(د) 52

22 به های n چنده که پیگه به نواندنئ پیدراوه کانئ خشته ی به رامبه ر به پسا یه کی دوو جای ورد ده بیت؟

x	5	6	7	8
y	12	32	58	n

(ا) 60

(ب) 70

(ج) 80

(د) 90

به رهن گاری و فراوان گردن

23 نه خشه ی $p(t) = \frac{a}{1+be^{-kt}}$ پیی دهوتریت نه خشه ی بازارئ (دالة السوق) له و بارانه ی تییدا خوراک یان

پووبه ری زه وی له به رامبه ر گه شه ی کو مه له کان پیگره. ده توانیت نه خشه ی $F(t) = \frac{4000}{1+5.7e^{-0.2t}}$ به کار به یئیت بۆ دیاریکردنئ ژماره ی ماسیه کان له کیلگه یه کی به خپوکردنئ ماسی به پیی ژماره ی ئه و مانگانه ی به سه رچاندنئ هیله که ماسیه کاندا تیده په پیئت، کاتیک t ژماره ی مانگه کان بیئت.

(ا) ژماره ی ماسیه کانئ ناوکیلگه که پاش 10 مانگ له چاندنئ بخه ملینه.

(ب) بوئه وه ی ژماره ی ماسیه کان بگاته 3000 ماسی چند مانگ ده خایه نیئت؟

(ج) زورترین ژماره ی ماسیه کانئ کیلگه که بدوزمه و، ئه گه ر نه خشه که گونجاو بیئت بۆ به کاره یئان.

24 بژمیری پوونکردنه وه بیی ده توانیت جوړیکی تر له شیوه کانئ

لیژبوونه وه، به به کاره یئانئ بژمیری پوونکردنه وه بیی بدوزیته وه،

ئویش لیژبوونه وه ی هیزه Power Regression. فرمانئ PwrReg له

بژمیری پوونکردنه وه بییدا به کار به یئنه بۆ دوزینه وه ی نمونه ی هیزه که

پیدراوه کانئ خشته ی به رامبه ر بنوینت.

x	1	24	41	74
y	1	4.9	6.4	8.6

پیداچوونەوہی لوویچی

ہەر سستەمیک لەم لاسەنگانە بەشیوہی ڕوونکردنەوہی بنوێتە (وانە 2-3)

$$\begin{cases} y \leq 5x \\ y \geq x+2 \end{cases} \quad \text{27} \quad \begin{cases} y \geq x-8 \\ y \leq -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{26} \quad \begin{cases} y \geq 3x+1 \\ y \leq x-3 \end{cases} \quad \text{25}$$

28 کار نەخشە $p(x) = -x^3 + 12x^2 - 12x - 80$ ڕیڤسایەکە، قازانجی یەکیک لە کۆمپانیاکانی بە ملیۆنەھا دینار پێ ھەژماردەکرێت، کاتی x ژمارە یەکە بەرھەمھێنراوەکان بێت (پۆلەکانی پێشوو)

ا سفرەکانی ئەم نەخشە بەدۆزەوہ.

ب کام لە سفرەکانی نەخشە ژمارە یەکە بەرھەمھێنراوەکان دەنویێت، کە و لە کۆمپانیاکە بکات لە زەرەرەوہ بۆ قازانج بچێت.

ئاوێتەکردنی نەخشەکان بەکاربھێنە بۆ بریاردان لەسەرئەوہی نەخشە g پێچەوانە f نەخشە f دەبێت. (وانە 4-5)

$$g(x) = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5} ; f(x) = -4 + 5x \quad \text{30} \quad g(x) = \sqrt{x} + 1 ; f(x) = x^2 + 1 \quad \text{29}$$

5 ويئەنى پوونكردەنەوئى ئەم نەخشە بكيئشە.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -2 \\ -3x+2 & x \geq -2 \end{cases}$$

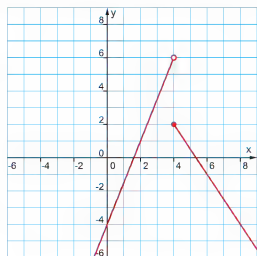
6 بەھاي نەخشەكە بدۆزەو $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5x+9} & x \geq 4 \\ 9-7x & x < 4 \end{cases}$ كاتيك $x = -6$ و $x = 10$

ويئەنى پوونكردەنەوئى نەخشەكە بكيئشە.

$$f(x) = \begin{cases} 2x-4 & x < 0 \\ 5 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x-1 & x \leq 2 \\ \sqrt{x+2} & x > 2 \end{cases}$$

9 نەخشەيەكى پەلدار بۆئەم پوونكردەنەو بنووسە.



10 كۆمپانىيەكى پوئست و گواستەنەو 6000 دىنار بۆھەر نىرراوئىك وەردەگرئىت كە بارستايى لە 8 kg زياتر نەبئىت، و بۆھەر كىلوگرامئىكى زىادە 1500 دىنار وەردەگرئىت. نەخشەيەكى پەلدار بنووسە بۆ ئەو پارەى وەريدگرئىت بۆ نىرراوئىك بارستايى لە 18 kg زياتر نەبئىت.

11 $g(x)$ نەخشەى بەيدا بو لە جىگۆرپكى نەخشەى

$$f(x) = \begin{cases} 2x-2 & x \leq 3 \\ -4x+16 & x > 3 \end{cases}$$
 بە پاكئشانى دوو يەكە بۆلای چەپ. ھاوئىشەى نەخشەى $g(x)$ بنووسە.

12 نەخشەى $h(x)$ بنووسە كە پەيدا بوو لە پاكئشانى

$$f(x) = \begin{cases} 2x-2 & x \leq 3 \\ -4x+16 & x > 3 \end{cases}$$
 دوو يەكە بۆ سەرەو

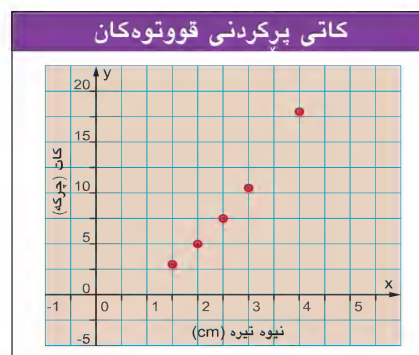
1 سەرۆكى شارەوانى پاش بارىنى بەفرئىكى زۆر گرنگى

بە پاككردەنەوئى شەقامەكان دەدات. ئەم خشتە تىچوونى پاككردەنەو پووبەرى جياوازی شەقامەكان دەنوئىت. ويئەنى پوونكردەنەوئى بەكاربەئىنە و ھاوئىشەيەك بنووسە بۆ ھەژماركردى تىچوونى پاككردەنەوئى شەقامئىك درئىيەكەى 2400 m بئىت.

درئى شەقام بەمەتر	تىچوون بەدىنار
300	6950
600	8900
900	10 850
1200	12 800

2 يانەى پۆشنبىرى سلىمانى نەخشە دادەپژئىت ئاھەنگى رېزلىئان بۆ دامەزئىنەرانى ئەنجام بدات رېكخەرى ئاھەنگەكە پىيارىدا بۆ ميوانەكان بە 4 دەفر پىشكەش بكات و ھەريەكەيان 30 پارچە شيرىنى تىدا بوو، دواى ئەو 4 پارچە شيرىنى بۆ ھەر ميوانئىك زىادكرا، خشتەيەك دروستبەكە و ويئەنى پوونكردەنەوئى بكيئشە و ھاوئىشەيەك بۆ نواندى ئەم بارە بنووسە ژمارەى ميوانەكان بە گۆپاوى ئازاد دابنى

3 ئەم خالە پوونكردەنەويانە پىدراوەكانى كاتى پئويست بۆ پىكردى ژمارەيەك قووتو لوولەكى بەپئى نيوە تيرەى بئەكە بوئىت.



ا خشتەيەك دروستبەكە و ھاوئىشەيەك بنووسە پىدراوەكان بنوئىت.

ب ئەو ھاوئىشەى پىشوو بۆ خەملاندنى كات بەكاربەئىنە، كە پئويستە بۆ پىكردى قووتوئەك نيوە تيرەى بئەكەى 12cm بئىت.

4 بەھاي نەخشەكە بدۆزەو $f(x) = \begin{cases} 5x+2 & x \leq 1 \\ x^2-6 & x > 1 \end{cases}$ كاتيك $x = -2$ و $x = 5$

13 نەخشەى $g(x)$ بنووسە پەيدا بوو لە ڤاڤىشانى

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases} \quad 7 \text{ يەكە بۆ لای پاست.}$$

14 وینەى پوونکردنەوہیى $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$ بکیشە ئەگەر بزانیى $f(x) = 2x^2 + 1$

15 $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ بدۆزەو، ئەگەر زانیى $f(x) = x + 3$ و

$$g(x) = x^2 - 9$$

16 $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ بدۆزەو، ئەگەر زانیى $f(x) = x + 6$ و $g(x) = \frac{18}{x+4}$ بوارى $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ دیاریبکە.

نەخشەىەك بنووسە کاتیك $f(x) = x^2 - 5x - 14$ ،

$$g(x) = x - 7$$

$$(f+g)(x) \quad 17$$

$$(f-g)(x) \quad 18$$

$$(g-f)(x) \quad 19$$

$$(fg)(x) \quad 20$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \quad 21$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) \quad 22$$

هەریەكە لەمانەى خوارەوە بدۆزەو ئەگەر زانیى $f(x) = x - 2$ و

$$g(x) = \frac{8}{x+1}$$

$$g(f(-2)) \text{ و } f(g(-2)) \quad 23$$

$$g(f(1)) \text{ و } f(g(1)) \quad 24$$

$$g(f(x)) \text{ و بوارەكەى} \quad 25$$

$$f(g(x)) \text{ و بوارەكەى} \quad 26$$

27 يەككە لە كۆمپانىاكانى فېۆكەوانى بېيارى

زیادکردنى 30 000 دینارىدا، بۆنرخى ھەربلیتیک

بە لەبەرچا وگرتنى بەرزبوونەوہى نرخی

سووتەمەنیەکان لەسەر كۆمپانىاکە پۆیستە 9%

باجى فېۆكەخانە بخاتە سەر نرخی بلیتەكە،

نەخشەىەكى ئاویتە بنووسە، نرخی نوئى بۆ بلیتیک

بنوینیت، کاتیك نرخیەكەى x دینار بێت، پېش

ئەوہى نرخی سووتەمەنى و باج زیادبکریت.

28 ئەم خشتەىە زیادبوونى نرخی بلیتى چوونە

ژورەوہى باخچەى ئازەلان و پەیوہندى لەگەل

سالانى پېشوو لە دامەزراندنیەوہ دەنوینیت. لە

جیاوازییەکان و پېژەکان بکۆلەوہ بۆ دیاریکردنى

کام پەیوہندى گونجاوترە بۆ نواندنى پېدراوہکانى

خشتەكە. بژمیری پوونکردنەوہى بۆ دۆزینەوہى

پەیوہندییەكە بەکاربھێنە.

نرخی بلیتى باخچەى ئازەلان	
ژمارەى سالەکان	نرخ (بەدینار)
1	9500
2	10 250
3	11 100
4	12 000
5	12 920

29 ئەم خشتەىە بەکارھێنانى ئاو بۆ دانیشتوانى يەككە

لە شارەکان بەپېی پلەى گەرمى نیشان دەدات.

پلەى گەرمى (سەدى)	بەکارھێنانى ئاو (m^3)
12	269 899
15	297 912
18	328 952
21	363 110
24	401 122
27	442 893

أ پەیوہندییەكە بدۆزەو ئەم پېدراوانە بەنزیكەى بنوینیت

ب پەیوہندییەكە بۆ خەملاندنى بەکارھێنانى ئاو

بەکاربھێنە، کاتیك پلەى گەرمى $30^\circ C$ بێت.

ج ئەگەر بەکارھێنانى ئاو لە يەككە لە پۆژەکاندا

$189\,270\,m^3$ بێت، پلەى گەرمى لەو پۆژەدا چەندە؟

تاقىکردنەۋەى بەش

ھەر نەخشەيەك يان بەھايەك بدۆزەۋە، ئەگەر بزانىت كە
 $g(x) = 2x + 3$ و $f(x) = 4x^2 - 9$

8 $g(f(3))$ 7 $(f - g)(4)$

10 $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ 9 $(fg)(5)$

11 زېپىنگەرېك 10% باجى ھەر پارچە خشىك دەدات،
 ۋەك باجى زامىنكرىن و نرخی 150% تىچوۋنى
 گشتى دەيفرۇشىت. نەخشەيەكى ئاۋىتە بنووسە
 نرخی تىچوۋنى بنەرەتى بە c دىنار بنوئىت.

12 ئەم خشتەى خوارەۋە پىدراۋەكانى نرخی ژمارەيەك
 لە خانوۋ دوورىيەكانيان لە ناۋەرپاستى شارەۋە
 دەنوئىت.

ا نەخشەيەك بدۆزەۋە پەيوەندىيەك بىت بۆ
 لىكۋلىنەۋەى نرخی خانوۋ p بە پىى دوورى d
 لە ناۋەرپاستى شار بنوئىت.

ب ئەم نەخشەى دۆزىتەۋە بەكارىبھىنە بۆ
 خەملاندنى تىيكرپاي نرخی خانوۋيەك، كە 20 km
 لە ناۋەرپاستى شارەۋە دورە.

نرخی خانوۋەكان	
تىكرپاي نرخی (دىنار)	دوورى لە ناۋەرپاستى شار (km)
118 496 000	2
109 016 000	4
100 295 000	6
92 271 000	8
84 890 000	10
78 098 000	12

1 ژيار لە يەككەك لە سوپەر ماركىتەكاندا بە

فرۇشيار دامەزرا، مانگى 300 000 دىنار
 ۋەردەگرىت، و 3% كۆى ئەو شتانەى دەيفرۇشىت
 دەخريتە سەر مانگانەكەى، ئەۋەى ژيار
 ۋەردەگرىت بە خشتە و وئەى پوونكرىدەۋەى و
 ھاۋكىشە بنوئە، ئەگەر بزانىت فرۇشراۋەكانى
 لەنئوان 0 و 10 000 000 دىنار بىت

2 زانا لەسەر تاشە بەردىكى بەرز پراۋەستابو، بەشق
 لە بەردىكى ھەلدا بۆ خوارەۋە. ئەم خشتە
 پىدراۋەكانى بەرزى بەردەكە پاش چەند چركەيەك
 لە ھەلدانى دەنوئىت.

ا وئەى پوونكرىدەۋەى و ھاۋكىشەكەى

دروستىكە، بەرزى بەردەكە بەپىى كات ۋەك
 گۇراۋىكى ئازاد بنوئىت.

ب بەرزى گاشەبەردەكە چەندە؟

ج بەرزى بەردەكە پاش 10 چركە چەندە؟

د پاش چەند چركە بەردەكە بەرزەۋى دەكەۋىت؟

كات (s)	بەرزى (m)
1	615.1
2	600.4
3	575.9
4	541.6
5	497.5
6	443.6

ۋئەى پوونكرىدەۋەى نەخشەكە بكيشە.

3 $f(x) = \begin{cases} -x-3 & x < 1 \\ 2x-6 & x \geq 1 \end{cases}$

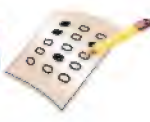
4 $f(x) = \begin{cases} 5 & x < -2 \\ -x^2-4x & x \geq -2 \end{cases}$

بە زانىنى $f(x)$ ۋئەى پوونكرىدەۋەى $g(x)$ بكيشە.

5 $g(x) = -\frac{1}{2}f(x) - 1$ و $f(x) = 2x - 4$

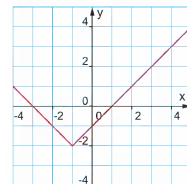
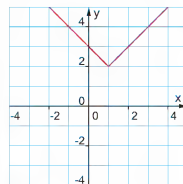
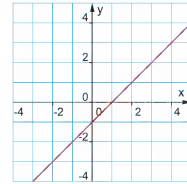
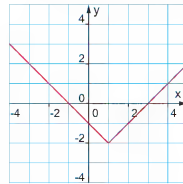
6 $g(x) = -f(x+2)$ و $f(x) = x^2 - 2$

تاقىردنەۋەى كەلەكەبوو



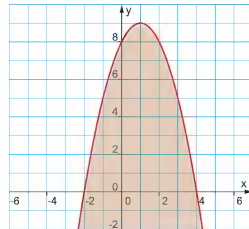
هەلبىزاردن لە زۆر

1 كام پوونكردنەۋەى نەخشە $f(x) = |x+1| - 2$ دەنۆيىت



2 كام ويىنە پوونكردنەۋەىيە بۇ كام نەخشە يان

لاسهنگە لەمانەى خوارەۋەى باشتىن نواندە



(ا) $y = x^2 + 2x + 8$

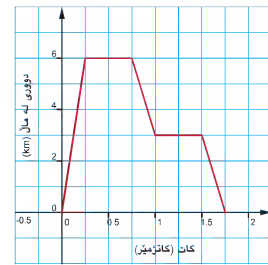
(ب) $y = -x^2 + 2x + 8$

(ج) $y \leq x^2 + 2x + 8$

(د) $y \leq -x^2 + 2x + 8$

3 ئەم ويىنە پوونكردنەۋەىيە بۇ كام لەمانەى خوارەۋەى

باشتىن نواندە.



(ا) شىركۆ بەسۋارى پاسكىل تا گەيشتە كىتېخانە

6 km ى بېرى، كاتژمىرىكى لە كىتېخانە

بەسەر برد، پاشان بۇ مال گەپراپەۋە.

(ب) شىركۆ بەسۋارى پاسكىل تا گەيشتە كىتېخانە

6 km بېرى، نيو كاتژمىر لە كىتېخانە مايەۋە،

پاش ئەۋە بۇ دوكانى فروشتىنى كاسىتى فېدېو

چوو و نيو كاتژمىرى پېچوو، پاش ئەۋە بۇ

مال گەپراپەۋە.

(ج) شىركۆ بەسۋارى پاسكىل تا گەيشتە كىتېخانە

3 km ى بېرى، لەۋى نيو كاتژمىرى خاياند، پاش

ئەۋە 3 km بېرى بۇ چوونى بۇ دوكانى فروشتىنى

كاسىتى فېدېو، دۋاى ئەۋە گەپراپەۋە مال.

(د) شىركۆ بەسۋارى پاسكىل تا گەيشتە كىتېخانە

6 km ى بېرى، لەۋى نيو كاتژمىرى خاياند، پاش

ئەۋە 3 km ى بېرى بۇ چوونى بۇ دوكانى

فروشتىنى كاسىتى فېدېو لەۋى كاتژمىرىكى

خاياند.

4 بەھى $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 8 & x < -1 \\ x^3 - x^2 + 5 & x \geq -1 \end{cases}$ چەندە؟

كاتىك $x = -1$

(ا) -13 (ب) -11 (ج) 3 (د) 5

5 كام لەمانە كۆمەلە شىكارى $\sqrt{2x-4} = x-6$ ؟

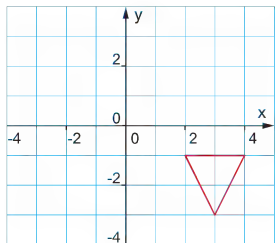
(ا) $\{10\}$ (ب) $\{4, 10\}$ (ج) $\{2, 20\}$ (د) $\{2, 12\}$

6 كام لەمانە برىتېيە لە نەخشەى $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ كاتىك

$f(x) = 2x^2 - 7x - 30$ و $g(x) = x - 6$ ؟

(ا) $2x - 5$ (ب) $2x + 5$ (ج) $\frac{(2x-5)(x+6)}{x-6}$ (د) $\frac{(2x-10)(9x+3)}{x-6}$

(ا) $2x - 5$ (ب) $2x + 5$ (ج) $\frac{(2x-5)(x+6)}{x-6}$ (د) $\frac{(2x-10)(9x+3)}{x-6}$



7 كام جىگۆركى لەمانە ويىنە

بۇ سىگۆشەيەك يەككە لە

سەرەكانى $(-2, 1)$ بىت؟

(ا) ويىنە دانەۋە بەدەۋرى

تەۋەرى يەكەم

(ب) ويىنە دانەۋە بەدەۋرى

تەۋەرى دوۋەم

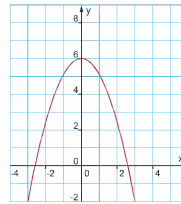
(ج) راکىشانى 3 يەكە بۇلاى چەپ، 3 يەكە

بۇ سەرەۋە.

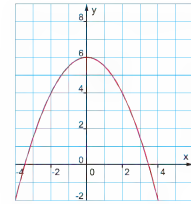
(د) خولانەۋە بەدەۋرى خالىى بنەرت بە گۆشەى 180°

8 کام له مانه هیلکاری پوونکردنه و هی نه خشی

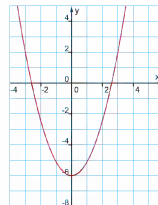
$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6$$



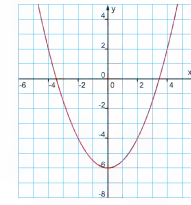
ج



ا



د



ب

کورتیه وه لām

9 به های بری $\log_4 256^3$ چنده؟

10 به های c له $4(5i-2)+3=2(10i+c)-7$ چنده؟

11 به های بدوزوه کاتیک $x=5$

$$\left(\frac{x^2+5x-36}{2x^2-10x+8}\right)\left(\frac{x^2+x-2}{x^2+11x+18}\right)$$

کورتیه وه لām

$$f(x) = x^2 + 1$$

ا پیچه وانه ی نه خشی که بدوزوه.

ب وینه ی پوونکردنه و هی $f(x) = x^2 + 1$ و

ج پیچه وانه کی بکیشه.

پوونیکه وه ئایا پیچه وانه ی نه خشی که، نه خشیه یان نا.

13 ئم خالانه به کار بهینه $(5, 11)$ ، $(2, 2)$ ، $(0, 6)$.

ا نه خشیه کی دوو جا بنوسه که

پوونکردنه و کی به و سی خاله دا پروات.

ب به شیوه ی جبری ساغیکه وه که پوونکردنه و هی

نه خشی نووسیوته به هریه که له و خالانه دا پروات.

ج وینه ی پوونکردنه و هی نه خشی که بکیشه.

د $f(-7)$ و $f(7)$ بدوزوه.

$$f(x) = x^2 - 4$$

ا دوو جیگورکی بدوزوه، نه خشی که دهگورن به شیوه یه ک سهری نه خشیه ی $(1, 4)$ دابییت.

ب دوو جیگورکی بدوزوه نه خشی که دهگورن به شیوه یه ک وینه ی پوونکردنه و هی نه خشیه ی پیدابوو به $(0, 2)$ و $(-4, 2)$ دا پروات.

دریژه وه لām

15 ئاوات تانکی ئوتومبیله کی به سوتهمه نی پرکرد بو

گه شتیک رویش. ئم خشته پیدراوه کانی بری

سوتهمه نی ماوه له تانکی ئوتومبیله کی به پیی ئو ماوه ی ئوتومبیله کی دهیپریت دردمخات.

200	150	100	50	0	دووری (به میل)
2	4	6	8	10	بری سوتهمه نی (به گالون)

ا نهگوری جیاوازیه کان یان ریژه کان

به کار بهینه بو دوزینه و هی نه خشی به پرتی، بری سوتهمه نی ماوه له تانکی ئوتومبیله کی دا.

ب نمونه یه کی بیرکای بنوسه که پیدراوه کانی خشته که بنوییت.

ج دوا ی برینی 75 میل چند گالون سوتهمه نی پی ماوه؟

د ئایا ئوتومبیله کی ده توانیت 300 میل پروات به بی وهرگر تنی سوتهمه نی نوی؟

ه پیچه وانه ی نه خشی که بدوزوه. پونیکه وه چی دهنوییت.

یه‌کبه‌دوای یه‌که‌کان Sequences and Series و زنجیره‌کان

به‌شی شه‌شه‌م

وانه‌کان

- 1-6 یه‌کبه‌دوای یه‌که‌کان
- 2-6 زنجیره‌کان
- 3-6 یه‌کبه‌دوای یه‌که‌کان و
زنجیره ژمیریه‌کان

تاقیکردنه‌وه‌ی نیوه‌ی به‌ش

- 4-6 یه‌کبه‌دوای یه‌که‌کان و
زنجیره ئەندازه‌یه‌کان
- لاپه‌رە‌ی ته‌کنۆلۆژیا دهرخستنی
زنجیره ئەندازه‌یه‌کانی دوانه‌هاتوو
- 5-6 دهره‌نجامی بیرکاری

لاکیشه‌ی زیرین

یه‌کبه‌دوای یه‌کی فیبوناتشی
په‌یوه‌ندی به ئەندازه و هونه‌ر و
ته‌لارسازییه‌وه هه‌یه ئەو په‌یوه‌ندیانه
به به‌کاره‌ینانی لاکیشه زیرینه‌کان
دۆزرایه‌وه.

ئايا تۆ ئامادەيت؟

زاراۋەكان ✓

زاراۋەكە بەۋ پېئاسەيەي لەلای چەپەۋە ھاتوۋە بېستەۋە.

- | | | | |
|---|--------------|---|--|
| 1 | نەخشەي تواني | ا | پەيوەندى نۆۋان دوو گۆراۋە بە جۆرىك ھەر بەھايەك لە گۆراۋى يەكەم بەرامبەر تاكە بەھايەكى گۆراۋى دوۋەمە. |
| 2 | نەخشە | ب | نەخشەيەكە روونكر دنەۋەكەي راستەھيئە. |
| 3 | نەخشەي ھيلى | ج | نەخشەيەكە ريسايەكەي ريژەي دوو پادەيە. |
| 4 | نەخشەي دوۋجا | د | نەخشەيەكە ھاۋكىشەكەي برىتييە $f(x) = ax^2 + bx + c$ كاتىك $a \neq 0$ |
| | | ه | نەخشەيەكە ھاۋكىشەكەي برىتييە $f(x) = ab^x$ لە $a \neq 0$ و $b > 0$ و $b \neq 1$ |

نووسىنى برە پەگەككەكان بەسادەترىن شيۋە. ✓

برەكە بەسادەترىن شيۋە بنووسە.

- | | | | | | | | |
|---|------------------------------|---|--------------------------|---|-----------------------|---|-------------------------------|
| 5 | $\sqrt{25} \times \sqrt{36}$ | 6 | $\sqrt{121} - \sqrt{81}$ | 7 | $\sqrt{\frac{1}{49}}$ | 8 | $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{64}}$ |
|---|------------------------------|---|--------------------------|---|-----------------------|---|-------------------------------|

ھەژماركردى ھيژەكان ✓

بەھاي ھەر برىك ھەژمارىكە.

- | | | | | | | | |
|---|----------|----|----------|----|----------------|----|----------------------------------|
| 9 | $(-3)^3$ | 10 | $(-5)^4$ | 11 | $1 - (-2^3)^3$ | 12 | $\frac{2^2 \times 2^7}{(2^2)^5}$ |
|---|----------|----|----------|----|----------------|----|----------------------------------|

شىكاركردى ھاۋكىشە بەپيى گۆراۋىك ✓

x بەپيى گۆراۋەكانى تر ھەژمارىكە.

- | | | | | | | | |
|----|---------------|----|------------------------|----|----------------|----|-------------------|
| 13 | $y = 12x - 5$ | 14 | $y = -\frac{x}{3} + 1$ | 15 | $y = -9 + x^2$ | 16 | $y = -4(x^2 - 9)$ |
|----|---------------|----|------------------------|----|----------------|----|-------------------|

ھەژماركردى بەھاي برەكان ✓

بەھاي برەكە ھەژمارىكە كاتىك $x = 2$ و $y = 12$ و $z = 24$

- | | | | | | | | |
|----|---------------------|----|--------------|----|-------------------------------|----|---------------------------------|
| 17 | $\frac{y(y+1)}{3x}$ | 18 | $z + (y-1)x$ | 19 | $y\left(\frac{x+z}{2}\right)$ | 20 | $z\left(\frac{1-y}{1-x}\right)$ |
|----|---------------------|----|--------------|----|-------------------------------|----|---------------------------------|

دژە نمونەكان ✓

دژە نمونەيەك بدۆزەۋە كە ناراستى دەستەۋازكە پيشان بدات.

- | | | | |
|----|---|----|--|
| 21 | $n^2 = n$ كاتىك n ژمارەيەكى راستيە. | 22 | $n^3 \geq n^2 \geq n$ ژمارەيەكى راستيە. |
| 23 | $\frac{1}{n} > \frac{1}{n^2}$ كاتىك n ژمارەيەكى راستيە. | 24 | $\frac{2}{n} \neq \frac{n}{2}$ كاتىك n ژمارەيەكى راستيە. |

رېبەرى خويندن: تيرپوانين لەسەر بەشەكە

Vocabulary

زاراوهكان

Sequence (Progressions)	يەكبه‌دواى يەكەكان
Convergent sequence	يەكبه‌دواى يەكى لىكنزىكبوو
Divergent sequence	يەكبه‌دواى يەكى لىك دوركه‌وتوو
Explicit definition	پېناسەى راگەينراو
Finite sequence	يەكبه‌دواى يەكى دوا هاتوو
Infinite sequence	يەكبه‌دواى يەكى دوا نەهاتوو
Iteration	دوبارەبوونەوه
Limit	ئامانج
Recursive definition	پېناسەى ناديار
Series	زنجيرە
Term of a sequence	پادەى زنجيرەكە

پۆشنایيەك لەسەر زاراوهكان

بۆئەوه‌ى لەگەڵ زاراوه‌كانى ئەم بەشەدا پابىي. ئەم هەنگاوانەى خوارەوه پەيرەو بکە:

1. لە ژيانى پۆژانەدا وشەى يەكبه‌دواى يەك چى دەگەيەنئيت؟ دەگەيەنئيت؟ يەكبه‌دواى يەكى ژمارەيى چى دەگەيەنئيت؟
2. وشەى دوا هاتوو ماناى كۆتايى بوون دەگەيەنئيت. چەند نموونەيەك به‌ئێنەوه وشەى دوا هاتوو تيدا بەكارهاتبئيت. يەكبه‌دواى يەكى دوا هاتوو چ مانايەك دەبەخشئيت پونىبکەوه.
3. پالپشت بەماناى وشەى كۆتايى چەند نموونەيەك بێنەوه لە پستەدا كە وشەى دوانەهاتوو تيدا بەكارهاتبئيت. ئەوەندەى لەتوانادايە يەكبه‌دواى يەكى دوا نەهاتوو پونىبکاتەوه.
4. وشەى زنجيرە لە تەلەفزيۇندا چى دەگەيەنئيت؟ هەروەها وشەى زنجيرە لە بيركاريدا چى دەگەيەنئيت؟
5. پادە لە پادەدارەكاندا چى دەگەيەنئيت پاشان باسى پادەى يەكبه‌دواى يەك بکە.

لە پابردوودا

خويندووتە

- كۆمەلەكانى ژمارەكان لەوانە ژمارە سروشتيەكان و ژمارە دووجاكان.
- بەكارهيتانى شۆوازەكانى جياوازی و پێژە بۆ پۆلنكردن پېداراوهكان.
- كيشانى وێنەى پوونكردنەوه‌يى نەخشە هێليەكان و نەخشە توانيەكان و هەژماركردن بەهايه‌كانيان.

لەم بەشەدا

لەمەودا فيردەبیت

- چەند شۆوازێك لە ژمارەكان كە پېيان دەوترئيت يەكبه‌دواى يەكەكان و سەرجه‌مەكانيان و پېيان دەگوترئيت زنجيرەكان.
- جياكردنەوه‌ى يەكبه‌دواى يەك كە ژمارەيە يان ئەندازەيە.
- چۆنيەتى نووسين و هەژماركردن بەهايه‌كانى يەكبه‌دواى يەكەكان و زنجيرەكان.

لە داهااتوودا

دەتوانيت كارامەيەيەكانى ئەم بەشە بەكاربئيت

- لە قۇناغى بەرزتردا و لەكاتى خويندن جياكارى و تەواوكارييدا.
- لە وانەكانى فيزيا. بۆ دۆزينەوه‌ى پيساى وەك بەرزبوونەوه يەكبه‌دواى يەكەكانى تۆپێك كە بەر زهوى دىكەوئيت.
- لەژيانى پۆژانەدا بۆ هەژماركردن بەكارخستنى گەشەى دارايى.



بىر كارى بە خويندە و نووسىن



ستراتىژى خويندە: بەلگەيەكى باۋەپىكراۋ بەكاربەينە

بۇئەۋەى بتوانىت بەلگەيەكى باۋەپىكراۋ بنووسى پەيۋەندى بە چەمكەك لە چەمكەكانى بىركارىيەۋە ھەبىت، واتە تۇ باش لەۋە تىگەبىشتوۋىت كە باسى دەكەيت. دەتوانىت بۇ نووسىن ئەم بەلگەيە پىگايەك لە چوار ھەنگاۋ پىكھاتبىت بەكاربەينىت بۇ نووسىنى ئەم بەلگەيە. ھەروەك لە شىكاركردىنى نمونەكەى خوارەۋەدا پرونكرۋەتەۋە.

لە كىتبى پۇلى دەيەمەۋە

بنووسە جىاۋازى نىۋان ئەگەرى تىۋرى و ئەگەرى پراكتىكى پرونكەۋە، نمونەيەك بىنەۋە كە تىيدا جىاۋازىن.

ھەنگاۋى 1 ئامانجەكە دىارىيەكە

ئامانج پرونكردىنەۋەى جىاۋازىيە لەنىۋان ئەگەرى تىۋرى و ئەگەرى پراكتىكىدا.

ھەنگاۋى 2 پستەيەك بنووسە پاسادانى ئامانجەكە بكات

ئەگەرى تىۋرى پىشت بەبىركارى دەبەستىت بەلام پراكتىكى پىشت بە ئەنجامى تاقىكردىنەۋە دەبەستىت

ھەنگاۋى 3 نمونە بېينەۋە پالپىشتى ۋەلامەكەت بكات

كاتىك پارچە پارەيەكى كانزايى ھەلدەدەيت ئەگەرى دەستكەۋتنى خەت دەكاتە $\frac{1}{2}$ واتە $\frac{1}{2}$ ژمارەى ئەۋ جارائەى پاسادانى پروداۋەكە دەكەن ژمارەى ھەمو ئەنجامەكان

بەلام ئەگەرى پراكتىكى بۇ دەستكەۋتنى خەت دەكاتە $\frac{1}{2}$ ژمارەى ئەۋ جارائەى خەتى تىدا دەرکەۋتوۋە ژمارەى ئەۋ جارائەى پارچە پارەكەى تىدا ھەلدراۋە

ئەگەر تەنھا يەكجار پارەيەكمان ھەلدا ئەۋا شىر يان خەتمان دەستدەكەۋىت. ئەگەرى پراكتىكى بۇ دەستكەۋتنى خەت دەكاتە 1 (كاتىك خەتمان دەستدەكەۋىت) يان 0 (كاتىك شىرمان دەستدەكەۋىت)، بەلام ئەگەرى تىۋرى بۇ دەستكەۋتنى خەت ھەر $\frac{1}{2}$ دەمىننەتەۋە.

ھەنگاۋى 4 بەلگەكەت پوختەبەكە

لەبەرئەۋەى ئەگەرى تىۋرى تەنھا پىشت بە ژمارەى ئەنجامە تىۋرىيەكان دەبەستىت. بۇيە ھەرگىز ناگۇرپىت. بەلام ئەگەرى پراكتىكى پىشت بە ئەنجامە تاقىكردىنەۋەيەكان دەبەستىت. ئەۋەش واى لىدەكات لەھەر ھەلدانىكدا بگۇرپىت.

ھەۋلەدە

بۇ ۋەلامدانەۋەى ئەم دوو پىرسىارە چوار ھەنگاۋەكان بەكاربەينە.

- بەرە زارىك 20 جار ھەلدرا و ژمارە 3 دووجار دەرکەۋت. دەبىت بەلایەنى كەمەۋە چەندجار زارەكە ھەلبىرپىت بۇئەۋەى ئەگەرى تىۋرى و پراكتىكى يەكسانىن لە پروداۋى دەستكەۋتنى ژمارە 3 دا؟ پرونىيەكەۋە چۆن گەيشتتە ئەۋ ۋەلامە.
- باۋكى ھۇشيار دەيەۋىت كورەكەى بۇ خويندنگايەكى نوۋى ببات، 9 خويندنگاى دىارىكر تا سەردانىان بكات پىارىدا لە ھەفتەى داھاتوۋدا سەردانى 3 يان 4 خويندنگا بكات. ژمارەى پىگاكانى سەردانى 4 خويندنگاكە. چەندى زىاترە لە ژمارەى پىگاكانى سەردانى 3 خويندنگاكە. ۋەلامەكەت پرونكەۋە.

يەكەدوايەكەكان و زنجيرەكان

Sequences and Series



كى ئەمە بەكار دەھيئەت؟

يەكەدوايەكەكان بۇ دانانى ئەرەمۇنەنى
ئامانجان خويۇندى زۆرەي پوداوه
سروشتيەكانە بەكار دىت. وەك گۆرەن لە ژمارەي
كۆمەلەك كەرويشك بە تېپەپوونى كات.

زاناي بىركارى ئىتالى ليوناردو فيبوناتشى سالى 1201 ز، ئەرە زاونى خىرايەي لە ژمارەيەك
كەرويشكدا كە لە بارىكى نمونەييدا دەژيان باسكرد. فيبوناتشى ژمارەي جووتە كەرويشكەكانى
مانگ بە مانگ تۆماركرد. بۆي دەرەكوت ئەرە ژمارانە پەپەرەي شىواژىك دەكەن لەدواييدا بە
يەكەدوايەكەكى فيبوناتشى ناونا.

يەكەدوايەكە **Sequence** كۆمەلە ژمارەيەكى رىزكراوه، ھەر يەكە لەو ژمارانە پادەيەكە **Term** لە
پادەكانى يەكەدوايەكە يەكەكە. دەگونجىت يەكەدوايەكە كەكە دوا نەھاتوو **Infinite** بىت، واتە لە
ژمارەيەكى دوا نەھاتوو پادە پىكەيت، ھەرەكە يەكەدوايەكەكى ژمارە سروشتيەكان. يان
يەكەدوايەكەكى دوا ھاتوو **Finite sequence** بىت، واتە لە ژمارەيەكى كۆتايى ھاتوو پادە پىكەيت
وەك 1، 2، 3، 4. ئەمەش ئەرە دەرەخات كە يەكەدوايەكە يەك نەخشەيەكە بوارەكەكى ژمارە سروشتيە
يەك لەدوايەكەكانە. و مەوداكەى برىتيە لە كۆمەلەي ئەرە ژمارانەي پادەكان پىكەدەھيئەت.
بىركارى زانەكان a_n لەجايى نووسىنى شىو نەخشەيى $a(n)$ بەكار دىنن ژمارەي سروشتي n پىي
دەوترىت خانەي پادەكە، پادەي يەكەم برىتيە لە a_1 پادەي دوووم برىتيە لە a_2 بەلام ئەرە پادەيەي
خانەكەي n بىت برىتيە لە a_n (پادەي n **nth term**). لەبەرئەوئەي يەكەدوايەكە يەك نەخشەيەكە بۆيە
ھەر خانەيەكە n بەرامبەر تەنھا پادەيەكە برىتيە لە a_n .

بوار	5	4	3	2	1	n	خانەي پادەكە
مەودا	5	3	2	1	1	a_n	پادەكە

لە يەكەدوايەكەكى فيبوناتشىدا، ھەر يەكە لە پادەي يەكەم و دوووم يەكسانە بە 1 بەلام ھەر پادەيەك
لە پادەكانى تر يەكسانە بەكۆي ئەرە دوو پادەيەي كە راستەوخو پىش ئەرە ھاتوون بە واتايەكى تر
 $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ كاتىك $n \geq 3$. بەم جۆرە پىناسىيە دەوترىت پىناسىيە ناديار
Recursive definition لە پىناسىيە نادياردا پادەيەك يان چەند پادەيەكى پىشوو بۆ دروستكردنى
پادەيەكى دواي ئەرە بەكار دىت.

نمونە 1 دۆزىنەوئەي پادەكانى يەكەدوايەكە بەبەكارھيئەنى نەخشەي ناديار. (شاراوه)

n	$2a_{n-1} + 1$	a_n
1	دراو	5
2	$2(5) + 1$	11
3	$2(11) + 1$	23
4	$2(23) + 1$	47
5	$2(47) + 1$	95

پىنج پادەي يەكەمى ئەرە يەكەدوايەكە بەدۆزەو كە
بەپىناسىيە ناديار ناسىنراوه $a_1 = 5, a_n = 2a_{n-1} + 1$
پادەي يەكەم دراوه

بۆ دۆزىنەوئەي a_2 بەھاي a_1 دابنىو، بەھەمان شىو بەردەوام بە
لەدانانى بەھاي ھەر پادەيەك بۆ دۆزىنەوئەي پادەي دواي خۆي.

واتە پىنج پادەي يەكەمى يەكەدوايەكە يەكەكە برىتين لە 5, 11, 23, 47, 95

1. پىنج پادەي يەكەمى ئەرە يەكەدوايەكە يەكەكە بدۆزەو.

$$a_n = -3a_{n-1}, a_1 = 2 \quad \text{ب}$$

$$a_n = a_{n-1} - 8, a_1 = -5 \quad \text{ا}$$



بەشى 6 يەكەدوايەكە يەكەكان و زنجيرەكان

دەتوانىت پېئاسەى ھەندىك يەكەدوای يەك بە پېئاسەىيەكى ديار **Explicit definition** پېئاسە بکەيت. بە جۆرىك کە دەتوانىت بەھای ھەر پادەيەك بە زانىنى خانەكەى بدۆزىتەوہ.

نمونە 2 دۆزىنەوہى پادەکانى يەكەدوای يەك بەبەکارھىنانى نەخشەى ديار (ئاشکەرا)

n	$2^n - 3$	a_n
1	$2^1 - 3$	-1
2	$2^2 - 3$	1
3	$2^3 - 3$	5
4	$2^4 - 3$	13
5	$2^5 - 3$	29

پېنج پادەى يەكەمى ئەو يەكەدوای يەكە بدۆزەوہ كە لە

$$a_n = 2^n - 3$$

خستەيەك دروستبکە و بەھای a_n ھەژماربکە بەجۆرىك n بەھاکانى 1 تا

5 وەرگریت. پېنج پادەى يەكەم بریتىن لە -1, 1, 5, 13, 29

پاسادان بکە بژمىرى پونکردنەوہى بەکاربېنە، نەخشەى $y = 2^x - 3$

تۆماربکە پاشان خستەى بەھایەکانى بۆ دروستبکە



2. پېنج پادەى يەكەمى ئەم يەكەدوای يەکانە بدۆزەوہ.

$$a_n = 3n - 5$$

$$a_n = n^2 - 2n - 1$$



دەتوانىت زانىارىيەکانت بەکاربېنيت بۆ نووسىنى پېئاسەى يەكەدوایيەك.

نووسىنى پېئاسەى يەكەدوای يەك

پېئاسەى پادەى n بۆ ھەر يەكەدوای يەكەك بنوسە.

3, 6, 12, 24, 48

جياوازی نيوان ھەر پادەيەك و پادەكەى پېش خوۆ و پېژەى ھەر پادەيەك و پادەكەى پېش خوۆ بېشکە.

پېژەکان	2	2	2	2	
پادەکان	3	6	12	24	48
جياوازی يەكەم	3	6	12	24	
جياوازی دووہم	3	6	12		

پېژەکان نەگۆپن، واتە $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2$ يان $a_n = 2a_{n-1}$ يەكەدوای يەكەكە يەكەدوای يەكەكى

توانیە. بنچينەكەى دەکاتە 2. تەماشای شىوازی ھىژەکانى ژمارە 2 بکە.

$$a_1 = 3 = 3 \times 2^0, a_2 = 6 = 3 \times 2^1, a_3 = 12 = 3 \times 2^2 \dots$$

شىوازی (2^{n-1}) پېئاسەىيەكى گونجاوہ بۆ يەكەدوای يەكەكە. كەواتە $a_n = 3 \times 2^{n-1}$

2.5, 4, 5.5, 7, 8.5

پادەکان	2.5	4	5.5	7	8.5
جياوازی يەكەم	1.5	1.5	1.5	1.5	

لەبەرئەوہى جياوازیيەکانى يەكەم نەگۆپن، كەواتە يەكەدوای يەكەكە ھىلپيە. پادەى يەكەم بریتيە

لە 2.5 ھەر پادەيەك لە پادەکانى بەدوايدا دىت 1.5 زياد دەکات. ياساکە بریتيە لە $a_n = 1.5n + 1$

3. پېئاسەىيەكى گونجاو بۆ پادەى n بۆھريەكە لەمانە بنوسە.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$$

$$7, 5, 3, 1, -1$$

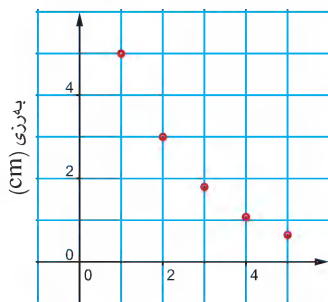


نمونه 4

جیبه جیکردن له سهر فیزیا

تویک له بهرزیه که وه بهر درایه خواره وه، پاشان تا بهرزیای 155 cm بهرزیووه. پاشان چهند جاريک تا بهرزیای 60% پيش خوې بهر زده بیته وه. به پروونکر نه وهی یه که به دواى یه که به بنویته. باسی شیوازه که ی بکه. له هه لېه زینه وهی نویه ما تویه که چهند بهر زده بیته وه؟

بهرزیوونه وه له جارى یه که م 155 cm بهرزیوونه وه له هر جاريکدا ده گاته 60% ی جارى



ژماره ی هه لېه زینه وه کان

پیشوو. ده توانین پیناسه ی یه که به دواى یه که به م شیویه بکه ی $a_1 = 155$ ، $a_n = 0.6 \times a_{n-1}$ ، $a_2 = 0.6 \times 155 = 93$ ، $a_3 = 0.6 \times 93 = 55.8$ ، $a_4 = 0.6 \times 55.8 = 33.48$ ، پاشان به پروونکر نه وهی بیاننوینه.

$$\begin{aligned} a_2 &= 0.6 \times 155 = 93 \\ a_3 &= 0.6 \times 93 = 55.8 \\ a_4 &= 0.6 \times 55.8 = 33.48 \end{aligned}$$

وا در ده که ویت نواندنه پروونکر نه وهی یه که به توانی بیت. شیوازیک بۆ نویسینی پیناسه یه کی گونجاو بۆ یه که به دواى یه که به به کار بیته. $a_n = 155 \times 0.6^{n-1}$ کاتیک n ژماره ی جاره کان بهرزیوونه وهی تویه که بیت. $a_9 = 155 \times 0.6^{9-1} \approx 2.603$ تویه که له جارى نویه ما 2.6 cm بهرزیکی بهر زده بیته وه.

4. درماله گولیک له هر جاريکدا پیویستی به 1.6 گالون ناو هیه. سهرجه می ئه و گالونه ناوانه ی بۆ ناودانی درماله گوله که له هر ناودانیک به کارهاتووه به پروونکر نه وهی بنویته. باسی ئه و شیوازه بکه که ده ستکه وتووه، سهرجه می ئه و گالونه ناوانه ی له پاش 10 جار ناودان به کارته پناوه چهنده؟



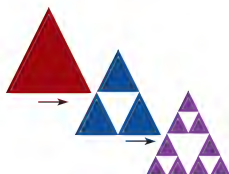
فراکتال Fractals وینه یه که به دو باره بوونه وهی شیوه لیکچووه کانى هاوشیوهی شیوه بهر پرتیه که ده ستده که ویت

سیگوشه ی سیرینسکی Sierpinski

نمونه 5

سیگوشه یه که بریتیه له فراکتالیک له سیگوشه یه کی لایه کسان ده ست ده که ویت، به برینی سیگوشه یه کی لایه کسان له ناوه راستی سیگوشه یه یه که م. پاشان ئه مه له سهر هر سیگوشه یه که دو باره بکه وه. که ده ست ده که ویت. ژماره ی سیگوشه کان له پینجه م جارد چهنده؟

له هر دو باره بوونه وهی که ژماره ی سیگوشه کان 3 ئه وندنه زیاده کات هیماى N_n بۆ ژماره ی سیگوشه کان له جارى یه که مده به کار بیته. جارى یه که م سیگوشه یه که هیه. له جارى دووه مده 3 سیگوشه ده ست ده که ویت، و هه روه ها ...



$$N_1 = 1, N_2 = 3, N_3 = 3^2 = 9, N_4 = 3^3 = 27, N_5 = 3^4 = 81$$

که واته $N_4 = 3^3 = 27$ ، $N_5 = 3^4 = 81$. له جارى چواره مده ژماره ی سیگوشه کان 81 سیگوشه ده بیت.

5. کومه لای کانتور Cantor بریتیه له شیوه یه کی فراکتال، به لابرینی سییه کی

ناوه راستی پارچه راسته هیله که، جیبه جیکردنی ئه م فرمانه له سهر هر پارچه راسته هیلیکی ئه نجام ده ستده که ویت. ژماره ئه و پارچه راسته هیلانه له دواى جیبه جیکردنی فرمانه که له جارى پینجه مده چهنده؟



بیریکه وه و تاوتوییکه

1. پروونیکه وه جیاوازی نیوان پیناسه یه که دوا یه که به شیوه دیار و نادیار.

2. بدۆزه وه 3 راده ئەم یه که دوا یه که تهواویکات 1, 2, 4, ...

3. باسیکه چۆن یه که دوا یه که وه که نهخشه ده بینیت؟ ئایا هه موو یه که دوا یه که کهان هه مان بواریان هه یه؟ ئەمه پروونیکه وه.

4. پیکه ره به وینه ی بهرام بهر دروست به و تهواوی به که ئەوه ی له یه که دوا یه که کهدا فیژی بویت به کورتی تییدا بنوسه.

پیناسه ی یه که دوا یه که	دوو جۆری یه که دوا یه که
نمونه کان	دوو پیناسه گونجاری پیناسه



راهینانه کان

1-6

راهینانی ئاراسته کراو

1. زاراهه کان پیناسه ی یه که دوا یه که که پیناسه یه که پینا به دروست بوونی راده ی n

ی دهاد به زانیی راده ی پیش خو ی یان راده کانی پیش خو ی (نادیار یان دیار).

پینچ راده ی یه که به بۆه ریه که له یه که دوا یه که کهانه بدۆزه وه.

$$a_n = 4a_{n-1} - 1; a_1 = 1 \quad a_n = a_{n-1} + 11; a_1 = 3 \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{5}; a_1 = 500$$

$$a_n = 12(n-2) \quad a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad a_n = -3n^2$$

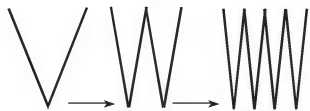
$$a_n = n(n-1) \quad a_n = 4^{n-1} \quad a_n = (n+1)^2$$

له هه ریه که له یه که دوا یه که کهانه دا پیناسه یه که گونجاو بۆ راده ی n بنوسه.

$$6, 9, 12, 15, 18, \dots \quad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \quad 25, 15, 5, -5, -15, \dots$$

14. پاشه کهوت داهاتی ئاوات له سالی یه که مه دا 25 000 000 دینار بوو، له سالی کهانی دوا ییدا

داهاته که ی به پینچه ی 5% سالی پیش خو ی زیاد ده کات. ئەم یه که دوا یه که که به پونکردنه وه یی بنوینه. باسی شیوازه که ی به که. دوا ی 5 سال داهاته که ی چه ند ده بیت؟ پاش 10 سال چه ند ده بیت؟



15. فراکتال ژماره ی پارچه راسته هیله کان له دوو شیوه ی چواره م و پینچه مه دا چه ند ده بیت؟

جیبه جیکردن

پینچ راده ی یه که به بۆه ریه که له یه که دوا یه که کهانه بدۆزه وه.

$$a_n = 1.5a_{n-1} - 2; a_1 = 4 \quad a_n = \frac{1}{n^2} \quad a_n = a_{n-1} - 3; a_1 = 7$$

$$a_n = -3a_{n-1} - 1; a_1 = -2 \quad a_n = 2n^2 - 12 \quad a_n = (2)^{n-1} + 8$$

راهینانی نازاد

بۆشیکارکردنی تهماشای	برسیاره کان
1	18-16
2	21-19
3	24-22
4	25
5	26

پېنئاسەيەكى گونجاو بۇ رادەى n ى ھەريەك لەم يەكبەدواى يەكانە بدۆزەو.

22 2, 8, 18, 32, 50, ... 23 9, 5, 1, -3, -7, ...

24 5, 0.5, 0.05, 0.005, ...

25 **نەخشەكېشان** كورسيەكانى ئەندامانى تىپى ئۆركسترا لە ھۆلى ميوزىكى كلاسكى لەسەر شىوہى نيوہ بازنەيەك پىكخرا، بەجۆرىك سەرۆكى ئۆركستراكە لە چەقەكەيدا ۋەستابوو، ژمارەى كورسيەكانى پىزى يەكەم 16 كورسيە، ژمارەى كورسيەكانى پىزەكانى تر 4 كورسى لە ژمارەى كورسيەكانى پىزى پىش خۆى زياترېوو. ئەم يەكبەدواى يەكە بە پوونكردنەوہى بنوینە، باسى شىوازەكەشى بكە، ژمارەى كورسيەكان لە پىزى شەشەم چەندە؟

26 **فراكتال** ژمارەى چوارگۆشەكان لەدوو شىوہى چوارەم و پىنچەمدا بدۆزەو.

پىنچ رادەى يەكەم لەھەر يەكبەدواى يەكېكا بدۆزەو.

27 $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 2, a_1 = 12$ 28 $a_n = \frac{2}{a_{n-1}}, a_1 = 1$

29 $a_n = -a_{n-1} + 10, a_1 = -10$ 30 $a_n = 2n^2 - 12$

31 $a_n = 8 - \frac{1}{10}n$ 32 $a_n = 5(-1)^{n+1} \times 3^{n-1}$

33 **ھەلە لە شىكردنەوہ** لە خواروہ بە دوو شىوہ پىنچ رادەى يەكەمى ئەم يەكبەدواى يەكە نووسراوہ $a_n = 2n + 1, a_1 = 3$ كاميان ھەلەيە، ھەلەكە ديارېكە.

ب	ا
3, 7, 15, 31, 65	3, 5, 7, 9, 11

پېنئاسەيەكى گونجاو بۇ رادەى n ى بۆھريەك لەم يەكبەدواى يەكانە بنووسە. پاشان رادەى دەيەمى بدۆزەو.

34 16, 4, 1, $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots$ 35 $\frac{15}{9}, \frac{14}{9}, \frac{13}{9}, \frac{12}{9}, \frac{11}{9}, \dots$

36 -5.0, -2.5, 0, 2.5, 5.0, ... 37 $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

38 0.04, 0.4, 4, 40, 400, ... 39 24, 21, 16, 9, 0, ...

40 **فېبۆناتشى** بېرت بېتەوہ يەكبەدواى يەكى فېبۆناتشى نمونەيەك بوو بۇ توپژينەوہ لە ژمارەى جووتە كەرويشكەكان پاش چەند مانگيەك. يەكبەدواى يەكەكە بە ژمارە 1 پاشان ژمارە 1 دەستپېدەكات. و ھەر رادەيەك يەكسانە بە سەرچەمى دوو رادەكەى پىش خۆى.

پالەوانىتى شەترەنج	ژمارەى يارىكەر	ژمارەى گيمەكان
	1	0
	2	1
	3	3
	4	6
	5	10

ا دوازە رادەى يەكەمى يەكبەدواى يەكەكە بدۆزەو.

ب ژمارەى جووتە كەرويشكەكان لەكۆتايى ساليكى تەواو چەندە؟

41 **شەترەنج** سەنگەر قارەمانىتيەكى شەترەنجى پىكخست بەجۆرىك ھەريارىكەريەك يەكجار لەگەل ھەموو يارىكەرەكان يارى دەكات. خشتەيەكى دروستكرد و بۆى دەرەكوت كە زياتكردى ھەر يارىكەريەكى نوئ دەبېتە ھۆى ئەوہى ژمارەى يارىيەكان لەيەك يارى زياترېت.

ا يەكبەدواى يەكەكە بە پوونكردنەوہى بنوینە و

شىوازەكەى باسبەك، رادەكانى دواتر چين؟

ب لادانى ھيلى بۇ دۆژينەوہى رپسايەك بۆئەو يەكبە دواى يەكە بەكارپېنە

ج **چى دەبېت ئەگەر...** ؟ خشتەكە چۆن دەگۆرپت ئەگەر ھەر يارىكەريەك دووجار لەگەل ھەريەكەك لەياريكەرەكانى تر يارىيكات؟ خشتەيەك دروستبەك. پوونبەوہ يەكبەدواى يەكەكە چۆن دەگۆرپت؟

دەروازەيەك

لەسەر ميژووى بېركارى



يەكبەدواى يەكى فېبۆناتشى بۇ دەرخستنى رېژەى زېرين بەكارديت. رېژەى ھەر رادەيەك بۇ رادەكەى پىش خۆى لەرېژەى زېرينى $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ نزيكەدەبېتەوہ ھەتاخانەى رادەكە زيات بكات.

ژماره‌ی خاله‌کان له‌دوو وینه‌ی خواره‌وه، له‌هه‌ر یه‌که‌دوای یه‌کیدا بدۆزه‌وه.



44 ته‌نی به‌رامبه‌رت له‌ شۆه‌یه‌کی ئه‌ندازه‌یی پیکدیت، هه‌ریه‌که‌یان له‌ 6 دنکه

شقارتیه‌ی درێژ یه‌کسان دروستکراوه. شۆه‌یه‌ک له‌ به‌شی سه‌ره‌ودا هه‌یه و 3 شۆه‌ له‌ چینی دووهم و 6 شۆه‌ له‌ چینی سێهه‌م و هه‌روه‌ها ...

ا پرسیار $a_n = a_{n-1} + 6n$ نموونه‌یه‌که‌ بۆ هه‌ژمارکردنی ژماره‌ی دنکه شقارتیه‌کان له‌ چینی n دا. پینچ راده‌ی یه‌که‌می یه‌که‌دوای یه‌که‌که‌ بدۆزه‌وه کاتی $a_1 = 6$.

ب لیژی هێلی بۆ دۆزینه‌وه‌ی پرسیار ئه‌و یه‌که‌دوای یه‌که‌ به‌کاربهێنه.

ج چه‌ند دنکه شقارتیه‌ بۆ دروستکردنی چینی دووهم پێویسته.

45 ئه‌ندازه‌ خشته‌ی خواره‌وه‌ کۆی پێوانه‌ی گۆشه‌کانی ناوه‌وه‌ی پینچ چه‌ندلا ریکه‌ی یه‌که‌م ده‌نۆینیت

کۆی پێوانه‌ی گۆشه‌کانی ناوه‌وه‌				
900°	720°	540°	360°	180°

ا پێناسه‌یه‌کی دیار بۆ ئه‌م یه‌که‌دوای یه‌که‌ بنوسه، کۆی پێوانه‌ی گۆشه‌کانی

ناوه‌وه‌ی چه‌ندلا ریکه‌یه‌ک ژماره‌ی لایه‌کانی 12 بێت بدۆزه‌وه.

ب له‌بیرت بێت گۆشه‌کانی ناوه‌وه‌ی چه‌ندلا یه‌کی ریک هه‌مان پێوانه‌یان هه‌یه. خشته‌یه‌ک دروستکه‌ پێوانه‌ی گۆشه‌ی ناوه‌وه‌ی هه‌رچه‌ندلا یه‌کی ریک دیاریبکات. پێدراوه‌کانی خشته‌که‌ به‌وینه‌ی پوونکردنه‌وه‌یی بنۆینه، باسی شۆوازه‌که‌ی بکه.

ج پێناسه‌یه‌کی دیار بۆ یه‌که‌دوای یه‌کی لقی ب بنوسه.

د پێوانه‌ی گۆشه‌یه‌کی ناوه‌وه‌ی ده‌لا یه‌کی ریک بدۆزه‌وه.

46 خه‌مالاندن به‌های راده‌ی بیسته‌م له‌م یه‌که‌دوای یه‌که‌ دیاریبکه‌ ... 7.94, 8.935, 9.93, 10.925, 11.92,

47 میوزیک وینه‌که‌ی خواره‌وه‌ کاتی نۆته‌ی میوزیکه‌ جیاوازه‌کان نیشان ده‌دات.



ا یه‌که‌دوای یه‌کێکی ژماره‌یی بنوسه به‌ره‌و پێشچوونی نۆته‌ی میوزیکه‌کان نیشانبدات.

پێناسه‌یه‌کی دیار و یه‌کێکی نادیار بۆ ئه‌و یه‌که‌دوای یه‌که‌ بنوسه.

ب نۆته‌یه‌کی ته‌واو 4 بیته‌ (Beats) و نیونۆته‌ 2 بیته‌ و چاره‌که‌ نۆته‌یه‌ک 1 بیته‌ و هه‌روه‌ها ...

یه‌که‌دوای یه‌کێک بنوسه. ژماره‌ی پێته‌کانی نۆته‌یه‌ک له‌دوای یه‌که‌کانی سه‌ره‌وه‌ بنۆینیت.

پێناسه‌یه‌کی نادیار و پێناسه‌یه‌کی دیار له‌سه‌ر ئه‌م یه‌که‌دوای یه‌که‌ بنوسه. په‌یوه‌ندی نیوان

ئه‌م یه‌که‌دوای یه‌که‌ و یه‌که‌دوای یه‌کی لقی ا چییه‌؟

48 بنووسه جیاوازی نیوان یهکبه دواى یهکی دوا هاتوو و دوا نه هاتوو پوونبکوه.

ناماده کردن بو تاقیکردنه وه

49 کام له مانه ی دیت راده ی داهاتوو ی ئهم یهکبه دواى یهکبه یه. $-9, -6, -3, 0, \dots$

- (ا) -3 (ب) 0 (ج) 3 (د) 6

50 کام له مانه ی خواروه رپسای ئهم یهکبه دواى یهکبه یه. $4, 12, 36, 108, \dots$

- (ا) $a_n = 4 + 3n$ (ب) $a_n = 3 + 4n$
(ج) $a_n = 3a_{n-1}; a_1 = 4$ (د) $a_n = 4a_{n-1}; a_1 = 3$

51 کام له یهکبه دواى یهکانه رپساکه ی بریتیه له $a_n = \frac{2n}{n+1}$

- (ا) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, \dots$ (ب) $0, 1, 2, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \dots$
(ج) $1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \dots$ (د) $2, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \frac{12}{7}, \dots$

52 کام یهکبه دواى یهک رپساکه ی بریتیه له $a_n = 12 - 2a_{n-1}; a_1 = 6$ کاتیک $n \geq 2$

- (ا) $6, 4, 2, 0, -2, -4, \dots$ (ب) $6, 0, 12, -12, 36, \dots$
(ج) $0, 12, -12, 36, -60, \dots$ (د) $6, 0, -6, -12, -18, \dots$

53 **کورت و هلام** راده ی داهاتوو له یهکبه دواى یهک بدۆزه وه. $-32, 16, -8, 4, -2, \dots$

به رهنگاری و فراوان کردن

پیتاسه ی دیار بوئهم یهکبه دواى یهکانه بنووسه. پاشان راده ی دهیم بدۆزه وه.

54 $-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 8, \frac{61}{3}, \frac{122}{3}, \dots$

56 $0.9, 0.8, 0.6, 0.3, -0.1, \dots$

57 **ئه ندازه** 5 بازنه بکیشه، خالیک له سهر بازنه ی یهکهم دابنی و 2 خال له سهر بازنه ی دوهم و 3

خال له سهر بازنه ی سییه دابنی و ههروه ها ... پاشان هه موو دوو خالیک له خاله کانی بازنه کان بگه یه نه، زۆرتین ناوچه ی یهکتر نه بریوه کانی هه ر بازنه یهک له خو دهگرت بژمیره.

(ا) ئهو یهکبه دواى یهک بنووسه. که دهستکه وتوه.

(ب) وا ده رده که ویت هه ر راده یهک یهکسانه به دوئه وهنده ی راده که ی پش خو ی به لام وا ده رده که ویت راده ی

شه شم له 32 که متره. هه ولبد ه ئهم ناوچانه له بازنه ی شه شه مدا به وردی دیاری بکه یهت به دروستکردنی وینه یهکی ریکوپیک.

پیداچوونه وه ی لولپیی

بره که به ساده ترین شیوه بنووسه. وا دابنی پیتاسه کراوه (پوله کانی پیشوو)

58 $\frac{x^2-9}{x^2+5x+6}$ **59** $\frac{4x^2-5x}{8x^2+18x-35}$

60 $\frac{4x-12}{x^2-25} \div \frac{8x-24}{2x-10}$ **61** $\frac{x^2-5x-6}{x^2-3x-18} \times \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$

کۆبکه وه یان لیده ریکه (پوله کانی پیشوو)

62 $\frac{2x-3}{x+1} + \frac{4x-9}{x-1}$ **63** $\frac{9x}{8x-4} - \frac{10x+3}{12x-6}$ **64** $\frac{x^2}{2x+7} - \frac{x}{x+2}$

65 **ویژه** کرمانج کتیبیک که 854 لاپه ریه به تیکرای لاپه ره و نیویک له خوله کیکدا ده خوینتیه وه

خشته یهک دروستبکه و نه خشته یهک بنووسه ژماره ی ئهو لاپه رانه بنوینت که ماونه ته وه p به پیی کات t . وینه ی روونکردنه وه یی نه خشته که بکیشه.

به شی 6 یهکبه دواى یهکانه کان و زنجیره کان



زنجیره‌کان Series

2-6

بۆچی ئەمە فیژدەبین؟

دەتوانیت سەرجه‌مه‌کانی یه‌که‌دوای یه‌که‌کان به‌کاربێنیت بۆ دۆزینه‌وه‌ی پێوانه‌کانی خانویه‌ک له‌ کارت دروستکراوێت (نموونه 4)

ئامانجه‌کان

- هه‌ژمارکردنی سەرجه‌می یه‌که‌دوای یه‌ک و نووسینی به‌کارهێنانی هه‌یما سەرجه‌م

زاراوه‌کان

Vocabulary

زنجیره (متسلسله)

Series

سەرجه‌می به‌ش

Partial sum

هه‌یما کۆکردنه‌وه

Summation symbol

له‌وانه‌ی پێشوو دا فیژری دۆزینه‌وه‌ی را ده‌ی n ی یه‌که‌دوای یه‌ک بویت. هه‌ندیک جار ده‌توانیت سەرجه‌می چه‌ند را ده‌یه‌ک له‌ یه‌که‌دوای یه‌که‌کان هه‌ژماربکه‌یت بۆ ده‌رپرینی ئەو سەرجه‌مه زنجیره Series به‌کار دێت. خسته‌که‌ی خوا ره‌وه نموونه له‌سه‌ر ئەمه پيشان ده‌دات.

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$	2, 4, 6, 8, ...	1, 2, 3, 4	یه‌که‌دوای یه‌ک
$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$	2+4+6+8+...	1+2+3+4	زنجیره

له‌به‌رئه‌وه‌ی زۆربه‌ی یه‌که‌دوای یه‌که‌کان

ناکوژان. به‌ زۆری سەرجه‌مه به‌شیه‌کان

به‌کار ده‌هێنرێت. سەرجه‌می به‌شی هه‌یما

S_n ی بۆ دا ده‌نرێت. بریتیه‌ له‌ سەرجه‌می n

را ده‌ی یه‌که‌می یه‌که‌دوای یه‌که‌که

سەرجه‌می را ده‌ی یه‌که‌م $S_1 = 2$

سەرجه‌می دوو را ده‌ی یه‌که‌مین $S_2 = 2 + 4 = 6$

سەرجه‌می سێ را ده‌ی یه‌که‌مین $S_3 = 2 + 4 + 6 = 12$

سەرجه‌می چوار را ده‌ی یه‌که‌مین $S_4 = 2 + 4 + 6 + 8 = 20$

ده‌توانیت هه‌یما سەرجه‌م Σ بۆ ده‌رپرینی زنجیره به‌م شێوه‌یه به‌کاربێنیت.

$$\begin{aligned} &\text{پێناسه‌ی دیاری یه‌که‌دوای یه‌ک} \quad \leftarrow \sum_{k=1}^{k=5} 2k \\ &\text{به‌های } k \text{ کۆتایی} \quad \rightarrow \\ &\text{به‌های یه‌که‌می } k \quad \rightarrow \end{aligned}$$

به‌کارهێنانی هه‌یما سەرجه‌م

به‌ به‌کارهێنانی هه‌یما سەرجه‌م ئەم زنجیرانه بنووسه.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} \quad \text{ب}$$

پێناسه‌ی دیاری بۆ یه‌که‌دوای یه‌که‌که به‌دۆزه‌وه

$$a_k = (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{2} \right)^k \quad \text{پێناسه‌ی دیاری}$$

سەرجه‌می پێنج را ده‌ی یه‌که‌م بنووسه

$$\sum_{k=1}^6 (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{2} \right)^k \quad \text{هه‌یما سەرجه‌م}$$

به‌کارهێننه

$$3 + 6 + 9 + 12 + 15 \quad \text{ا}$$

پێناسه‌ی دیاری بۆ یه‌که‌دوای یه‌که‌که

$$a_k = 3k \quad \text{پێناسه‌ی دیاری}$$

سەرجه‌می پێنج را ده‌ی یه‌که‌م

$$\sum_{k=1}^5 3k \quad \text{هه‌یما سەرجه‌م}$$

به‌کارهێننه

ئاگاداریه!

بۆ ئەو یه‌که‌دوای یه‌که‌کانی نیشانه‌ی را ده‌کانی یه‌که‌دوای یه‌ک ده‌گۆرێن $(-1)^{k+1}$ به‌کاربێنه ئەگه‌ر نیشانه‌ی a_1 (+) بێت و $(-1)^k$ به‌کاربێنه ئەگه‌ر نیشانه‌ی a_1 (-) بێت.

1. به‌ به‌کارهێنانی یاسای سەرجه‌م ئەم زنجیرانه بنووسه.

$$-2 + 4 - 6 + 8 - 10 + 12 \quad \text{ب}$$

$$\frac{2}{4} + \frac{2}{9} + \frac{2}{16} + \frac{2}{25} + \frac{2}{36} \quad \text{ا}$$



نمونه 2

هه ژمارکردنی بهای زنجیرهکان

زنجیرهکه بکوه و بههاکمی هه ژماریکه.

$$\sum_{k=3}^{k=6} \frac{1}{2^k} \quad \text{ا}$$

به دانانهوهی بههاکانی k زنجیرهکه بکوه
هه ژماریکه
سادهکه

$$\sum_{k=3}^{k=6} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$$

$$= \frac{8}{64} + \frac{4}{64} + \frac{2}{64} + \frac{1}{64} = \frac{15}{64}$$

$$\sum_{k=1}^{k=4} (10 - k^2) \quad \text{ب}$$

بکوه

$$\sum_{k=1}^{k=4} (10 - k^2) = (10 - 1^2) + (10 - 2^2) + (10 - 3^2) + (10 - 4^2) = 10$$

ئاگاداریه!

هه نديك له يه كه به دواي يه كه كان
به رادهي a_k ده ستيپيدهكات كاتيک
 $k \neq 1$ هه روهك نمونهي $2 - 1$

2. زنجیرهکه بکوه و بههاکمی هه ژماریکه.

$$\sum_{k=1}^{k=5} -5(2)^{k-1} \quad \text{ب}$$

$$\sum_{k=1}^{k=4} (2k - 1) \quad \text{ا}$$



دۆزینهوهی سه رجهمی ژمارهی رادهکانی يه كه به دواي يه كه هه موو كاتيک ئاسان نييه. به لام ده توانریت
پيسايهك بو هه ژمارکردنی سه رجهمی رادهکانی يه كه هه نديك له يه كه به دواي يه كه تاييه تاييه كاندا
به دۆزيتوه. زنجيرهی نهگۆر زنجيرهيه كه هه موو رادهکانی يه كسانن $3 + 3 + 3 + 3 + 3$

$$\sum_{k=1}^{k=5} 3 = \underbrace{3 + 3 + 3 + 3 + 3}_{\text{ژمارهی رادهکان 5}} = 5 \times 3 = 15$$

سه رجهمی رادهکانی يه كه هه نديك نهگۆر بريتييه له $C = nC$

$$\sum_{k=1}^{k=n} a = \underbrace{a + a + \dots + a}_n = a \times n$$

زنجيرهی هه يکی زنجيرهيه كه بو ژماردن. وهك سه رجهمی ژماره سروشتيهکانی يه كه هه تا
خانهيهکی دياريكراو. سه رجهمی 10 ژماره سروشتی يه كه هه (جگه له سفر) بريتييه له

$$\sum_{k=1}^{10} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

پيزکردنی ژمارهکان دووبارهکهوه.

$$= (1 + 10) + (2 + 9) + (3 + 8) + (4 + 7) + (5 + 6)$$

$$= 11 + 11 + 11 + 11 + 11 = 5 \times 11 = 55$$

سه رنج به نيوهی ژماره رادهکان 5 و $10 + 1 = 11$ بريتييه له سه رجهمی رادهی يه كه هه و
دوا راده. هه تاييه تاييه وش وادهكات پيشيني هه بهين سه رجهمی ژماره سروشتيهکان تا خانهی

$$\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{يان} \quad \sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n}{2}(n+1) \quad \text{له بريتييه له } n$$

ياساکانی سه رجهمی هه نديك له زنجيرهکان

زنجيرهی دووجا	زنجيرهی هه يکی	زنجيرهی نهگۆر
$\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{k=1}^{k=n} a = na$



نمونه 3

به کارهیتانی یاساکانی سهرجه می هندیك له زنجیرهكان

به های زنجیرهكه هه ژمارهكه.

زنجیرهیهکی نهگۆره $\sum_{k=1}^{k=6} 8$

پێگای یهكه می یاسای سهرجه بهكهوه سهرجه هه ژمارهكه.

$$\sum_{k=1}^{k=6} 8 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 48$$

6 پاده

به کارهیتانی، زنجیرهكه 6 پادهی تێدایه.

$$\sum_{k=1}^{k=6} 8 = na = 6 \times 8 = 48$$

زنجیرهیهکی هیلویه $\sum_{k=1}^{k=5} k$

پێگای یهكه می یاسای سهرجه به کارهیتانی بهكهوه سهرجه هه ژمارهكه.

$$\sum_{k=1}^{k=5} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

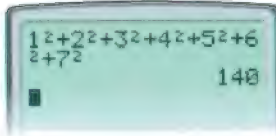
پێگای یهكه می یاسای سهرجه به کارهیتانی بهكهوه سهرجه هه ژمارهكه.

$$\sum_{k=1}^{k=5} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{5 \times 6}{2} = 15$$

زنجیرهیهکی دووجایه $\sum_{k=1}^{k=7} k^2$

پێگای یهكه می یاسای سهرجه به کارهیتانی بهكهوه سهرجه هه ژمارهكه.

بژمیری پوونکردنهوهیی به کارهیتانی



$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=7} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{7(7+1)(2 \times 7 + 1)}{6} \\ &= \frac{56(15)}{6} \\ &= 140 \end{aligned}$$

ئاگاداریه!

کاتیك پادهکانی زنجیرهیهكه ده ژمیری، پێویسته ژماردنهكه پادهی یهكه می و کۆتایی تێداییت ژمارهیی پادهکانی زنجیرهیه 8 $\sum_{k=5}^{k=10}$ دهکاته 6 نهك 5 چونکه به هاکی k بریتین له $k = 5, 6, 7, 8, 9, 10$

3. به های زنجیرهكه هه ژمارهكه.

خالی جاودیری



$$\sum_{k=1}^{k=10} k^2 \quad \boxed{\text{ج}}$$

$$\sum_{k=1}^{k=15} k \quad \boxed{\text{ب}}$$

$$\sum_{k=1}^{k=60} 4 \quad \boxed{\text{ا}}$$

جیبه جیکردن له سه شیکارکردنی پرسیارهکان

سیفان دهیهوئێ خانوویهكه له کارتێ یاریکردن دروست بکات که ژمارهیان 52 دانیه. ههروهك له وینهكهدا دیاره و دهیهوئێ زۆرتین نهومی دهستبهکهوئێ. چهند نههۆم دهتوانی ت دروستبکات.

1. پرسیارهكه تیبیگه

داواکراو زانینی ژمارهی نههۆمهکانه

زانباریه گرنهکان دیاریکه:

• ژمارهی کارتهکان 52 دانیه

• داواکراو زۆرتین نهۆم درست بکری ت.

2. پلاندابنی

هیلکارییهك بۆ خانووهكه بکێشه بۆ باشتر تیبیگه یشتنی پرسیارهكه شیوازیك بۆ ژمارهی کارتهکان لههه نههۆمیك بدۆزهوه، زنجیرهكه بنووسه و به هاکی هه ژمارهكه.

نمونه 4



3 شیکاریکە

خشتهکە و وینەکە دروستبکە.

4	3	2	1	نھۆم
				وینە
11	8	5	2	ژمارەى کارتەکان

ژمارەى کارتەکان لە نھۆمیکەوہ بۆ نھۆمیکى تر 3 کارت زیاد دەکات، زنجیرەیکە بنووسە. ژمارەى کارتەکان لە n نھۆمدا نیشان بدات.

$\sum_{k=1}^n (3k-1)$ کاتیگ k ھیمای خانەى نھۆمەکە بێت و n ژمارەى نھۆمەکان بێت.

$$\sum_{k=1}^4 (3k-1) = (3 \times 1 - 1) + (3 \times 2 - 1) + (3 \times 3 - 1) + (3 \times 4 - 1) = 26$$

$$\sum_{k=1}^5 (3k-1) = (3 \times 1 - 1) + (3 \times 2 - 1) + (3 \times 3 - 1) + (3 \times 4 - 1) + (3 \times 5 - 1) = 40$$

$$\sum_{k=1}^6 (3k-1) = (3 \times 1 - 1) + (3 \times 2 - 1) + (3 \times 3 - 1) + (3 \times 4 - 1) + (3 \times 5 - 1) + (3 \times 6 - 1) = 57$$

لەبەرئەوہى ژمارەى کارتەکان 52 کارتە، بۆیە زۆرتەین ژمارەى ئەو نھۆمانەى سیفان دەستى دەکەوێت بریتیە لە 5 نھۆم.

4 ساغیکەوہ

خشتهکە بەکاربھێنە بۆ تەواوکردنى شیوازەکە. نھۆمى پینجەم 14 کارتى تیدا بەکار دیت

$$S_5 = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 = 40$$

پیویستى بە ژمارەیکى زیاتر لەو کارتانە دەبێت کە ماونەتەوہ ژمارەیان 12 کارتە.

4. دواى تەواوبوونى ئاودانى باخەکەى ھیوا سۆندەى ئاوکەى پێچایەوہ و لوولى کرد تا لە شوینیکی باشدا دایبى. درێژى ھەر پێچیک 6 cm لە پێچەکەى پێش خۆى زیاتربوو ئەگەر درێژى پێچى یەکەم 34 cm بێت. ئایا درێژى سۆندەکە چەندە ئەگەر زانیت ژمارەى پێچەکان 12 پێچە.



بیریکەوہ و تووپیژیکە

- جیاوازی نیوان یەکبەودای یەك و زنجیرە پروونیکەوہ.
- ھیمای ھەر گۆراویگ چییە لە $\sum_{k=1}^n k$
- رێکخەریە خشته دروستبکە و پاشان تەواوى بکە. شیوہیکى گشتى بۆ ھەر زاراوہیکە بنووسە، نموونەیکى بۆ بێنەوہ.

زنجیرە	یەکبەودای یەك	شیوگی گشتى
		نموونە



2-6 رايئنانەكان

رايئنانى ئاراستەكراو

1 زاراۋەكان نمونەيەك بۇ بەكارھيئانى ھىماي سەرجمە بنووسە.

بە بەكارھيئانى ھىماي سەرجمە زنجيرەكە بنووسە.

$$-3+6-9+12-15 \quad 3 \quad 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25} \quad 2$$

$$100+95+90+85+80 \quad 5 \quad 1+10+100+1000+10\,000 \quad 4$$

زنجيرەكە بىكۈە و بەھاكەي ھەژمارىكە.

$$\sum_{k=5}^{k=10} -5k \quad 8 \quad \sum_{k=1}^{k=4} (-1)^{k+1} \frac{12}{k^2} \quad 7 \quad \sum_{k=1}^{k=5} k^3 \quad 6$$

بەھاي زنجيرەكە ھەژمارىكە.

$$\sum_{k=15}^{k=35} 6 \quad 11 \quad \sum_{k=1}^{k=20} k^2 \quad 10 \quad \sum_{k=1}^{k=21} k \quad 9$$

12 پارەدان كارزان مانگانە بىرى 142 500 دىنار قىست دەدات لەبرى نرخی ئەو ئۆتۆمبىلەي كىيۈيەتى پاش دوو سالى چەند پارەي داۋە؟ ئەي پاش 5 سالى چەند دەدات؟

جىيەجىكرىن

بە بەكارھيئانى ھىماي سەرجمە زنجيرەكە بنووسە.

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6} \quad 14 \quad 1.1+2.2+3.3+4.4+5.5 \quad 13$$

$$1+2+4+8+16+32 \quad 16 \quad 11-12+13-14+15-16 \quad 15$$

زنجيرەكە بىكۈە و ھىماكەي ھەژمارىكە.

$$\sum_{k=1}^{k=4} \frac{k-1}{k+1} \quad 19 \quad \sum_{k=2}^{k=7} (-2)^k \quad 18 \quad \sum_{k=1}^{k=5} 8(k+1) \quad 17$$

بەھاي زنجيرەكە ھەژمارىكە.

$$\sum_{k=1}^{k=25} k^2 \quad 22 \quad \sum_{k=1}^{k=88} 2.5 \quad 21 \quad \sum_{k=1}^{k=99} k \quad 20$$

23 كۆگايەكى گەرە قووتو پەنبرى بەچەند چىنېك لەسەر يەك لە شوشە بەندەكەيدا داناۋە، بەجۆرىك لەچىنى سەرەۋەيدا يەك قووتو داناۋە، ھەر چىنېك قووتو يەككى لە چىنەكەي ژىر خۆي زياترە چەند قووتو داناۋە ئەگەر بزائىت ژمارەي چىنەكان 20 چىنە.

بە بەكارھيئانى ھىماي سەرجمە يەكبەداي يەكەكە بنووسە.

$$25+24+23+\dots+2+1 \quad 25 \quad -1+4-9+16-25+36 \quad 24$$

$$-800-80-8-0.8-0.08 \quad 27 \quad \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243} \quad 26$$

$$9-16+25-36+49-64 \quad 29 \quad 10.8+10.5+10.2+9.9 \quad 28$$

$$0+3.4+6.8+10.2+13.6 \quad 31 \quad -3.9+4.4-4.9+5.4-5.9 \quad 30$$

$$1000+100+10+1+\frac{1}{10} \quad 33 \quad 3+\frac{3}{2}+1+\frac{3}{4}+\frac{3}{5} \quad 32$$

رايئنانى ئازاد

بۆشەكلىرىنى تەمىنەي	پرسىپارەكان
نمونە بىكە	
1	16-13
2	19-17
3	22-20
4	23

34 گەشت دووری نیوان بەغداد و ئەو شارەى ھاوکارى لىيە 596 km. ھاوکار بپارىدا لە پوژى

يەكەم نيوەى پىگايەكە بپريت. نيوەى ماوەكە لە پوژى دووەمدا و نيوەى ماوەكەى تر لە پوژى سىيەمدا و ... بەو شىوہيە. بە بەکارهينانى هيمای سەرچەم زنجيرەيەك بنووسە كە سەرچەمەكەى ئەو دوورەيە بىت لە 5 پوژدا بپويەتى. لەو پىنج پوژدا چەند كيلۆمەتر دەبپريت؟

35 دلىيى بەپۆهەبەرى گەنجينەيەك پىگاي درەختى بەكاردينى بۆ ئاگادار كردنەوہى كارمەندەكانى تا لە بارى كتوپردا بپيار لەسەر داخستنى گەنجينەكەيان بەدن. ئەو پىگايەش بە ئاگادار كردنەوہى سى كارمەند لە لايەن بەپۆهەبەرەو تا بپيار لەسەر داخستنى قفلەكان بەدن. و ھەريەكەيان 3 كارمەندى تر ئاگادار دەكات و ھەرەوھا ...

ا ھىلكاريەكەى درەختى لە 3 ئاستدا دروستيەكە ئەم پىگايە بنويينت.

ب زنجيرەيەك بنووسە بە ھاىەكەى ژمارەى ئەو كارمەندانە بىت كە ئاگادار كراونەتەوہ لە 5 ئاستدا و بە ھاى زنجيرەكە بدۆزەو.

ج چى دەبىت نەگەر؟ وايدابنى بەپۆهەبەرەكە لەجياتى 3 كارمەند لە ھەر ئاستيكا 5 كارمەند ئاگادار دەكاتەوہ. ئايا ژمارەى ئەو كارمەندە زيادانەى لە 5 ئاستدا ئاگادار كراونەتەوہ چەندە؟

زنجيرەكە بكەوہ و ھىماكەى ھەژماريەك.

$$\sum_{k=3}^6 \frac{1}{2k} \quad 38$$

$$\sum_{k=1}^6 (-1)^k (5k) \quad 37$$

$$\sum_{k=1}^6 (k^2 + 1) \quad 36$$

$$\sum_{k=1}^5 \frac{k^2}{5k} \quad 41$$

$$\sum_{k=6}^{k=1} 12(k-2) \quad 40$$

$$\sum_{k=1}^6 (3k-2) \quad 39$$

42 تەلار شىوہەكەى بەرامبەرت مۆډىلى ئوتىلىك پيشان دەدات كە بەشىوہى

ھەرمەك كىشراوہ. ھەرنھۆمەك لەشىوہى خشتەكەيدايە، درىژى لايەكەى 10 m

لە درىژى لايەكەى نھۆمەكەى كە راستەوخۆ دەكەوتتە سەرەوہى زياترە.

ا زنجيرەيەك بنووسە كۆى پووبەرەكانى n نھۆم

لەو ئوتىلە بنويينت.

ب كەمترين ژمارەى نھۆمەكان چەند بىت تا سەرچەمى پووبەرى

ھەموو نھۆمەكان لە 50000 m^2 كەمتر نەبىت.

خەمالاندن ھەر سەرچەمەك بەھزرى بخەملىتە پاشان بەراورد لەنيوان خەمالاندنەكەت و ئەو سەرچەمەى كە بە بەكارهينانى بژمىر دەستت دەكەوتت بەكە.

$$1 + 3 + 5 + \dots + 97 + 99 \quad 44$$

$$10 + 11 + 12 + \dots + 29 + 30 \quad 43$$

$$(-2) + (-4) + (-6) + \dots + (-98) + (-100) \quad 45$$

46 فيزيا خشتەى بەرامبەر ئەو دوورپانە پيشان

دەدات كە تەنىك دەبپريت كاتىك بەسەرەستى

دەكەوتتە خوارەوہ لە ھەر ماوەيەك لە ماوە

يەكسانەكان (يەكەكانى دوورى و كات فەرامۆش

كراوہ لەبەرئەوہى كارىگەرى نابىت).

ا زنجيرەيەك لە 5 ماوەدا بۆ ھەر نمونەيەك

بنووسە و بە ھاكەى ھەژماريەك. ھەر سەرچەمەك چى دەنويينت.

ب ھەر زنجيرەيەك بە بەكارهينانى هيمای سەرچەم بنووسە. سەرچەمى دە پادەى يەكەم لە ھەر

يەكەياندا ھەژماريەك.

ج ئەو دوورپانەى تەنىك لە كەوتنە خوارەوہى سەرەستدا دەبپريت بەپى ئەو نمونەى كە ئىستا

كارى پىدەكەيت برىتيە لە 1, 4, 9, 16, 25, .. بەراورد لەنيوان نمونەكەى ليوناردو و گاليلو

لەگەل ئەو نمونەيەى ئىستا كارى پىكراوہ بەكە.

بەشى 6 يەكەوہى يەكەكان و زنجيرەكان

دەروازەيەك

لەسەر ميژووى بىركارى



بىركارى زانى ئەلمانى
فروريك گاوس، لە تەمەنى دە
سالىدا پىگايەكەى خىراى بۆ
ھەژماركردنى سەرچەمى
ژمارە سروشتيەكانى لە 1 تا
100 دۆزىوہ ئەم پىگايەك
بووہ ھۆى دۆزىوہى ياساى
ھەژماركردنى سەرچەمى
ژمارە سروشتيەكان لە 1 تا n
كاتىك n ھەر ژمارەيەكەى
سروشتى بىت.

دوورى كەوتنەخوارەوہى سەرەست لە ھەر كاتىكى خايەنراو		
ماوەكان	نمونەى ليوناردو	نمونەى گاليلو
1	1	1
2	2	3
3	3	5
4	4	7
5	5	9

47 **بیرکردنه وهی رهخنه گرانه** دهگونجیت هندیك تاییه تمه ندی بیرکاری به سهر زنجیره كاندا جیبه جیبریت.

ا سهرجه می هریه كه له $\sum_{k=1}^{10} 3k$ و $\sum_{k=1}^{10} k$ هه ژمار بكه دهسته واژهیهك بنووسه پالپشت له وه بكات كه پییگه یشتووی.

ب هریه كه له $\sum_{k=1}^{10} 2$ و $\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} (k+2)$ هه ژمار بكه. دهسته واژهیهك بنووسه پالپشت له وه بكات كه پیی گه یشتووی.

48 زنجیره ی $\sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k)$ بۆ دۆزینه وهی ژماره ی ئه وه دهنكه شقارته پیویستانه ی له دروستکردنی ههر ره فیك له n چین پیکهاتبیت، هاوشیوهی ئه وه ههرمه می له وینه كه دا دیاره به کاربینه.

ا ئه وه زنجیره یه ی سهر به ههرمه كه یه و له 5 چین پیکهاتووه بكه وه و هه ژماره ی باهاكه ی بكه تا بزانیته ژماره دهنكه شقارته كان چهنده؟

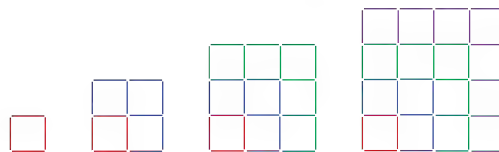
ب ئه م ریسیاه

$$\sum_{k=1}^{k=n} ax_k = a \sum_{k=1}^{k=n} x_k \quad \text{و ریسیا} \quad \sum_{k=1}^{k=n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{k=n} a_k + \sum_{k=1}^{k=n} b_k$$

بۆ نووسینی زنجیره ی $\sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k)$ وهك سهرجه می ئه نجامی لیکدانی زنجیره یه کی دووجا له ژماره یهك، ئه نجامی لیکدانی زنجیره یه کی هیلی له ژماره یهك به کاربینه.

ج یاساكانی سهرجه می زنجیره هیلییه كان و دووجاكان و ئه وه ی له لقی (ب) دا ده ست كه وتووه بۆ دۆزینه وهی ژماره ی ئه وه دهنكه شقارتانه ی پیویسته له دروستکردنی ههرمه یك له 17 چین پیکهاتبیت به کاربینه.

49 **فره ههنگاو** شیوازه كه ی خواره وه به شكنه تیایدا دهنكه شقارته بۆ دروستکردنی چوارگۆشه به کارهاتووه كه درژی لایه كانی له ههر جاریكدا یهك زیاده دكات.



ا یه كه به دوا ی یه كیك بنووسه ژماره ی ئه وه دهنكه شقارته زیاده كراوانه بنویینت كه بۆ دروستکردنی چوارگۆشه یه کی نوی پیویسته.

ب به به کارهینانی هیما ی سهرجه م زنجیره یهك بنووسه بۆنواندنی ژماره ی ئه وه دهنكه شقارتانه ی بۆ دروست کردنی چوارگۆشه یهك درژی لایه کی 6 دهنك بیت چهن دهنك پیویسته بۆ دروستکردنی ئه وه چوارگۆشه.

50 **بیرکردنه وهی رهخنه گرانه** ئایا سهرجه می $9 + 7 + 5 + 3 + 1$ یه كسانه به سهرجه می $1 + 3 + 5 + 7 + 9$ ؟ ئایا ئه م زنجیره یه به به کارهینانی هیما ی سهرجه م به هه مان شیوه دهنوسریت.

51 **بنووسه** ئه وه هییه پرونبكه وه كه وا له S_n دهكات به شه سهرجه میك بیت، نهك سهرجه می گشتی هه موو راده كانی یه كه به دوا ی یه كه كه.

ناماده كرن بۆ تاشیكرده وه

52 كام له مانه ی خواره وه كراویه بۆ زنجیره ی $\sum_{k=1}^{k=7} (-1)^k (3k)$ ؟

ا $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21$ **ج** $3 - 6 + 9 - 12 + 15 - 18 + 21$

ب $-3 + 6 - 9 + 12 - 15 + 18 - 21$ **د** $-3 - 6 - 9 - 12 - 15 - 18 - 21$

53 كام له مانه ی خواره وه نووسینی زنجیره ی $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$ دهنویینت. به به کارهینانی هیما ی سهرجه م.

ا $\sum_{k=1}^{k=4} \frac{k}{2}$ **ب** $\sum_{k=1}^{k=4} \frac{1}{2^k}$ **ج** $\sum_{k=1}^{k=4} \frac{1}{2k}$ **د** $\sum_{k=1}^{k=4} \frac{1}{k+2}$

54 کام له مانه‌ی خواروه به‌های $\sum_{k=1}^{k=6} k^2$ پیکده‌هینیت.

- 36 (ا) 55 (ب) 91 (ج) 273 (د)

55 کام له مانه‌ی خواروه به‌های $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}$ پیکده‌هینیت.

- $\frac{1}{45}$ (ا) $\frac{4}{45}$ (ب) $\frac{7}{12}$ (ج) $\frac{5}{8}$ (د)

56 **کورتیه وه‌لام** سۆزان هه‌په‌میکی له قوتوی شیرینی دروستکرد، به‌جۆریک له چینی سه‌ره‌وه‌یدا یه‌ک قوتو هه‌بیت چینه‌که‌ی دوا‌ی ئه‌و چینه‌ی له دوا‌ی دیت 4 قوتو بیت و چینی دوا‌ی ئه‌و 9 قوتو و چواره‌می 16 قوتو ... ئایا بۆ دۆزینه‌وه‌ی ژماره‌ی قوتوه‌کانی چینی 20 به‌که‌به‌دوا‌ی یه‌ک یان زنجیره به‌کارده‌هینیت؟ ئه‌وه‌ پرونکه‌وه.

به‌ره‌نگاری و فراوانکردن

به به‌کاره‌ینانی هی‌مای سه‌رجه‌م زنجیره‌یه‌ک بنووسه پاشان به‌هاکه‌ی بدۆزه‌وه.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 25^2 \quad 58 \quad 1 + 2 + 3 + \dots + 1000 \quad 57$$

سیفه‌ته‌کانی یه‌که‌به‌دوا‌ی یه‌ک به‌سه‌لمیته.

$$\sum_{k=1}^{k=n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{k=n} a_k + \sum_{k=1}^{k=n} b_k \quad 60 \quad \sum_{k=1}^{k=n} ax_k = a \sum_{k=1}^{k=n} x_k \quad 59$$

61 **بیری په‌خنه‌گر** به‌پای تو‌به‌های زنجیره‌ی $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ چه‌نده؟

ئه‌گه‌ر له‌سه‌ر ئه‌م شیوانه به‌رده‌وام بوویت؟ پرونکه‌وه.

پیداچوونه‌وه‌ی لوه‌پچی

یه‌کتیرینه ستوونی و ئاسۆیه‌کانی هه‌ر راسته‌هیلێک بدۆزه‌وه پاشان وینه‌که‌ی بکیشه (پۆله‌کانی پێشوو)

$$10x + 15y = -5 \quad 64 \quad -6x + 3y = -18 \quad 63 \quad 3x - 4y = 12 \quad 62$$

65 **ته‌لار** نه‌خشه‌ی $h(t) = 8|t - 6| + 10$ پێسایه‌ک بۆ هه‌ژمارکردنی به‌رزی سه‌رخه‌ریک (مصعد) له

زه‌ویه‌وه به (پێ) پیکدینی به‌پێی کات t به‌چرکه‌ که‌مترین به‌رزی سه‌رخه‌ره‌که چه‌نده؟ (پۆله‌کانی

پێشوو)

پینج را‌ده‌ی یه‌که‌می هه‌ریه‌ک له‌م یه‌که‌به‌دوا‌ی یه‌کانه بدۆزه‌وه. (وانه‌ی 6 - 1)

$$a_n = \frac{4^n}{2} \quad 68 \quad a_n = (a_{n-1})^2 - 1 : a_1 = 2 \quad 67 \quad a_n = \left(\frac{1}{2}n + 2\right)^2 \quad 66$$

يەككەدوايىكە و زنجىرە

Arithmetic Sequences and Series
ژمارەيىكەکان

چى ئەمە بەكار دەھيئىت؟

دەتوانىت يەككەدوايىكە يەككى ژمارەيى بۆ
خەملاندى كرىي تېچوونى پۆستە بەكار بېيىت.

ئامانچەكان

- دۆزىنەدەي پادەيەكى داواكراو
- لە يەككەدوايىكە يەككى ژمارەيىدا
- دۆزىنەدەي بەھايەكانى زنجىرە ژمارەيىكەكان.

زاراۋەكان

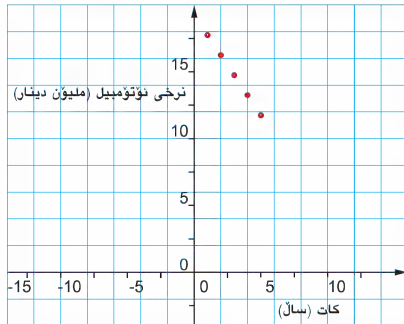
Vocabulary

يەككەدوايىكە يەككى ژمارەيى

Arithmetic Sequence
(Progression)

زنجىرەيى ژمارەيى

Arithmetic Series



سمكو ئۆتۆمبىللىكى نوپى بە 16 750 000 دىنار كرى

بەپۆئەبەرەيەتى باجى دەرامەت نرخى ئۆتۆمبىلەكەي سال
لەدوايى سال بەم شۆۋەيە خەملاند 16 250 000 ، 17 750 000 ،
14 750 000 ، 13 250 000 ، ... بەم يەككەدوايىكە دەوترىت
يەككەدوايىكە يەككى ژمارەيى **Arithmetic sequence** چونكە

جىاۋازى d لەنپوان ھەر پادەيەك و پادەكەي دوايى خۇي

نەگۆرە ناكاتە سفر بەو جىاۋازىيە دەوترىت بىنچىنە **Common**

difference بۆ يەككەدوايىكە يەككى ژمارەيىكەي سەرۋە دەكاتە 1 500 000 دىنار.

پادە	a_1	a_2	a_3	a_4
بەھا	17 750 000	16 250 000	14 750 000	13 250 000

جىاۋازىيەكان -1500 -1500 -1500

لەبىرت بىت جىاۋازى نپوان پادە يەككەمەكان بۆ بەھاكانى نەخشەيەكەي ھىللى جىاۋازىيەكەي نەگۆرە.
سەرنجى ئەمە بدە: ئەگەر جوۋتە پۆكخراۋى (n, a_n) بە پوونكرندەۋەيى نوپترا چەند خاللىكت دەست
دەكەۋىت. كە ھەموۋيان دەكەۋنە سەريەك راستەھىل. بەم جۆرە دەتوانىت تەماشايى يەككەدوايىكە يەككى
ژمارەيى بكەيت. نەخشەيەكەي ھىللىيە و بۋارەكەي كۆمەلەي ژمارە سۈرۈشتىيەكانە.

جىاكرندەۋەيى يەككەدوايىكە ژمارەيىكەكان

1 نەمۇنە

دىارىبەكە ئايا يەككەدوايىكە يەككەكە ژمارەيىيە يان نا، ئەگەر ژمارەيىيە بىنچىنەكەي
بدۆزەۋە. پادەيى دوايى پاش پادەيى دوايىدراۋ بدۆزەۋە.

ا $-3, 2, 7, 12, 17, \dots$

پادەكان -3 2 7 12 17
جىاۋازىيەكان 5 5 5 5

يەككەدوايىكە يەككەكە ژمارەيىيە، بىنچىنەكەي دەكاتە 5، پادەيى دواترى پاش پادەيى
كۆتايى دراۋ $22 = 17 + 5$

ب $-4, -12, -24, -40, -60, \dots$

پادەكان -4 -12 -24 -40 -60
جىاۋازىيەكان -8 -12 -16 -20

يەككەدوايىكە يەككەكە ژمارەيىيە نىيە، چونكە جىاۋازى نپوان پادەكان يەكسان نىيە.

1. دىارىبەكە ئايا يەككەدوايىكە يەككەكە ژمارەيىيە يان نا. ئەگەر ژمارەيىيە

بىنچىنەكە و پادەيى دوايى پاش پادەيى كۆتايى دراۋ بدۆزەۋە.

ا $1.9, 1.2, 0.5, -0.2, -0.9, \dots$ ب $\frac{11}{2}, \frac{11}{3}, \frac{11}{4}, \frac{11}{5}, \frac{11}{6}, \dots$

بەھاي ئۆتۆمبىل سال لەدوای سال	
n	a_n
1	$a_1 = 16\,750\,000 + 0(-1500\,000)$
2	$a_2 = 16\,750\,000 + 1(-1500\,000)$
3	$a_3 = 16\,750\,000 + 2(-1500\,000)$
4	$a_4 = 16\,750\,000 + 3(-1500\,000)$
5	$a_5 = 16\,750\,000 + 4(-1500\,000)$
n	$a_n = 16\,750\,000 + (n-1)(-150\,000)$

سەرنجى شىۋازەكەى خىشتەى بەرامبەر بىدە ھەر
 رادىيەك دەكاتە سەرجەمى رادىيە يەكەم،
 چەندجارەى بنچىنەكەى لەگەلدا كۆكرابىتەو.
 دەتوانىت ئەم شىۋازە بۇ دارپشتنى ياساى
 يەكەدوای يەكە ژمارەيەكان گشتگىر بکەيت.
 رادىيە دووهم = رادىيە يەكەم + بنچىنە
 رادىيە سىيەم = رادىيە يەكەم + $x2$ بنچىنە
 وە ھەروەھا

ياساى رادىيە گشتى يەكەدوای يەكە ژمارەيى

رادىيە n بۆھەر يەكەدوای يەكەكى ژمارەيى بەم شىۋەيە دەۋزىتەو
 $a_n = a_1 + (n-1)d$ كاتىك a_1 رادىيە يەكەم و d بنچىنە بىت.



ھەژمارکردنى رادىيە n يەكەدوای يەكە ژمارەيى

رادىيە دەيەم لەم يەكەدوای يەكە ژمارەيە بدۆزەو $32, 25, 18, 11, 4, \dots$

ھەنگاۋى 1 بنچىنە بدۆزەو $d = 25 - 32 = -7$

ھەنگاۋى 2 رادىيە دەيەم بە بەكارھىنانى ياسايەكە بدۆزەو

$$\text{ياسا} \quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{لەجىياتى دابىنى} \quad a_{10} = 32 + (10-1)(-7)$$

$$\text{سادەيەكە} \quad = -31$$

رادىيە دەيەمى يەكەدوای يەكەكە برىتپىيە لە -31

پاسادان بکە يەكەدوای يەكەكە تەواوبکە.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	32	25	18	11	4	-3	-10	-17	-24	-31

2. رادىيە يازدەيەم لەم يەكەدوای يەكانەدا بدۆزەو.

ب $9.2, 9.15, 9.1, 9.05, \dots$

ا $-3, -5, -7, -9, \dots$



لە خويىندكارەو بۇ خويىندكار

Plot1 Plot2 Plot3		
$\sqrt{1}$	$32 + (x-1)(-7)$	
$\sqrt{2}$	=	
x	y_1	
8	-17	
9	-24	
10	-31	
11	-38	

دەمەۋىت پاسادانى بەھاي ھەر رادىيەك بە بەكارھىنانى بژمىرى
 پوونکردنەۋەيى بکەم. نەخشەى رادىيە گشتى بخەرە ناو بژمىرەكەو
 (لە نمونە 2) $y = 32 + (x-1)(-7)$
 پاشان ئەركى خىشتەکردنى بەكاربىنە بە $(n=1)$ دەستپىكە
 ھەنگاۋىك بەكاربىنە برەكەى 1 بىت، پاشان بەھاي ئەو رادىيە
 بخويىنەو كە دەتەۋىت. ئەو بەھاي y يە. كە بەرامبەر خانەى رادىيەكە.

نمونه 3

دۆزىنەۋەدى پادە نادىارەكان

پادە نادىارەكان لەم يەكەبەدواى يەكە ژمارەيىە بدۆزەۋە. $-17, \blacksquare, \blacksquare, \blacksquare, 11$ ھەنگاۋى 1 بنچىنە بدۆزەۋە.

ياسا كە

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

لەجىياتى دابنى

$$-17 = 11 + (5-1)d$$

سادەبەكە

$$-7 = d$$

ھەنگاۋى 2 پادە نادىارەكان بە بەكارھيئەنى $a_1 = 11, d = -7$ بدۆزەۋە.

$$a_2 = 11 + (2-1)(-7) = 4$$

$$a_3 = 11 + (3-1)(-7) = -3$$

$$a_4 = 11 + (4-1)(-7) = -10$$

3. پادە نادىارەكانى يەكەبەدواى يەكە ژمارەيى 0, $\blacksquare, \blacksquare, \blacksquare, 2$ بدۆزەۋە.



لەبەرئەۋەدى جىاۋازى نۆۋان ھەر پادەيەك و پادەكەى پېش خۆى لە يەكەبەدواى يەكە ژمارەيىدا جىاۋازىيەكى نەگۆر. بۆيە زانىنى دوو پادە بەسە بۆ دۆزىنەۋەدى بنچىنە.

دۆزىنەۋەدى پادەى n لەيەكەبەدواى يەكە ژمارەيىدا كاتىك دووپادە لە پادەكانى زانراۋى

پادەى شەشەم لەم يەكەبەدواى يەكە ژمارەيىدا بدۆزەۋە ئەگەر بزانيىت $a_9 = 120, a_{14} = 195$

ھەنگاۋى 1 بنچىنە بدۆزەۋە.

ياسا كە

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

ۋا دابنى $a_n = a_{14}$ و $a_1 = a_9$ (لەجىياتى 1, 9 دابنى)

$$a_{14} = a_9 + (14-9)d$$

سادەبەكە

$$a_{14} = a_9 + 5d$$

لەجىياتى دابنى

$$195 = 120 + 5d$$

شيكاربەكە

$$15 = d$$

ھەنگاۋى 2 a_1 بدۆزەۋە.

ياسا كە

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

لەجىياتى دابنى

$$120 = a_1 + (9-1)(15)$$

سادەبەكە

$$120 = a_1 + 120$$

شيكاربەكە

$$0 = a_1$$

ھەنگاۋى 3 ياساى يەكەبەدواى يەكەكە بنووسە و بەكارىيەنە بۆ دۆزىنەۋەدى a_6

ياسا

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

لەجىياتى دابنى

$$a_n = 0 + (n-1)(15)$$

سادەبەكە

$$a_6 = 0 + (6-1)15$$

$$= 75$$

پادەى شەشەمى يەكەبەدواى يەكەكە برىتییە لە 75

4. پادەى يازدەيەمى ئەم يەكەبەدواى يەكە ژمارەيىانە بدۆزەۋە.



ب $a_3 = 20.5$ و $a_8 = 13$

ا $a_2 = -133$ و $a_3 = -121$

له‌وانه‌کانی پېښوډا زنجیره ژماره‌ییه‌کانټ نووسینه‌وه و هه ژماره به‌هاکانیت کردووه. **زنجیره‌ی ژماره‌یی**
Arithmetic Series زنجیره‌یه‌که یه‌کبه‌دوای یه‌که‌ه‌ی ژماره‌یه. ده‌توانیت به‌ئاسانی یاسایه‌ک بدوژیته‌وه
 بو هه ژمارکردنی به‌های زنجیره ژماره‌ییه‌که هه‌تا پاده‌یه‌کی دیاریکړاو. وه‌ک ئه‌مه‌ی خواره‌وه:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + a_n$$

$$S_n + a_n = (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + a_1$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)$$

سهرجه‌می n بې‌که‌ه‌ریه‌که یه‌کسانه به $a_1 + a_n$

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) \text{ یان } S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

سهرجه‌می n پاده‌ی یه‌که‌م له زنجیره ژماره‌ییه‌یا

به‌جهری	به‌ژماره	به‌نووسین
$S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)$ کاتیک n ژماره‌ی پاده‌کان و a_1 پاده‌ی یه‌که‌م و a_n دوا پاده‌ بیت.	سهرجه‌می $2 + 4 + 6 + 8 + 10$ بریتیه له $S_5 = 5 \left(\frac{2+10}{2} \right) = 5(6) = 30$	سهرجه‌می n پاده‌ی یه‌که‌م له زنجیره ژماره‌یی بریتیه له ئه‌نجامی لیکنانی ژماره‌ی پاده‌کان له ناوه‌نده ژمیره‌یی پاده‌ی یه‌که‌م و دواپاده.



دوژینه‌وه‌ی به‌های زنجیره ژماره‌یی

5 نمونه

سهرجه‌می داواکړاو له‌هه‌ریه‌که له‌م زنجیره ژماره‌ییه‌یا نه‌دا بدوژنه‌وه.

ب $\sum_{k=1}^{12} (3+4k)$

هه‌ردو پاده‌ی a_1 و a_{12} بدوژنه‌وه.

$$a_1 = 3 + 4(1) = 7$$

$$a_{12} = 3 + 4(12) = 51$$

S_{12} بدوژنه‌وه.

$$S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)$$

$$S_{12} = 12 \left(\frac{7+51}{2} \right) = 348$$

بو پاسادان بژمیری پوونکردنه‌وه

به‌کاربینه.

✓

ا S_{15} له زنجیره‌ی

$$25 + 12 + (-1) + (-14) + \dots$$

بنچینه بدوژنه‌وه.

$$d = 12 - 25 = -13$$

پاده‌ی a_{15} بدوژنه‌وه.

$$a_{15} = 25 + (15 - 1)(-13) = -157$$

S_{15} بدوژنه‌وه.

$$S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)$$

$$S_{15} = 15 \left(\frac{25 + (-157)}{2} \right)$$

$$= 15(-66) = -990$$

بو پاسادان بژمیری پوونکردنه‌وه به‌کاربینه.

✓

ناگاداریه!

ئهم سهرجه‌مه به‌شیانه ناتوانیت
 سهرجه‌می زنجیره ژماره‌یی
 کو‌تایی نه‌هاتوو بدوژیته‌وه
 له‌به‌ره‌وه‌ی به‌های پاده‌کان تا
 ناکو‌تا زیاده‌کات یان تا
 ناکو‌تا که‌مه‌کات.

5. سهرجه‌می داواکړاو له‌م یه‌کبه‌دوای یه‌که ژماره‌ییه‌یا نه‌دا بدوژنه‌وه.

ب $\sum_{k=1}^{15} (50 - 20k)$

S_{16} له زنجیره‌ی $12 + 7 + 2 + (-3) + \dots$

خالی
 جاویری



نمونه 6

جیټه جیکردن له شانؤکاندا



ژماره ی کورسیه کانی چوارده ریزی یه کم له ناوه پاستی یه کیټک له شانؤ جیهانه کان یه کبه دوا یه کیټکی ژماره یی پیکنده هیئت.

ا ژماره ی کورسیه کان له ریزی 14 دا چنده؟

یاساکه بنووسه. $a_1 = 11$ و $d = 1$

یاسای راده ی n بنووسه.

له جیاتی دابنئ

ساده بکه

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{14} = 11 + (14-1)(1)$$

$$= 11 + 13$$

$$= 24$$

ژماره ی کورسیه کانی ریزی چوارده هم ده کاته 24 کورسی

ب ژماره ی کورسیه کان له هر 14 ریزه کده چنده؟

S_{14} بدوژوه به به کار هیئتانی یاسای سرجه می راده کانی یه کم له زنجیره ی ژماره ییدا.

یاساکه

$$S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)$$

له جیاتی دابنئ

$$S_{14} = 14 \left(\frac{11 + 24}{2} \right)$$

ساده بکه

$$= 14 \left(\frac{35}{2} \right) = 245$$

ژماره ی کورسیه کانی هر 14 ریزه کده ده کاته 245 کورسی.

جی ده بیټ ئه گهر...؟ وا دابنئ ژماره ی کورسیه کان له هر ریزی 14 ریزی

دووه مه وه دوو کورسی زیاتره له وه ی پیش خوئ.

ا ژماره ی کورسیه کانی ریزی 14 چنده؟

ب ژماره ی کورسیه کان له هر 14 ریز چنده؟



بیربکه وه و تاوتویبکه

1. بهرورد له نیوان یه کبه دوا یه کی ژماره یی و نه خشی هیټلی بکه.

2. بنچینه ی سالب جی ده گه یه نیټ له یه کبه دوا یه کی ژماره ییدا؟

3. چوڼ راده ی شه شم ددوژیته وه له یه کبه دوا یه کی ژماره یی ئه گهر راده ی سیهم و چوارم زانی

4. چوڼ بنچینه ددوژیته وه له یه کبه دوا یه کی ژماره یی کاتیټک راده ی ه و ته م و دوازده یه م

زانراو بیټ

5. پیکه ربه ئه م هیټلکاریه بنووسه وه و پاشان ته و او ی

بکه هر چوار چووه یه ک پر بکه وه بوئه وه ی تیگه یشتوی

له یه کبه دوا یه کی ژماره ییدا پونیکه یته وه.

سیفه ته کان	پیناسه
یاسایه کان	نمونه کان

یه کبه دوا یه کی ژماره یی



راهیانی ئاراسته کراو

1 زاراوه کان برپی $10 + 20 + 30 + 40 + 50$ بریتییه له (یهکبه دوای یهکیکی ژمارهیی یان زنجیره ژمارهیی)

دیاریبکه یهکبه دوای یهکبه ژمارهیییه یان نا، ئەگەر ژمارهیییه بنچینه و پادەیی دوای خۆی بدۆزەوه.

28, 21, 15, 10, 6, ... 3

46, 39, 32, 25, 18, ... 2

$\frac{12}{3}, \frac{10}{3}, \frac{8}{3}, \frac{6}{3}, \frac{4}{3}, \dots$ 4

پادەیی ههشتەم له هههریهك له یهکبه دوای یهکبه ژمارهیییه بدۆزەوه.

$10, 9\frac{3}{4}, 9\frac{1}{2}, 9\frac{1}{4}, \dots$ 6

3, 8, 13, 18, ... 5

-3.2, -3.4, -3.6, -3.8, ... 7

پادەیی نادیاره کان له یهکبه دوای یهکبه ژمارهیییه بدۆزەوه.

1.4, \square , \square , \square , -1, ... 10

9, \square , \square , \square , 37, ... 9

13, \square , \square , 25, ... 8

پادەیی نۆیەم له یهکبه دوای یهکبه ژمارهیییه بدۆزەوه.

$a_6 = -11$, $a_3 = -5$ 13

$a_4 = 12.6$, $a_3 = 12.2$ 12

$a_5 = 19$, $a_4 = 27$ 11

$a_8 = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{3}{4}$ 16

$a_{11} = -28$, $a_7 = -42$ 15

$a_{20} = 50$, $a_{10} = 100$ 14

سه رجه می داواکراو له هههر زنجیره یهکبه بدۆزەوه.

$\sum_{k=1}^{k=12} (-2 + 6k)$ 18

S_{15} له زنجیره ی $5 + 9 + 13 + 17 + \dots$ 17

S_{18} له زنجیره ی $3.2 + 2.9 + 2.6 + 2.3 + \dots$ 19

20 کرێ بڵند په یوه ندى به کۆمپانیایهکی زانیارییه وه کرد، تا به موچه یهکی سالانه که برهکی 26 000 000 دیناره کاریکات. به مهرجیک سالانه موچه کهکی 1 250 000 دینار زیاده بکات.

ا له سالی شه شه مده موچه کهکی ده بیته چنده؟

ب کوی ئەو موچه یهکی له شهش سالی یه که مده وه ریده گریت چنده؟

راهیانه و شیکارکردنی پرسیاره کان

دیاریبکه یهکبه دوای یهکبه ژمارهیییه یان نا، ئەگەر ژمارهیییه بنچینه کهکی و پادەیی دواتری بدۆزەوه.

-2, -12, -22, -32, -42, ... 22

288, 144, 72, 36, 18, ... 21

0.99, 0.9, 0.81, 0.72, ... 23

پادەیی یازده یه م له هههر یهکبه دوای یهکبه ژماره ییدا بدۆزەوه.

$\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \dots$ 25

12, 11.9, 11.8, 11.7, ... 24

-3.0, -2.5, -2.0, -1.5, ... 26

پادەیی نادیار له هههریهك له یهکبه دوای یهکبه ژمارهیییه بدۆزەوه.

-29, \square , \square , -2, ... 28

77, \square , \square , \square , 33, ... 27

2.3, \square , \square , \square , 1.5, ... 29

راهیانی نازاد

بۆشیکارکردنی	تهماشای
پرسیاره کان	نموونه بکه
1	23-21
2	26-24
3	29-27
4	32-30
5	35-33
6	36

پادى دوازدهىم له ههر يەكبه دواى يەككى ژماره يى بدۆزهوه.

30 $a_5=16.2, a_4=18.4$ 31 $a_8=46, a_4=-2$ 32 $a_{25}=-58, a_{22}=-49$

سەرجه مى داواکراو له ههر زنجیره ژماره يیه کدا بدۆزهوه.

33 S_{15} له زنجیره ی $-18+(-16)+(-14)+\dots$ 34 $\sum_{k=1}^{20} (88-3k)$ 35 $\sum_{k=1}^{14} (14-\frac{1}{2}k)$

36 **به کاربردن** کارژين پۆشاکى به قیست کرى، له ههفته ی یه که مدا 15000 دیناریدا

به فروشیارکه. وا پیکه و تن ههفته نه 5000 دینار بۆ قیسته کانی تر زیادبکات.

أ له ههفته ی نوێه مدا ده بێت چهند پارهدات؟

ب سەرجه مى ئه و پارهیەى له کۆتایى ههفته ی نوێه مدا داویه تی چهنده؟

37 **کاتژمێره کان** کاتژمێرى گۆرپانیك له کاتژمێر 1 دا يه ک زهنگ لێده داو له کاتژمێر 2 دا دووجارو ههروه ها...

أ کاتژمێره که له کاتژمێر 1 ی پاش نیوه پۆوه تا نیوه شه و چهنجار لێده دا و به درژایى 24

کاتژمێر چهنجار لێده دا؟

ب **جى ده بێت نه گهر ...؟** کاتژمێرى شاره وانى له ههر نيو کاتژمێردا جارێک زهنگ لێده دا.

ئه مهش سه ره پای لێدانه کانی له ههر سه رى کاتژمێرێکدا کاریه رى له سه ر يه کبه دواى يه که که

جى ده بێت؟ و ژماره ی لێدانه کانی ئه م کاتژمێره له ماوه ی 24 کاتژمێردا چهند ده بێت؟

سەرجه مى داواکراو بۆههر زنجیره يه ک بدۆزهوه.

38 $\sum_{k=1}^{16} (555-11k)$ 39 $\sum_{k=1}^{15} (4-0.5k)$ 40 $\sum_{k=1}^{18} (-33+\frac{5}{2}k)$

41 S_{16} له زنجیره ی $7.5+7+6.5+\dots$ 42 S_{18} له زنجیره ی $2+9+16+23+\dots$

43 **ته لار** هه رهمى لۆقه ر له پاريس له به رده م مۆزه خانه ی لۆقه ر

له هه شتایه کانی سه ده ی بیسته مدا دروستکراوه. ئه و هه رهمه

به تابلۆى شووشه به ندرکراوه. هه رهمه که له چنده رووته ختێک

پیکه اتوووه رووته خته که ی سه ره وه 4 تابلۆى

تێدایه ژماره ی تابلۆکان تا به ره و خواربێت 4 زیاده کات.

أ هیمای سه رجه م بۆ نووسینی زنجیره که و دیاریکردنى

ژماره ی تابلۆکان به گشتی له n رووته ختدا به کاربێنه.

ب ئه گهر هه رهمه که له 18 رووته خت پیکه اتبێت. ژماره ی تابلۆ شووشه کان چهنده؟

ج له راستیدا ژماره ی تابلۆ به کاره اتوووه کان 11 تابلۆى که متره له وه ی هه ژمارت کرد. ئه ویش بۆ

دروستکردنى ده روازه ی هه رهمه که. ژماره ی ئه و تابلۆیانه ی له هه رهمى لۆقه ردا هیه چهنده؟

44 **فيزيا** تانکى ئاو له به رزیدا داده نرێت تا به ئاسانى ئاو بگاته هه ر مالێک، هه تا تانکى ئاوکه

مه تريک به رزتر بێته وه په ستانى ئاوکه 9.73 کیلۆ باسکال زیاده کات.

أ يه کبه دواى يه کێک بنووسه په ستانى ئاوکه له گه ل به رزبون وه ی تانکيه که مه تر به مه تر پيشانبدات.

ب نزمتريه به رزى تانکيه که چهنده تا په ستانى ئاوکه ده کاته 345 کیلۆ باسکال.

ج نزمتريه به رزى تانکيه که چهنده تا په ستانى ئاوکه ده کاته 690 کیلۆ باسکال که باشتريه

ئاستى ناسراوه بۆ په ستانى ئاو؟

د يه کبه دواى يه که که به روونکردنه وه یى بنوێنه. په ستانى ئاوکه له هه ردوو لقی ب و ج شلۆقه بکه.

ده روازه يه ک

له سه ر کاتژمێر



له گرنگترین شته دیاره کانی
شارى له ندهنى پایتهختى
به ریتانیا کاتژمێر
به ناوبانگه که ی بیگ بنه که
ده که وێته گۆرپانی
په رله مانى به ریتانیا وه. ناوی
ئهو کاتژمێره Big Ben بۆ
زهنگه زه به لاهه که ی
ده گه رپته وه که بارستاییه که ی
13.8 ته نه بۆ ئاگادارى له
کات لێده دا.





45 زهوناسی کیشوهری ئەمریکای باکوور سالانه له کیشوهری ئەوروپا دوور دکهوێتەوه.

ا پاش 50 سال کیشوهری ئەمریکای باکوور چەند له ئەوروپا دوور دکهوێتەوه.

ب پاش چەند سال ئەو دوو کیشوهره به لایەنی کەم 1 کیلۆمەتر له یەکتتری دوور دکهوێتەوه.

46 دەتوانیت نمونە (سامپلی) هەپەمی یەك سەر لەدوو چین پێکھاتبێت بە بەکارھێنانی 4 هەپەمی بنکە سیینە دروستبکەیت بۆئەوێ سامپلیکی چەند سەر له دوو چین پێکھاتبێت دروستبکەیت پێویستە هەر جارێک 3 هەپەمی بۆ زیاد بکەیت، هەروەك له وێنەى بەرامبەردا پیشاندرێت.

ا چەند هەپەمی بنکە سیینەت پێویستە بۆ دروستکردنی سامپلیکی دوو چینی 20 سەری هەبێت؟

ب سۆلاف 20 سامپلی لەدوو چین پێکھاتوو کە سەرەکانی له 1 تا 20 سەر بوو یەك لەدوای یەك دروستکرد. چەند هەپەمی بنکە سیینەى بەکارھێناوه.

47 کرێ یانەیهکی تۆپی سەبەته 395 000 دینار لەهەفتەى یەكەمدا دەدات بە رَاهێنەرەكەى. و بۆ هاندانی رَاهێنەرە باشەكان لەهەر هەفتەیهكدا 45 000 دیناری زیادکرد. رَاهێنەرێك لەدوا هەفتەى وەرزهكەدا 755 000 دیناری وەرگرت. ئایا ئەم وەرزه چەند هەفتەى خایاندووه؟

48 بیرکردنەوهی رەخنەگرانه بۆ نوسینی رێسای یەكیەدوای یەکی ژمارەیی، كەمترین رادەكه پێویستە بزانیته چەند؟ بۆ نوسینی هاوكێشەى راستەهێڵێك پێویستە چەند خالته هەبێت؟ ئایا پەيوەندى لەنێوان ئەو دوو وەلامەدا هەیه؟ پوونبکەوه.

49 بنووسه بنچینهى یەكیەدوای یەکیکی ژمارەیی، ژمارەیهکی موجهیه. رادهى a_n چى بهسەردیته ئەگەر بهای n بەردەوام زیادبکات؟ چى بهسەردیته ئەگەر بنچینهكه سالب بێت.



50 کام لەمانه یەكیەدوای یەکی ژمارەیییه؟

- ا** $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ **ب** $2.2, 4.4, 6.6, 8.8, \dots$
ج $2, 4, 8, 16, \dots$ **د** $2, 4, 7, 11, \dots$

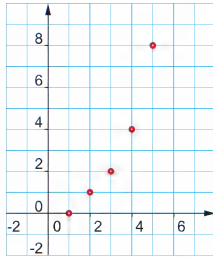
51 یەكێك له ریکخەری ئاهەنگەکان 45 هەزار دینار وەردهگرێت. بۆ هەریەکیکی بەشدار بووی ئاهەنگەكه 12 هەزار دیناری بۆ زیاد دەکریته. کام لەم یەكیەدوای یەکانەى خواروه بارهكه دەردهبرێت؟

- ا** $a_n = 45 + 12(n-1)$ **ب** $45, 57, 69, 81, 93, \dots$
ج $a_n = 57 + 12n$ **د** $57, 69, 81, 93, 105, \dots$

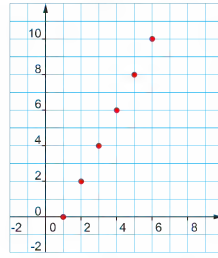
52 کام لەمانەى خواروه رادهى نادیارى یەكیەدوای یەكه ژمارەیییهكهیه 40, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

- ا** $11, 22, 33$ **ب** $13, 22, 31$
ج $14, 24, 34$ **د** $16, 24, 36$

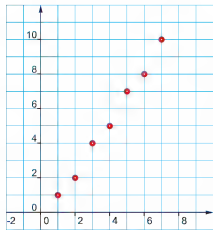
53 کام لهم هیلکارییه پوونکردنه و هیبانه یه کبه دواى یه کی ژماره یی دنوینیت؟



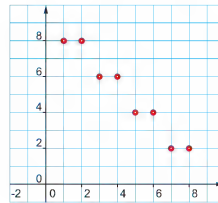
(ا)



(ب)



(ج)



(د)

54 کام له مانه ی خواروه سرجه می زنجیره ی $19 + 16 + 13 + 10 + 7 + 4$ دنوینیت؟

(ا) $\sum_{k=1}^{k=6} (22 - 3k)$

(ب) $\sum_{k=1}^{k=6} 19 - 3k$

(ج) $\sum_{k=1}^{k=6} (22 - 3(k-1))$

(د) $\sum_{k=1}^{k=6} 19 - 4k$

55 کورته وه لام راده ی سیزده هم له یه کبه دواى یه کی ژماره یی $54, 50, 46, 42, \dots$ دا چنده؟

بهره نگاری و فراوان کردن

56 دوو راده ی a_n و a_m ت له راده کانی یه کبه دواى یه کی ژماره ییدا هیه.

(ا) پوونیکه وه بنچینه ی ئەم یه کبه دواى یه که ژماره ییه ده کاته $d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$.

(ب) رپسا نوپیه که بو دوزینه وه ی بنچینه له یه کبه دواى یه که ژماره ییه به کاربینه که $a_{36} = 304$ و $a_{12} = 88$

57 رپسایه ک بنووسه جگه له راده ی یه کهم راده ی تری تیدانه بیت بو هه ژمارکردنی سرجه می

یه کبه دواى یه کی ژماره یی، که ی به کاره یانی ئەو رپسایه گونجاو ده بیت؟

58 سرجه می 3 راده ی یه که می یه کبه دواى یه کی ژماره یی یه کسانه به 60 و ئەنجامی لیکدانیان

یه کسانه به 7 500 ئەو سی راده یه کامانه.

59 بیرکردنه وه ی ره خنه گرانه مه به ست له یه کسان بوونی $a_{2n} = 2a_n$ چیه؟

پیداچوونه وه ی لولپچی

دیاریکه ئایا ئەم نه خشه توانیانه نه خشه یه کی گه شه بوونه یان پووکانه وه یه. (وانه ی 4 - 1)

60 $f(x) = 1.25(0.75)^x$ 61 $f(x) = 1.43(5.32)^x$ 62 $f(x) = 0.92(0.64)^x$

63 دهنگه کان نه خشه ی $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$ رپسایه که بو پپوانی ئاستی توندی دهنگ به کاردیت.

کاتیک L ئاستی توندی دهنگه به دیسل و I توندی دهنگ و I_0 توندی بهرگویی که وتن بیت، ئاستی توندی دهنگیک بدوژوه. که توندیه که ی $I_0 10^{9.2}$ بیت.

هه ر زنجیره یه که به به کاره یانی یاسای سرجه م بنووسه. (وانه ی 6 - 2)

64 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ 65 $\frac{4}{5} + \frac{8}{5} + \frac{12}{5} + \frac{16}{5} + 4$

66 $-1 + 2 + 7 + 14 + 23$ 67 $-\frac{1}{3} - \frac{2}{3} - 1 - \frac{4}{3} - \frac{5}{3}$

تاقىکردنەۋەى نىۋەى بەش

1-6 ✓ دەروازەيەك بۆ يەكبەدۋاى يەكەكان

پىنچ ۋادەى يەكەمى ھەريەكە لەم يەكبەدۋاى يەكەكانە بدۆزەۋە.

$$a_n = n^2 - 2n \quad 4 \quad a_n = 2a_{n-1} - 12, a_1 = -1.3 \quad 3 \quad a_n = 4^{n-1} \quad 2 \quad a_n = \frac{2}{3}n \quad 1$$

جۆرى ئەم يەكبەدۋاى يەكەكانە ديارىيەكە.

$$-2, -8, -18, -32, -50, \dots \quad 6 \quad 8, 11, 14, 17, 20, \dots \quad 5$$

$$437, 393, 349, 305, 261, \dots \quad 8 \quad 1\,000, 200, 40, \frac{8}{5}, \dots \quad 7$$

9 پاسىك بە خىراىى 55 km/h دەرواى. پاسەكە لە كىلۆمەترى 18 ۋە دەستى بە جوولە كردو پارىزگارى لە

خىراىيەكەى كرد. دۋاى 4 كاتژمىر پاسەكە لەكام كىلۆمەترى پىگاكەدا دەيىت؟ يەكبەدۋاى يەكەكە بە

ۋوونكردنەۋەىى لە n كاتژمىردا بنويىنە، شىۋازەكە باسبەكە.

2-6 ✓ زنجىرەكان و ھىماى سەرجهەم

زنجىرەكە بەكەۋە و بەھايەكەى ھەژمارىكە.

$$\sum_{k=1}^{k=5} (-1)^k (k^2 - 2) \quad 12 \quad \sum_{k=1}^{k=4} \left(\frac{k}{k+2} \right) \quad 11 \quad \sum_{k=1}^{k=4} (-14 - 2k) \quad 10$$

بەھايى زنجىرەكە بدۆزەۋە.

$$\sum_{k=1}^{k=15} k \quad 15 \quad \sum_{k=1}^{k=40} k^2 \quad 14 \quad \sum_{k=1}^{k=5} \frac{1}{2} \quad 13$$

16 ژمارەى كورسىيەكانى رىزى يەكەمى شانۆيەك 20 كورسىيە، لە پىزىكەۋە بۆ ئەۋ پىزەى لەدۋاى دىت ژمارەى كورسىيەكان

3 كورسى زىاد دەكات. ژمارەى كورسىيەكان لە شانۆكەدا چەندە؟ ئەگەر بزانىت ژمارەى پىزەكان 12 رىزىيىت.

3-6 ✓ يەكبەدۋاى يەكەكان و زنجىرە ژمارەيىەكان

ۋادەى ھەشتەمى ھەر يەكبەدۋاى يەككىكى ژمارەىى بدۆزەۋە.

$$-5, -13, -21, -29, \dots \quad 18 \quad 10.00, 10.11, 10.22, 10.33, \dots \quad 17$$

$$a_{13} = 186 \text{ ۋ } a_{10} = 141 \quad 20 \quad a_5 = 80 \text{ ۋ } a_2 = 57.5 \quad 19$$

ۋادەى نادىار لەھەر يەكبەدۋاى يەككىكى ژمارەىى بدۆزەۋە.

$$31, \square, \square, \square, 79, \dots \quad 22 \quad -23, \square, \square, -89, \dots \quad 21$$

سەرجهەمى داۋاكراۋ لەھەر زنجىرە ژمارەيىەك بدۆزەۋە.

$$\sum_{k=1}^{k=8} 4k \quad 24 \quad S_{10} \text{ لە زنجىرەى } 40 + 30 + 20 + 10 + \dots \quad 23$$

$$-6 - 1 + 4 + 9 + \dots \text{ لە زنجىرەى } S_{14} \quad 26 \quad \sum_{k=1}^{k=11} (0.5k + 5.5) \quad 25$$

27 پىشپرو بپارىدا ھەندىك لەۋ پارمەىى باۋكى دەيداتى لە دەخىلەكەدا پاشەكەۋتى بكات. بپارىدا لەھەفتەى

يەكەمى سالەكەدا ھەزار دىنار بخاتە دەخىلەكەيەۋە 1500 دىنار لەھەفتەى دوۋەمدا و 2 ھەزار دىنار لە ھەفتەى

سپىيەمدا و ھەرۋەھا ... لەدۋاى ھەفتەى كۆتايى سالدا چەند پارە دەخاتە دەخىلەكەيەۋە. لە كۆتايى سالدا

دەخىلەكە چەندى تىدابت؟ (ئەكەر بزانىت سالىك 52 ھەفتەى تىدابتە)

بەشى 6 يەكبەدۋاى يەكەكان و زنجىرەكان

يەكەدوايىەك و زنجيره

Geometric sequences and Series



كى ئەمە بەكار دەھيئەت؟

پلاندانەرانى يارىيە وەرزىيەكان يەكەدواى يەك و زنجيره ئەندازەيەكان بۇ ديارىكردىنى ژمارەى يارىيەكان لەھەر خولەكدا بەكار دىئەن (نمونه 6)

ئامانجەكان

- دۆزىنەوەى پادەكانى يەكەدواى يەكە ئەندازەيەكان لەگەل
- دۆزىنەوەى ناوەندى ئەندازەيەكان
- دۆزىنەوەى بەھايەكانى زنجيره ئەندازەيەكان.

زاراوەكان

Vocabulary

يەكەدواى يەكە ئەندازەيەكان

Geometric Sequence

ناوەندى ئەندازەيەكان

Geometric mean

زنجيرهى ئەندازەيەكان

Geometric Series

سیرینا ولیامز لەنۆوان 128 یاریکەردا لەتۆپى تێنسى قارەمانتێتى کچان لە ویمبلدون سالى 2003 دا پلەى يەكەمى بەدەستەيەنا، لەکۆتايى ھەر يارىيەكى نۆوان دوويارىکەردا براوھ بەردەوام دەيەت بەلام دۆراوھەكە دەردەکریت. ئەمەش ئەو دەگەيەنیت کە ژمارەى يارىکەرەكان لە کۆتايى ھەر خولەكدا بۇ نيوە کەمدەكات. دەکریت ئەو يارىکەرەکانى لە کۆتايى ھەر خولەكدا دەمێنیتەو بە بەکارھيئەنانى

يەكەدواى يەكە ئەندازەيەكان ديارىکرین. لە يەكەدواى يەكە ئەندازەيەكان **Geometric Sequence** پێژەى ھەر پادەيەك بۇ پادەكەى پێش خۆى نەگۆرە و جياوازە لە 1. بەو پێژەيە دەوتریت **بنچينە**

Common ratio بنچينەى يەكەدواى يەكە ئەندازەيەكانى سەرەوھ بریتيە لە $\frac{1}{2}$.

خولەكە	1	2	3	4
ژمارە	128	64	32	16

$$\frac{16}{32} = \frac{1}{2} \quad \frac{32}{64} = \frac{1}{2} \quad \frac{64}{128} = \frac{1}{2} \quad \text{پێژەكان}$$

بیرت بێتەوھ نەخشە توانیەكان پێژەى ھاوبەش (بنچينە) يان ھەيە، کاتێک جووتە پیکخواوى (n, a_n) يەكەدواى يەكێكى ئەندازەيەكان بە پوونکردنەوھي دەنۆيەت. ئەو خالانەى دياریت کردووە. دەکەوونە سەر چەماوھەكى توانى بەو شێوھ دەتوانیت سەيرى يەكەدواى يەكە ئەندازەيەكان بکەیت ھەرەك نەخشەيەكى توانى بوارەكەى کۆمەلەى ژمارە سروشتيەکانە.

جياکردنەوھى يەكەدواى يەكە ئەندازەيەكان

1 نمونە

ديارىبکە يەكەدواى يەكە ئەندازەيەكان يان نا، ئەگەر ئەندازەيەكان بنچينەکەى و پادەى دواى پادە دراوھەكە بدۆزەوھ.

ج 6, 10, 15, 21, ...

6 10 15 21

جياوازىيەكان 4 5 6

پێژەكان $\frac{5}{3}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{7}{5}$

يەكەدواى يەكەكە نە

ژمارەيە و نە ئەندازەيەكان

ب 8, 16, 24, 32, ...

8 16 24 32

جياوازىيەكان 8 8 8

پێژەكان $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{4}{3}$

يەكەدواى يەكەكە ژمارەيە بنچينە

$d = 8$ ھيماى d بۇ بنچينەى

يەكەدواى يەكەى ژمارەيە دادەنریت

ا 8, 12, 18, 27, ...

8 12 18 27

جياوازىيەكان 4 6 9

پێژەكان $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$

يەكەدواى يەكەكە ئەندازەيەكان

بنچينەکەى $r = \frac{3}{2}$ ھيماى r بۇ بنچينەى

يەكەدواى يەكەى ئەندازەيەكان دادەنریت

1. ديارىبکە يەكەدواى يەكە ئەندازەيەكان يان نا ئەگەر ئەندازەيەكان بنچينەکەى و

پادەى دواى پادە دراوھەكە بدۆزەوھ.

ب 1.7, 1.3, 0.9, 0.5, ...

ا $\frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{36}, \frac{1}{108}, \dots$

ج -50, -32, -18, -8, ...



له يهكبه دواى يهكى ئەندازەييدا ھەر پادەيەك له پادەكانى بریتییه له ئەنجامى لیکدانى ئەو پادەيەى پېش خۆى ھاتووہ له بنچینەكەى، ئەمەش پېناسەيەكى ناديارى ئەم يهكبه دواى يهكەت بەم شیوہیەى خواروہ دەداتى:

$$\text{بنچینە} \leftarrow a_n = a_{n-1} r \rightarrow \text{پادەى } n$$

پادەى پېش خۆى

ھەر وھا دەتوانیت پېناسەى دیار بۆ دۆزینەوہى پادەى n يهكبه دواى يهكە ئەندازەيەكە بەکاربېنیت. ھەر پادەيەك بریتییه له ئەنجامى لیکدانى پادەى يهكەم له ھیزیک له ھیزەكانى بنچینەكە. ھەر وھك له خشتەى خواروہ پېشاندراروہ.

ژمارەى ياريكەرەكان لە ھەر خولیکى ويمبلدون					
خولەكە	1	2	3	4	n
ژمارەى ياريكەرەكان	128	64	32	16	a_n
پېساکە	$a_1 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^0$	$a_2 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$a_3 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$a_4 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$a_n = 128\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ياساى گشتى يهكبه دواى يهكە ئەندازەيەكان

پادەى a_n بۆ يهكبه دواى يهكیکى ئەندازەيى بەم ياسايەى خواروہ ھەژماردەكریت

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

كاتیک a_1 پادەى يهكەمى و r بنچینەكەى يهكبه دواى يهكەكە بێت.



نمونه 2

دۆزینەوہى پادەى n له يهكبه دواى يهكیکى ئەندازەيى

پادەى نۆيەم له يهكبه دواى يهكى ئەندازەيى $5, 10, -20, 40, -80, \dots$ دا بدۆزەوہ.

$$\text{ھەنگاوى 1} \quad \text{بە بەکارھێنانى ياساکە بنچینە بدۆزەوہ.} \quad r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{10}{-5} = -2$$

ھەنگاوى 2 پادەى نۆيەم ھەژماربکە بە بەکارھێنانى ياسا

ياساکە

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

له جياتى دابنئ

$$a_9 = -5(-2)^{9-1}$$

سادەبکە

$$a_9 = -5(256) = -1280$$

پادەى نۆيەم لەم يهكبه دواى يهكە بریتییه له -1280

ساغبکەوہ يهكبه دواى يهكەكە تەواوبکە.

$$a_5 = -80$$

$$a_6 = -80(-2) = 160$$

$$a_7 = 160(-2) = -320$$

$$a_8 = -320(-2) = 640$$

$$a_9 = 640(-2) = -1280 \quad \checkmark$$

2. پادەى نۆيەم لە ھەريەكە لەم يهكبه دواى يهكە ئەندازەييانە بدۆزەوہ.



0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, ... ب

$\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, -\frac{3}{32}, \frac{3}{64}, \dots$ ا

نمونه 3

ئاگادارىيە!

كاتېك دوو پادە لە پادەكانى
يەكپەدواى يەكەكە دراو بېت.
دلىابە لەوې كە بەها موجدب
و سالبەكانى r ت وەرگرتوو.

دۆزىنەوې پادەى n ى يەكپەدواى يەكېكى ئەندازەيى بەزانينى دوورادە لە پادەكانى

پادەى دەيەم لەو يەكپەدواى يەكە ئەندازەيىدە بدۆزەوېدە $a_5 = 96$ و $a_7 = 384$

هەنگاوى 1 بنچينەكە بدۆزەوې.

ياساكە

$$a_7 = a_5 r^{7-5}$$

سادەبکە

$$a_7 = a_5 r^2$$

لەجياتى دابنى

$$384 = 96 r^2$$

هەردوولا دابەشى 96 بکە

$$4 = r^2$$

پەگى دووجاى هەردوولا وەرگرە

$$\pm 2 = r$$

هەنگاوى 2 a_1 بدۆزەوې.

لەهەر بارىك لە بارەكانى r بە تەنھا بکۆلەوې.

ياساكە

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

لەجياتى دابنى

$$96 = 6(-2)^{5-1}$$

$$96 = a_1 (2)^{5-1}$$

سادەبکە

$$6 = a_1$$

$$6 = a_1$$

هەنگاوى 3 ياساى يەكپەدواى يەكەكە بنوسە بۆ دۆزىنەوې a_{10} بەكاربەھيە.

ياساكە

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

لەجياتى دابنى

$$a_n = 6(-2)^{n-1}$$

$$a_n = 6(2)^{n-1}$$

لەجياتى n ، 10 دابنى

$$a_{10} = 6(-2)^{10-1}$$

$$a_{10} = 6(2)^{10-1}$$

سادەبکە

$$a_{10} = -3072$$

$$a_{10} = 3072$$

پادەى دەيەم لەم يەكپەدواى يەكە برىتييە لە 3072 يان -3072

3. پادەى حەوتەم لەهەر يەكپەدواى يەكېكى ئەندازەيى بدۆزەوې.

خالى
چاودىرى

$$a_4 = 48 \text{ و } a_2 = 768 \text{ [ب]}$$

$$a_5 = -40 \text{ و } a_4 = -8 \text{ [ا]}$$

بۆيە ناوەندە ئەندازەيى بۆ دوو ژمارەى موجدبى وەك x ، y بەم شێوەى پېناسە دەكرىت \sqrt{xy} ئەگەر

a ، b ، c سى پادەى موجدبى لەدواى يەكتر، لەيەكپەدوايەكى ئەندازەيى ئەوا $b = \sqrt{ac}$

ناوەندە ئەندازەيىەكان لە يەكپەدواى يەكى ئەندازەيىدا ئەو پادانەن دەكەونە نۆوان دوو پادەو كە بەدواى يەكدا نەهاتبن.

ناوەندە ئەندازەيى

لەهەر يەكپەدواى يەكى ئەندازەيى كە پادەكانى موجدبن هەر پادەيەك ناوەندى ئەندازەيى يە بۆ دوو پادەكەى پېش خۆى و پاش خۆى.



نمونه 4

دۆزىنەوې ناوەندە ئەندازەيى

ناوەندە ئەندازەيى بۆهەردوو ژمارەى $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{32}$ بدۆزەوې.

$$\sqrt{ab} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{32}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{1}{8}$$

4. ناوەندە ئەندازەيى بۆ دوو ژمارەى 16 و 25 بدۆزەوې.

خالى
چاودىرى

هەروەك زنجیره ژمارەییەكان زنجیرهى ئەندازەییەش **Geometric Series** بریتییە لە زنجیرهى یەكجەدواى یەكە ئەندازەییەكەى. دەتوانیت بە ئاسانى یاسایەك بۆ هەژمارکردنى بەهای زنجیره ئەندازەییەكە تا رادەیهكى دیاریكراو بەم شێوەیهى خواروه بدۆزیتەوه:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1} \\ -rS_n &= -a_1 r - a_1 r^2 - \dots - a_1 r^{n-1} - a_1 r^n \\ \hline S_n - rS_n &= a_1 - a_1 r^n \\ S_n(1-r) &= a_1(1-r^n) \\ S_n &= a_1 \left(\frac{1-r^n}{1-r} \right) \end{aligned}$$

سەرجهمی راده یەكەمەكان لە زنجیرهیهكى ئەندازەیی

سەرجهمی راده یەكەمەكان (S_n) لە زنجیره ئەندازەیی $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$ دا بەم یاسایە هەژمار دەكری.

$$S_n = a_1 \left(\frac{1-r^n}{1-r} \right); r \neq 1$$

كاتێك a_1 رادهی یەكەمەكە یەكجەدواى یەكەكە و r بنچینهكەى بێت.



دۆزینهوهى سەرجهمی زنجیره ئەندازەیی

5 نموونه

سەرجهمی داواكراو بۆهەر زنجیره ئەندازەییەك بدۆزەوه.

هەنگاوى 1 رادهی a_1 بدۆزەوه.

$$a_1 = \left(\frac{1}{3} \right)^{1-1} = \left(\frac{1}{3} \right)^0 = 1$$

هەنگاوى 2 S_5 بدۆزەوه

$$S_n = a_1 \left(\frac{1-r^n}{1-r} \right)$$

$$S_5 = 1 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^5}{1 - \left(\frac{1}{3} \right)} \right)$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{243}}{\frac{2}{3}} \approx 1.49$$

بۆ پاسادان بژمیری پروونکردنەوهی بەکاربهێنە.

ا S_7 لە زنجیرهى $3 - 6 + 12 - 24 + \dots$

هەنگاوى 1 بنچینهكە بدۆزەوه

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-6}{3} = -2$$

هەنگاوى 2 S_7 بدۆزەوه كاتێك $a_1 = 3$

و $r = -2$ و $n = 7$

$$S_n = a_1 \left(\frac{1-r^n}{1-r} \right)$$

$$S_7 = 3 \left(\frac{1 - (-2)^7}{1 - (-2)} \right)$$

$$= 3 \left(\frac{1 - (-128)}{3} \right) = 129$$

بۆ پاسادان بژمیری پروونکردنەوهی بەکاربهێنە.

لەبەرت بێت

ئەم كۆمەلانه بەشه كۆمەلەن
لەبەرئەوهى هەریەكەیان لە
كۆمەلە رادهیهكى كۆتایی
هاتوو پێكهاتوو، لە وانەى
5-6 دا فێردەبیت چۆن
سەرجهمی هەندێك لە زنجیره
دوا نەهاتووكان بدۆزیتەوه.

5. سەرجهمی داواكراو لەهەر زنجیره ئەندازەییەكدا بدۆزەوه.



ا S_8 لە زنجیره $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$ **ب** $\sum_{k=1}^{k=6} -3(2)^{k-1}$

نمونه 6

جېټه جيڪرڻ له وهرنڌا



له خولي ويمبلدون بؤ توپي تيئسي سهرزهوي 128 ياريڪر بهڻداريان کرد. قاره مانه تييه که بهردهوام بوو تا يه که براوه مايه وه. چهند ياري له قاره مانه تييه که نه جامدرا.

ههنگاوي 1 يه که بهدواي يه که که بنووسه.

بنووسه n ژماره ي خوله کان

$a_k =$ ژماره ي ياريهه کاني خولي k

$S_n =$ کوي ژماره ي ياريهه کان له n خولدا

$$a_n = 64 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

خولي يه که م 64 ياريه، بؤيه $a_1 = 64$ ، له بهرئوه ي ژماره ي ياريهه کان له هر خولکدا نيوه ي ژماره ي ياريهه کاني خولي پيشوو ده بيت. بؤيه $r = \frac{1}{2}$

ههنگاوي 2 ژماره ي خوله کان بدؤزه وه

$$1 = 64 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

خولي کوتايي يه که ياري نه نجام ده دريت.

$$\frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

به شي تواني له بره که جيا که وه، به دابه شکردن به سهر 64 دا.

$$\left(\frac{1}{2} \right)^6 = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$\frac{1}{64}$ به شيوه ي تواني که له توانه کاني $\frac{1}{2}$ بنووسه.

$$6 = n - 1$$

توانه کان يه کسان بکه

$$7 = n$$

ساده بکه

ههنگاوي 3 کوي گشتي ياريهه کان بدؤزه وه.

$$S_7 = 64 \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^7}{1 - \left(\frac{1}{2} \right)} \right] = 127$$

ياساي سهرجه مي زنجيره نه ندره يي به کار بهي نه

خوله که 127 ياري نه نجامد او.

کومپانيه يه که گه وره سالانه 84 000 000 دينار کرپي باره گاهه ي ددات، نهو بره سالانه 8% زياد ده کات له ماوه ي 6 سالدا کومپانيه که چهند پاره ددات؟



بيريکه وه و تاوتويبکه

1. سي پاده ي دواي پاده ي يه که مي يه که بهدواي يه که نه ندره يي... 3, 6, بدؤزه وه، پاشان سي پاده ي

دواي دوو پاده ي يه که مي يه که بهدواي يه که ژماره يي... 3, 6, بدؤزه وه.

2. بهراورد له نيوان ناوه ندي ژميره يي و ناوه نده نه ندره يي دوو ژماره ي 4 و 10 دا بکه.

3. پکخه ربه هيلکار يه که ي بهرام بهر دروستيکه وه و پاشان

تهواوي بکه. هر چوار چيوه يه که پر بکه وه به جور يک نه وه ي له

يه که بهدواي يه که نه ندره يي کان تيگه يشتووي نيشانيديت.

پيئناسه	سيغه ته کان
نمونه	ياسايه کان
يه که بهدواي يه که نه ندره يي کان	



راھینانی ئاراستەکراو

1 زاراوەکان لە یەكجەدوای یەكی ئەندازەیدا ئەو پادەیی دەكەوێتە نێوان دوو پادەوه كە دوای یەك

نەهاتن بریتییه لە _____؟ (ناوەندی ژمێریی یان ناوەندی ئەندازەیی).

دیاریبەكە ھەریەكە لەم یەكجەدوای یەكە ئەندازەییی یان ژمارەییی یان ھیجیان نیین، ئەگەر ئەندازەییە بنچینەكە و پادە داھاتووی بدۆزەو.

$$\frac{1}{2}, 1, 2, 3, \dots$$

$$-10, -12, -14, -16, \dots$$

$$-320, -80, -20, -5, \dots$$

پادە دەیمە ھەر یەكجەدوای یەكی ئەندازەیی بدۆزەو.

$$5000, 500, 50, 5, 0.5, \dots$$

$$2, 6, 18, 54, 162, \dots$$

$$-0.125, -0.25, -0.5, 1, -2, \dots$$

پادە شەشەمی ئەو یەكجەدوای یەكە ئەندازەییە بدۆزەو كە دوو پادە دراوہ ناسراوہ.

$$a_5 = 12, a_3 = 3$$

$$a_5 = 108, a_2 = 4$$

$$a_5 = -4, a_4 = -12$$

ناوەندە ئەندازەیی بۆھەردوو ژمارەكە بدۆزەو.

$$12 \text{ و } 192$$

$$2 \text{ و } 32$$

$$6 \text{ و } \frac{3}{8}$$

سەرچەمی داواکراو لەھەر زنجیرەییەکی ئەندازەیی بدۆزەو.

$$\sum_{k=1}^{k=5} (-3)^{k-1}$$

$$S_8 \text{ لە زنجیرە } 2 + 0.2 + 0.02 + \dots$$

$$\sum_{k=1}^{k=9} 256 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$S_5 \text{ لە زنجیرە } 12 - 24 + 48 - 96 + \dots$$

18 مووچە مامۆستایەکی زمان لە سالی یەكەمدا مووچەكە 8000000 دینارە ئەو مووچەیه سالانە بەرپرژە 5% زیاد دەكات، لە بیستەمین سالی خزمەتیدا مووچەكە دەبێتە چەند؟ لەو ماوەیدا چەندی وەرگرتوو؟

راھینان و شیکارکردنی پرسیارەکان

دیاریبەكە یەكجەدوای یەكە ئەندازەییە یان ژمارەییە یان شتیکی ترە، ئەكەر ئەندازەییە، بنچینەكە و

پادە داھاتووی بدۆزەو.

$$-2, -6, -18, -54, \dots$$

$$-36, -49, -64, -81, \dots$$

$$2, 7, 12, 17, \dots$$

پادە نۆیەم لەھەر یەكجەدوای یەكی ئەندازەیی بدۆزەو.

$$3, -6, 12, -24, 48, \dots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{250}, \frac{1}{1250}, \dots$$

$$8, 24, 72, 216, 648, \dots$$

$$3200, 1600, 800, 400, \dots$$

پادە ھەوتەم لەھەر یەكجەدوای یەكی ئەندازەیی بدۆزەو كە دوو پادە دراوہ.

$$a_6 = -100, a_4 = -4$$

$$a_6 = 20.25, a_5 = 13.5$$

$$a_5 = 162, a_4 = 54$$

ناوەندە ئەندازەیی بەھەردوو ژمارەكە بدۆزەو.

$$\frac{1}{5} \text{ و } 45$$

$$2 \text{ و } 81$$

$$\frac{1}{9} \text{ و } 9$$

راھینانی ئازاد

بۆشیکارکردنی	تەماشای
پرسیارەکانی	نموونەبەكە
1	21-19
2	25-22
3	28-26
4	31-29
5	35-32
6	36

سەرجهمی داواکراو لهههر زنجیره ئەندازەییەکا بدۆزەوه.

32 S_6 له زنجیره ی $1+5+25+125+...$ 33 S_8 له زنجیره ی $10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+...$

34 $\sum_{k=1}^{k=6} -1\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ 35 $\sum_{k=1}^{k=7} 8(10)^{k-1}$

36 **باپیران** دایک و باوک و دوو باپیر و دوو داپیرو 4 باپیره گهوره و 4 داپیره گهوره تهیه.

ا ژماره ی باپیره گهوره و داپیره گهوره له ماوه ی 6 نه ودا پیشتوو چهنده؟ له ماوه ی 21 نه ودا چهنده؟

ب **چی ده بیته نه گهر...** پرسیای هه ژمارکردنی باپیره گهوره و داپیره گهوره چۆن ده گۆریت

ئه گهر تۆ یه کهم نه وه بیت؟

بوهر یه که به دوای یه که یکی ئەندازەیی پێناسە ی دیار، و پاده ی ده یه م و سەرجهمی ده پاده ی یه که م بدۆزەوه.

37 $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$ 38 $4, 0.4, 0.04, 0.004, \dots$

39 $8, 16, 32, 64, \dots$ 40 $-22, -11, -\frac{11}{2}, -\frac{11}{4}, \dots$

41 $162, -54, 18, -6, \dots$ 42 $12.5, 62.5, 312.5, 1562.5, \dots$

43 **ئه نتيكه** شاناز پولیکی كۆنی به 20 000 دینار كړی، شاناز وایدانا نرخ ی پوله که سالانه 15% زیاد بکات.

ا نرخ ی پوله که پاش 4 سال ده بیته چهنده؟ پاش 6 سال ده بیته چهنده؟

ب ئایا نرخ ی پوله که له چوار سالی یه که مدا زۆر تر زیاد ده بیته له و زیاد بوونه ی له چوار سالی

دووه مدا بووه یان نا؟ ئه مه پروونکبه وه.

44 **قیسته زانکۆیییه کان** له پوژی له دایک بوونی شیرین داپیره و باپیره ی برپاریاندا قیسته کانی

وه گرتنی له زانکۆ بۆ بدن. له پوژی له دایک بوونیدا 50 دیناریان بۆ دانا. برپاریاندا ههر سالیك

دووئوه نده ی ساله که ی پیشووی بۆ دانین، کاتیك شیرین ته مه نی ده بیته 18 سال چهنده پاره ی بۆ

کو ده بیته وه؟ که ته مه نی ده گاته 21 سال چهنده پاره ی بۆ کو ده بیته وه؟

45 **ته کنه لوژیا** نامه یه کی ئه لیکترۆنیت به ده ست گه یشت، تییدا داوای به ختیکی باشت بۆ ده کات، و

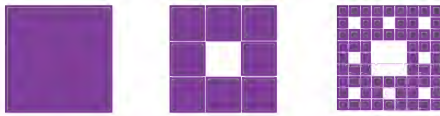
داوای لیکردوی بۆ 5 هاوړپیی بنیريت، و داوا له ههر یه کیکیان بکه یته له لای خویانه وه بۆ 5 هاوړپیی

تری بنیرن و ههروه ها ... پاش 10 دهسته هاوړپیی ژماره ی ئه و نامانه چهندن؟

46 **فراکتال Fractals** مافوری سیربنسکی Sierpinski شیوه یه کی له یه که بووه له سه ر چوارگۆشه یه که

چه سپاوه، له ههر خولی که دا ناوه راستی چوارگۆشه په نگراوه که چوارگۆشه یه کی لیدره ده یینریت،

ههروه که له شیوه که ی خواره ودا دیاره.



ا ئه گهر پروبه یی چوارگۆشه ی یه که م 1 m^2 بیته. یه که به دوای یه کیك بنوسه پروبه یه په نگراوه

ده ستکه و تووه کان له ههر خولی که دا بنوینیت.

ب له کام خولدا پروبه یه په نگراوه که له $\frac{1}{2} \text{ m}^2$ که متر ده بیته.

47 **کاغه ز** ئه ستوری کاغه زی سپی 0.1 mm ده بیته ئه گهر بینوشتنیه وه ئه ستوری یه که ی دووئوه نده ی لیدیت.

ا ئه گهر کاغه زه که به لایه نی زۆره وه 7 جار بنوشتنیه وه ئه ستوری کاغه زه که دوای 7 جار

نوشتاندنه وه چهنده؟

ب وای دابنی ده توانیت به رده وام بیت له نوشتاندنه وه ی کاغه زه که چهنده بته ویت، دوای چهنده جار

ئه ستوری کاغه زه که له به رزایی لوتکه ی ئیقه رست Everest زیاتر ده بیته که ده کاته 8850 m

48 یه که به دوای یه کیکی ژماره یی و یه کیکی ئەندازەیی بدۆزەوه به مه رجیك هه رییه که یان به م شیوه یه

ده ستپیکات $1, 4, \dots$

349 4-6 یه که به دوای یه که کان و زنجیره ئەندازەیییه کان

ده رواریه ک

ئه نتيكه



ئۆتۆمبیلی رولس رویس که هی سه رمایه دار پۆك ئاند رول جون گرانتیرین ئۆتۆمبیل بوو که به 2.2 ملیۆن دۆلار فروشرا.

پېټوانه کانی کاغزهکه	
جور	پېټوانه کانی (به گری)
A	$8\frac{1}{2} \times 11$
B	11×17
C	17×22
D	22×34
E	34×44

49 پېټوانه خشته ی بهرام بهر پېټوانه کانی چند جور کاغزه که زورترین به کار هیانی هیه پرونده کاتهوه.

ا درې ژي و پانی کاغزه که له هر پېټوانه یه که بېشکنه. چ په یوه نډیه که بؤ در ده چیت؟

ب ټو په یوه نډیه ی روه ی کاغزه که له پېټوانه جیا واز کهان پیکه وه ده به ستیته وه کامه یه؟ ټو په یوه نډیه ناوی چیه؟

50 داهاتی به که که له فلیمه سینه مایه کهان له هه فته ی به که می نیشانیدا 60 ملیار دیناره و له هه فته ی سییه ما 9.6 ملیار دیناره، وادابی داهاتی هه فته که ی به که دوا ی به که کی ټه نډا زه یی ده نو یت.

ا داهاتی فلیمه که له هه فته ی دوو ده ما به که مینه.

ب رېژه ی که مکر دنی داهاته کهان له هه فته یه که وه بؤ هه فته یه کی تر چه نده؟

ج پېشینی ده که یه له کام هه فته دا داهاته که ی له یه که ملیار دینار که متر ده ییت.

د نیشان دانی فلیمه که 8 هه فته به رده وام بوو، کو ی داهاتی نیشان دانه که ی چه نده؟

51 زینده زانی جور که له به که تر یا ژماره که ی به پې ی به که دوا ی به کی ټه نډا زه یی زیاده کهات. ژماره ی به که تر یا کهان دوا ی کاتر می ژ که 4 بوو و ده یته 1024 دوا ی 5 کاتر می ژ. ژماره ی به که تر یا کهان پاش دوو کاتر می ژ چه نده؟ پاش 3 کاتر می ژ چه نده؟ پاش 4 کاتر می ژ چه نده؟

52 پاره دان کو مپانیایه که خانوویه کی بؤ باره که ی مانگی به 750 000 دینار بؤ ماوه ی سالی که به که ری گرت، به جور که دوا ی سالی یه که م سالانه 10% ټو پر به زیاده کهات.

ا زنجیره یه که بنووسه بؤ ټو پر به پاره یه ی کو مپانیایه که له ماوه ی 5 سالدا ده یات.

ب هیما ی سرجه م به که ری ټه بؤ نواندنی ټووه ی سالانه کو مپانیایه که له ماوه ی 10 سالدا ده یات، پاشان به هایه که ی بدو زه وه.

پېټوهری ټو ته کهان	
ټو ته	لهر لهر (به هیترز)
C_0	16.35
C_1	32.7
C_2	65.4
C_3	130.8
C_4	

53 میوزیک لهر لهر ی هه نډی که له ټو ته میوزیکیه کهان یه که به دوا ی به که کی ټه نډا زه یی پیکر یت کاتیک C_0 لاواز ترین ټو ته ییت.

ا ټو ته ی C_4 به ټو ته ی ناوه نده بؤ ټم جور ده نریت. لهر لهر که ی چه نده؟

ب یه که به دوا ی به که کی ټه نډا زه یی بنووسه لهر لهر کهانی ټو ته کهان له م جور بنو یت، وایدابی $a_1 = C_1$

ج گوچکه ی مرو ف ده نگیک نابیسیت لهر لهر که ی له 20 000

هیترز زیاتر ییت. خانه ی یه که م ټو ته چه نده که گو ی مرو ف توانای بیستنی نییه؟

54 پزیشکی یه که که له نه خو شخانه کهان له ماوه ی شه پوی بلا و بوونه وه ی ټه نفلو نزا دا 16 توشبووی له هه فته ی یه که ما و 56 ی له هه فته ی دوو ده ما و 196 ی له هه فته ی سییه ما تو مار کرد.

ا یه که به دوا ی به که کی ټه نډا زه یی بنووسه ژماره ی باره کهانی توشبوون به ټه نفلو نزا بنو یت.

ب ټه که ر باره کهانی توشبوون به م شیویه به رده وام بوو، کو ی ژماره ی باره کهانی توشبوون له کام هه فته دا ده گاته 10 000 توشبوو؟

55 بیر کردنه وه ی رهنه گرانه ټه گهر بنچینه r گهره تر ییت له 1. کاریگهر ی له سر یه که به دوا ی به که کی ټه نډا زه یی چی ده ییت؟ کاریگهر ی چی ده ییت ټه گهر $0 < r < 1$ ؟

56 بنووسه چی به سر را ده کهانی یه که به دوا ی به که کی ټه نډا زه یی دا یت، ټه گهر را ده ی یه که می سی ټه وه نده بکریت؟ چی به سر سرجه می را ده کهانی یه که می دا یت؟

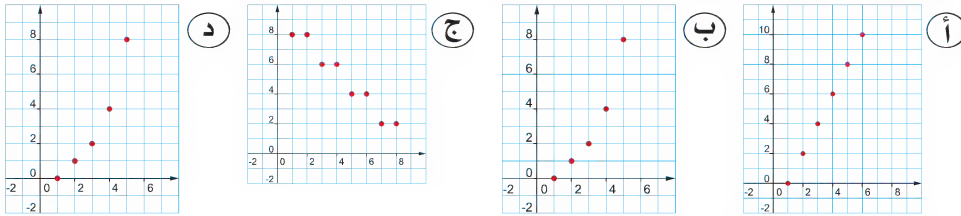


57 كام لەمانەى خوارەو سەرجهى شەش پادەى يەكەمى ئەم يەكەدواى يەكە ئەندازەىيە

$$4.5 + 9 + 18 + 36 + \dots$$

67.5 (ا) 144 (ب) 283.5 (ج) 445.5 (د)

58 كام لەم وێنە پرونكرندەو يەكە وادەردەكەوئىت يەكەدواى يەكەى ئەندازەىيە.



59 كام لەمانە سى پادەى يەكەمى يەكەدواى يەكە ئەندازەىيە $a_9 = -768$ و $a_7 = -192$ دەنوئىت؟

3, -6, 12 (ا) -3, 6, -12 (ج) -3, -6, -12 (د) 3, -12, 48 (ب)

-3, 12, -48, ... (ب) -3, -12, -48 (د) 3, -12, 48 (ج) -3, 6, -12 (ا)

60 كام لەمانە بەهەى ئەم زنجىرەى $10 - 15 + 22.5 - 33.75 + 50.625$ يەكە؟

$$\sum_{k=1}^{k=5} 10 \left(-\frac{3}{2}\right)^k \quad \sum_{k=1}^{k=5} 10 \left(-\frac{3}{2}\right)^{k-1} \quad \sum_{k=1}^{k=5} -10 \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \quad \sum_{k=1}^{k=5} 10 \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$$

بەرەنگارى و فراوانكرن

بژمىرى پرونكرندەو يەكەم پادەى هەريەكەدواى يەكە بدۆزەو بەهاكەى لە مليۆنىك زياترئىت.

$$r = 3.2, a_1 = 0.01 \quad 63 \quad a_1 = \frac{1}{4}, r = 4 \quad 62 \quad r = 2, a_1 = 10 \quad 61$$

64 سەرجهى 3 پادەى دواى يەكە لە يەكەدواى يەكەى ئەندازەىيەى برىتئىيە لە 73.5 و ئەنجامى

لئىكدانئىشان 2744، ئەو پادانە كامانەن؟ ئەمە پرونكەو.

65 ئەو يەكەدواى يەكە ئەندازەىيەى پادەى يەكەمى 55 و بنچىنەكەى $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ بەكاربئە بۆ دۆزىنەو يەكە ئەمانە:

ا) پئىنج پادەى يەكەمى دواى پادەى يەكەم بدۆزەو نزيك كرابئتەو بۆ نزيكترين ژمارەى تەواو.

ب) سەرجهى هەردوو پادەىيەكى دواى يەكە هاتوو هەژماربەكە تئببىنى چى دەكەيت.

ج) دەستەواژەىيەكى تايبەت بەم يەكەدواى يەكە دارپژر.

پیداچوونەو لولپىچى

سفرەكانى نەخشەكە و دەرەكانەكانى بدۆزەو. (پۆلەكانى بئىشو)

$$f(x) = \frac{x^2-16}{4x} \quad 68 \quad f(x) = \frac{x+5}{x^2-x-6} \quad 67 \quad f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+1} \quad 66$$

69 بازار يەكە لە كۆگا گەورەكان داشكاندئىكى بە پئژەى 20% لەسەر كەلوپەلەكانى بۆ ماوەى

مانگىك دانا. داشكاندئىكى زىادەى بەپئژەى 10% بۆ پۆژانى دووشەممە زىادكر. (وانەى 3-5)

ا) نەخشەىيەكى ئاوئتە بنووسە نرخى كالای پۆژى دووشەممە بەپئى نرخە بنەرەتئىيەكە x بنوئىت.

ب) بئنا پۆژى دووشەممە جلىكى كرى ئەگەر نرخى بنەرەتى جەكە 275000 دینار بئت پئوئستە

چەند پارە بدات؟

دە پادەى يەكەمى هەريەكە لەم يەكەدواى يەكە ژمارەىيەنە بدۆزەو. (وانەى 3-6)

$$1.7, 7.3, 12.9, 18.5, 24.1, \dots \quad 71 \quad 78, 65, 52, 39, 26, \dots \quad 70$$

$$16.4, 26.2, 36, 45.8, 55.6, \dots \quad 73 \quad 9.42, 9.23, 9.04, 8.85, 8.66, \dots \quad 72$$

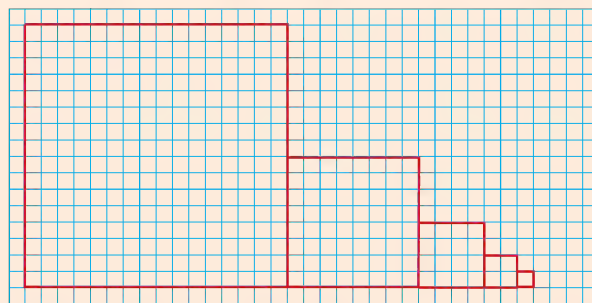
دۆزىنەۋەى زنجىرە ئەندازەيىە دوا نەھاتوۋەكان



دەتوانىت بەھۋى يەكەدۋاى يەكى چوارگۆشەكان زنجىرە ئەندازەيىە دوا نەھاتوۋەكان بدۆزەيتەۋە.

چالاکى 1

- 1 لەسەر كاغەزى ھېلى پروونكردنەۋەيى، چوارگۆشەيەك درىژى لايەكى 16 يەكە بىت دروستبەكە. سەرنجىدە چىۋەكەى 64 يەكە دەبىت.
- 2 لە يەكەكە لە گۆشەكانى ئەو چوارگۆشەيەى دروستكردە. لە تەنىشتەۋە دەستبەكە بە دروستكردى چوارگۆشە كە درىژى لايەكانى يەك لەدۋاى يەك 8 و 4 و 2 و 1 بن.



سەرچەمى كەلەكەبوۋ	چىۋەكەى	درىژى لايەكى چوارگۆشەكە
64	64	16
96	32	8
		4
		2
		1
		$\frac{1}{2}$

- 3 خشتەى بەرامبەر دروستبەكەۋە شەش پىزى يەكەمى بە تۆماركردى چىۋەى چوارگۆشەكان لە ستونى دوۋەمدا و سەرچەمى كەلەكەبوۋى چىۋەكان لە ستونى سىيەمدا تەۋابەكە.
- 4 ھىماى سەرچەم بۆ نووسىنى زنجىرەى ئەندازەيى بەكاربىنە چىۋەكان بنوئىت.
- 5 بژمىرى پروونكردنەۋەيى بۆدۆزىنەۋەى سەرچەمى بىست پادەى يەكەم بەكاربىنە
- 6 دەستەۋاژەيەك بنووسە دەربارەى سەرچەمى كەلەكەبوۋى چىۋەكان ئەگەر بەردەوام بىت لە دروستكردى چوارگۆشەكان تا ناكۇتا.
- 7 بەھاي بېرى $\frac{64}{1-\frac{1}{2}}$ بدۆزەۋە پەيۋەندى چىيە لەنيۋان ئەۋەى كە دۆزىتەۋە لەگەل ۋەلامى پرسىارى 5 ؟

ھەۋلەدە

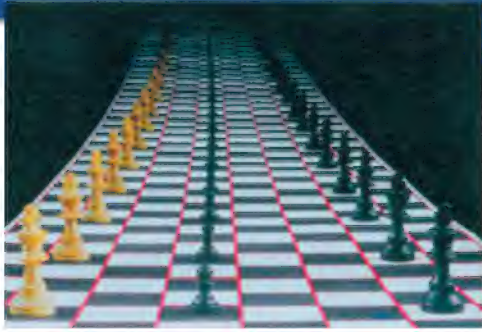
سەرچەمى كەلەكەبوۋ	پروۋىر	درىژى لايەكى چوارگۆشەكە
		16
		8
		4
		2
		1
		$\frac{1}{2}$

- 1 خشتەى بەرامبەر دروستبەكەۋە، بە دۆزىنەۋەى پروۋەرى چوارگۆشەكان و سەرچەمى كەلەكەبوۋى پروۋەركەن تەۋاۋى بەكە.
- 2 ھىماى سەرچەم بۆ نووسىنى زنجىرەى ئەندازەيى بەكاربىنە كە سەرچەمى پروۋەركەن بنوئىت.
- 3 بژمىرى پروونكردنەۋەيى بۆدۆزىنەۋەى سەرچەمى دە پادەى يەكەم بەكاربىنە.
- 4 دەستەۋاژەيەك بنووسە دەربارەى سەرچەمى كەلەكەبوۋى پروۋەركەن بنووسە ئەگەر بەردەوام بىت لە دروستكردى چوارگۆشەكان تا ناكۇتا.
- 5 بەھاي بېرى $\frac{256}{1-\frac{1}{4}}$ بدۆزەۋە پەيۋەندى لەنيۋان ئەۋەى دۆزىتەۋە لەگەل پرسىارى 3 دا چىيە؟
- 6 پوختەى نەنجام ياسايەك بۆ ھەژماركردى بەھاي زنجىرەيەكى ئەندازەيى دوانەھاتوۋ بنووسە بەھاي پوتى بنچىنە 1 لە كەمترىت و لەسفرگەۋرەترىت.

بەشى 6 يەكەدۋاى يەكەكان و زنجىرەكان

دەرئەنجامی بیرکاری

Mathematical Induction



بوچی ئەمە فیژدەبین؟

دەتوانیت زنجیرەى ئەندازەیی دوا نەهاتوو
بەکاربێنیت بۆ دۆزینەوێ شێوازەکانی
دوبارەبووێ (پرسیاری 58)

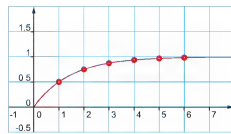
ئامانجەکان

- بەهای زنجیرەى ئەندازەیی دوا نەهاتوو دەدۆزیتەوێ
- دەرئەنجامی بیرکاری بۆ سەلماندنی دەستەواژەکان بەکاردهێنێت.

لەوانەى پێشودا فیژى ئەو بووێت چۆن بەشە کۆمەلەکانی زنجیرەى ئەندازەیی دوا هاتوو بدۆزیتەوێ. لەم وانەیدا فیژى دۆزینەوێ سەرچەمى ئەندازەیی دوا نەهاتوو دەبێت.
زنجیرەى ئەندازەیی دوا نەهاتوو **Infinite geometric series** بریتییە لە ژمارەیهکی دوانەهاتوو پادە، تەماشای ئەم دوو زنجیرە ئەندازەییە دوانەهاتووانەى خوارەوێ بکە.

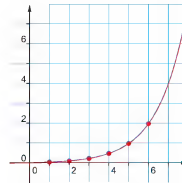
$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

سەرچەمى بەشەکان						
n	1	2	3	4	5	6
S_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{63}{64}$



$$R_n = \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \dots$$

سەرچەمى بەشەکان						
n	1	2	3	4	5	6
R_n	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{63}{32}$



زاراوەکان

Vocabulary

زنجیرەى ئەندازەیی ناکوژتا
Infinite geometric series

لیکنزیکبوو
(توافقیة، تقاربیة)
Convergent

ئامانج
Limit

لیکدوورکەوتوو
(تخالفیة، تباعدیة)
Divergent

دەرئەنجامی بیرکاری
Mathematical Induction

تییینی ئەو بکە لە زنجیرەى ئەندازەیی S_n بنچینەکە یەكسانە بە $\frac{1}{2}$ سەرچەمى پادەکان نزیك دەبێتەوێ
لە 1. تا بەهاکانی n گەورەتر بێت، کاتێک $|r| < 1$ ئەوا سەرچەمى بەشەکانی زنجیرە ئەندازەییەکە
نزیكەبێتەوێ لە ژمارەیهکی دیاریکراو کاتێک بەهای n زیادبکات. لەم بارەدا دەوترێت زنجیرەکە
لیکنزیکبوونە **Convergent**، ئەو ژمارەیه ئامانجی **Limit** زنجیرەکەیه.

کارەکە لە زنجیرەى R_n دا جیاوازه کاتێک $|r| \geq 1$ و بەهاکانی n زیادبکات. بەهاکانی سەرچەمە
بەشەکان زیاد دەکات. هەموو ژمارەکان تێدەپەرێنێت لەم بارەدا زنجیرەکە لیکدوورکەوتنە **Divergent**

1 نموونە

جیاکردنەوێ زنجیرە ئەندازەییە لیکنزیکبوونەکان و لیکدوورکەوتوونەکان

دیاریبکە زنجیرە ئەندازەییەکە لیکنزیکبوونە یان لیکدوورکەوتنە.

ب $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$
 $|r| < 1; r = \frac{1}{3}$

زنجیرەکە لیکنزیکبوونە سەرچەمى هەیه

ا $20 + 24 + 28.8 + 34.56 + \dots$
 $|r| \geq 1; r = \frac{24}{20} = 1.2$

زنجیرەکە لیکدوورکەوتنە سەرچەمى نییه

1. دیاریبکە زنجیرە ئەندازەییەکە لیکنزیکبوونە یان لیکدوورکەوتنە.

ب $32 + 16 + 8 + 4 + 2 + \dots$

ا $\frac{2}{3} + 1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \dots$



ئەگەر زنجىرى ئەندازىيى لىكئىزىكبوونە دەتوانىت سەرجه مەكەى ھەژمار بکەيت. به گەرانه وه بۇ زنجىرى $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$ ياساى سەرجه مەكەى ئەندازىيى

به کاربېنه $r = \frac{1}{2}$ و $a_1 = \frac{1}{2}$

$$S_n = a_1 \left(\frac{1-r^n}{1-r} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \right) = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

به وېنهى پروونكرندنه وهى نهخشهى $S(n) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ بنوېنه سەرنجبدە بهها $S(n)$ نژىكدهبېتته وه له 1 هەرچەند بههاى n گه وره تر بېت. هەتا n نژىكدهبېتته وه له ناكوٹاى موجب $+\infty$ ، $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ له سفر نژىكدهبېتته وه ئەمەش ئەوه دهگه يه نېت سەرجه مەكەى زنجىره كه دهكاتە 1. له مەشه وه دەتوانرېت ئەم چه مەكه بهگشتى بۇ هەموو زنجىره ئەندازىيه لىكئىزىكبووه كان به به کاره ينانى هەژماركردى جياكارى و تهواو كارى بسەلمېنرېت.

سەرجه مەكەى زنجىره ئەندازىيه دوا نه هاتووكان

ئەگەر بنچينهى يەكبه دواى يەككى ئەندازىيى دوا نه هاتوو r بېت و پاسادانى مەرجه

$|r| < 1$ بكات. ئەوا زنجىره كه لىكئىزىكبوونه و سەرجه مەكەى برىتتیه له

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

كاتىك a_1 رادهى يەكەم و r بنچينه مەكەى بېت.



دۆزىنه وهى سەرجه مەكەى زنجىره يەككى ئەندازىيى دوا نه هاتوو

سەرجه مەكەى زنجىرهى ئەندازىيى دوا نه هاتوو بدۆزه وه (ئەگەر سەرجه مەكەى هەبوو).

ا $5 + 4 + 3.2 + 2.65 + \dots$

زنجىره كه لىكئىزىكبوونه چونكه $|r| < 1$

ياساى سەرجه مەكەى

له جياتى دابنى

$r = 0.8$

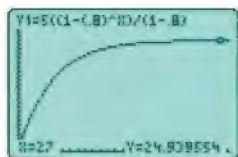
$S = \frac{a_1}{1-r}$

$S = \frac{5}{1-0.8} = \frac{5}{0.2} = 25$

پاسادان بکه وېنهى پروونكرندنه وهى نهخشهى

به به کاره ينانى بژمېرى پروونكرندنه وهى $y = 5 \left(\frac{1-(0.8)^x}{1-0.8} \right)$

بکېشه. دهردهكه وېت بههاى y له 25 نژىكدهبېتته وه.



ب $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{k-1}}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{k-1}} = \frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots$

زنجىره كه لىكئىزىكبوونه چونكه $|r| < 1$

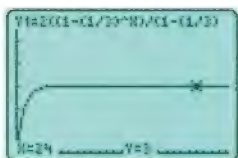
ياساى سەرجه مەكەى

$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = \frac{6}{2} = 3$

پاسادان بکه وېنهى پروونكرندنه وهى نهخشهى $y = 2 \left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^x}{1-\frac{1}{3}} \right)$

به به کاره ينانى بژمېرى پروونكرندنه وهى

بکېشه. دهردهكه وېت بههاى y له 3 نژىكدهبېتته وه.



2. سەرجه مەكەى زنجىرهى ئەندازىيى دوا نه هاتوو بدۆزه وه (ئەگەر سەرجه مەكەى هەبوو)

ب $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^k$

ا $25 - 5 + 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \dots$



دەتوانیت زنجیره ئەندازەییە دوا نەهاتووێکان بۆ نووسینی ژمارەیی پێژەیی دەوری بەشیووی کەرت بەکاربەھێنیت

3 نمونە

نووسینی ژمارەیی پێژەیی دەوری بەشیووی کەرت

ژمارە 0.232323... وە کەرت بە سادەترین شیو بنووسە.

هەنگاوی 1 ژمارە بەشیووی زنجیرهیی ئەندازەیی دوا نەهاتوو بنووسە.

0.232323... = 0.23 + 0.0023 + 0.000023 + ... **شیوازیك** بۆ نووسینی زنجیره بەکاربێنە

هەنگاوی 2 بنچینە بدۆزەو.

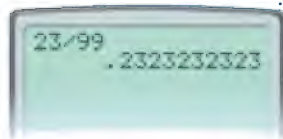
$$r = \frac{0.0023}{0.23} = \frac{1}{100} = 0.01$$

هەنگاوی 3 سەرچەم بدۆزەو.

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0.23}{1-0.01} = \frac{0.23}{0.99} = \frac{23}{99}$$

پاسادان بکە بژمێر بۆ دابەشکردنی

23 بەسەر 99 دا بەکاربێنە.



لەبەرت بێت

بیرت بێت هەر ژمارەییەکی دەوری وە 0.232323... یان 0.23 ژمارەییەکی پێژەییە و دەتوانی بەشیووی کەرت بینووسی.

3. ژمارە 0.111... وە کەرت بە سادەترین شیو بنووسە.



بۆ دۆزینەووی سەرچەمەکان زنجیرهکان بەکارهێنا. وە کە سەرچەمی ژمارە تەواوکان لە 1 تا 100. دەتوانیت یاسا بەکارهاتووێکان بۆ دۆزینەووی ئەم چۆرە سەرچەمانە بە یەکیک لە پێگاکانی سەلماندن لە بیرکاریا بسەلمێنیت ئه‌ویش سەلماندنە بەپێگای

Mathematical induction بیرکاری

سەلماندن بە درێنجامی بیرکاری

بۆ سەلماندن پاستی دەستەواژەیک بۆ هەر بەهایەکی سروشتی n ئەم هەنگاوانە پەیرەو بکە:

هەنگاوی 1 پاسادانی باری یەکەم بکە: پوونیکه‌وه یاساکە راستە کاتیك $n = 1$

هەنگاوی 2 وایدابنی دەستەواژەیک راستە کاتیك $n = k$

هەنگاوی 3 بیسەلمێنە دەستەواژەیک راستە کاتیك $n = k + 1$



4 نمونە

سەلماندن بە درێنجامی بیرکاری

دەرئەنجامی بیرکاری بەکاربێنە بۆ سەلماندن $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

هەنگاوی 1 پاسادانی باری یەکەم بکە، پوونیکه‌وه دەستەواژەیک راستە کاتیك $n = 1$

$$1 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

دەستەواژەیک راستە کاتیك $n = 1$

هەنگاوی 2 وایدابنی دەستەواژەیک راستە کاتیك $n = k$

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

لە جیاتی n ، k دابنی

هنگامی 3 بیسملینه دسته‌واژه که راسته کاتیک $n = k + 1$

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

4. در نه‌نجامی بیرکاری به‌کار بیته بۆ سه‌لماندنی سه‌رجه‌می ژماره سرشتیه

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

ه‌ندیک دسته‌واژه وا در ده‌که‌ویت راست بیته له زور باردا به‌لام ته‌نها نه‌مه به‌سنیه بیته‌وهی بووتریت دسته‌واژه که له‌ه‌موو باریکدا راسته. بیته‌وهی بیسملینین دسته‌واژه که چه‌وته، دژه نمونه‌یه که به‌ینه‌وه وا له دسته‌واژه که بکات ناراست بیته له‌یه که باردا.



نمونه 5

دۆزینه‌وهی سه‌رجه‌می زنجیره‌ی نه‌ندازه‌یی

دژه نمونه‌یه که بیته‌وه ناراستی $2^n \geq n^2$ در بخت کاتیک n ژماره‌یه‌کی راستی بیته.

$$2^0 \geq (0)^2 \quad 2^1 \geq (1)^2 \quad 2^4 \geq (4)^2 \quad 2^{-1} \geq (-1)^2$$

$$1 \geq 0 \quad 2 \geq 1 \quad 16 \geq 16 \quad \frac{1}{2} \geq 1$$

که‌واته $2^n \geq n^2$ چه‌وته کاتیک $n = -1$ نه‌مه‌ش نه‌وه ده‌گه‌یه‌نیته دسته‌واژه‌ی به‌های n هر ژماره‌یه‌کی راستی بیته چه‌وته.

پۆشنایی

له‌بیرت بیته که دۆزینه‌وهی زۆربه‌ی دژه نمونه‌کان به به‌کاره‌ینانی ژماره‌ی تایبه‌تی وه‌ک 0 و 1 ژماره‌ی سالبه‌کان یان که‌رتنه‌کان ده‌کریته.

5. دژه نمونه‌یه که بیته‌وه ناراستی $\frac{a^2}{2} \leq 2a + 1$ در بخت کاتیک a هر ژماره‌یه‌کی

راستی بیته.



بیرکه‌وه و وتووێژکه

- چۆن نه‌وه دیاریده‌که‌ی که زنجیره‌یه‌کی نه‌ندازه‌یی دوا نه‌هاتوو لیکنزیک‌بوونه یان لیکن‌دورکه‌وته.
- چۆن ژماره‌ی پێژه‌یی ده‌وری 0.83 ده‌گۆریت بۆ زنجیره‌ی نه‌ندازه‌یی دوا نه‌هاتوو.
- پیکه‌ربه خسته‌که دروستبکه و ته‌واوی بکه، جۆره‌ی جیاوازه‌کانی زنجیره‌ی نه‌ندازه‌یه‌ی دوا نه‌هاتوو کهان به‌پوخته‌یی باسکه.



نمونه	بنچینه	سه‌رجه‌م
زنجیره‌ی لیکنزیک‌بوو		
زنجیره‌ی لیکن‌دورکه‌وتوو		

راهینانی ئاراسته‌کراو

1 زاروده‌کان زنجیره‌ی ئەندازەیی دوا نەهاتوو کە بەه‌ای پادەکانی لە ژمارەیه‌کی دیاریکراو نزیکدەبێتەو له‌گەڵ زیادبوونی به‌ای n بریتییه‌له زنجیره‌یه‌کی _____؟ (لیکنزیکبوونه یان لیکدوورکه‌وتنه)

دیاریبکه ئایا زنجیره ئەندازەییە دوا نەهاتوو کە لیکنزیکبوونه یان لیکدوورکه‌وتنه.

2 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$ 3 $1 - 5 + 25 - 125 + \dots$ 4 $27 + 18 + 12 + 8 + \dots$

2 سەرجه‌می زنجیره ئەندازەیی دوا نەهاتوو بدۆزوه (ئەگەر سەرجه‌می هه‌بوو)

5 $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \dots$ 6 $\sum_{k=1}^{\infty} 4(0.25)^k$ 7 $800 + 200 + 50 + \dots$

3 ژماره دەوریه‌که وه‌ک کەرتیک به سادەترین شیوه بنووسه.

8 $0.888\dots$ 9 $0.\overline{56}$ 10 $0.131313\dots$

4 دەرئەنجامی بیرکاری به‌کاربێنه بۆ سه‌لماندنی سەرجه‌می ژماره جووته‌کان که پاسادانی

11 $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = n(n+1)$ ده‌کهن.

5 دژه نمونه‌یه‌ک بدۆزوه ناپاستی ده‌سته‌واژه‌که ده‌ریخات کاتی‌ک n هەر ژماره‌یه‌کی پاستی بیت.

12 $n^4 \geq 1$ 13 $\log n > 0$ 14 $n^3 \leq 3n^2$

راهینان وشیکارکردنی پرسیاره‌کان

دیاریبکه ئایا زنجیره ئەندازەیی کۆتایی نەهاتوو لیکنزیکبوونه یان لیکدوورکه‌وتنه.

15 $3 + \frac{3}{5} + \frac{3}{25} + \frac{3}{125} + \dots$ 16 $5 + 10 + 20 + 40 + \dots$ 17 $2 - 4 + 8 - 16 + \dots$

سەرجه‌می زنجیره ئەندازەیی کۆتایی نەهاتوو بدۆزوه (ئەگەر سەرجه‌می هه‌بوو)

18 $\sum_{k=1}^{\infty} 60\left(\frac{1}{10}\right)^k$ 19 $\frac{8}{5} - \frac{4}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \dots$ 20 $\sum_{k=1}^{\infty} (3.5)^k$

ژماره دەوریه‌که وه‌ک کەرتیک به‌سادەترین شیوه بنووسه.

21 $0.\overline{6}$ 22 $0.90909\dots$ 23 $0.541541541\dots$

24 دەرئەنجامی بیرکاری به‌کاربێنه بۆ سه‌لماندنی $\frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{3(4)} + \frac{1}{4(5)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

دژه نمونه‌یه‌ک بهێتەوه که ناپاستی ده‌سته‌واژه‌که ده‌ریخات کاتی‌ک n ژماره‌ی پاستی بیت.

25 $n^3 \neq -n^2$ 26 $n^4 > 0$ 27 $5n^2 > 2^n$

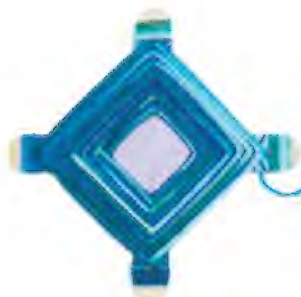
28 هه‌له له شیکردنه‌وه له خواره‌وه دوو وه‌لام هه‌یه بۆ دۆزینه‌وه‌ی سەرجه‌می زنجیره ئەندازەیی دوا نەهاتوو $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \dots$ کامیان هه‌له‌یه؟ هه‌له‌که دیاریبکه.

راهینانی نازاد

بوشیکارکردنی پرسیاره‌کان	تەماشای نموونه‌بکه
1	17-15
2	20-18
3	23-21
4	24
5	27-25

ب
سەرجه‌می نه‌و
زنجیره‌یه نییه.

ا
$S = \frac{1}{1-2} = -\frac{1}{5}$



29 هونەر هونەر مەندىك تابلۆيەكى مەزنى دروستكرد له چەند چوارگۆشەيەك

پيکھاتبوو. هەر يەكکيان دەکوتە ناو ئەوى تريانەووە بۆ دروستکردنى چوارگۆشەکان داویکی بەکارهێنا دريژى لایەکی گەرەتيرين چوارگۆشە 8m بوو. دريژى لایەکی هەر چوارگۆشەيەکی ناووە يەکسان بوو بە 90% ى دريژى لایەکی ئەو چوارگۆشەيە لێناويدايە. وايدابنى هونەر مەندەکە توانای ئەوێ هەيە چوارگۆشەکانى ناووە تا دوانەهاتوو دروستیکات. هونەر مەندەکە چەند مەترى داو پيوستە؟ (بەهۆى زنجيرە ئەندازەيى ناکۆتا شۆوازەکە بنويّنه) سەرجهمی زنجيرە ئەندازەيى دوا نەهاتوو بدۆزەو (ئەگەر سەرجهمی هەبوو)

$$500 + 400 + 320 + \dots \quad 31$$

$$215 - 86 + 34.4 - 13.76 + \dots \quad 30$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} -5 \left(\frac{1}{8}\right)^{k-1} \quad 33$$

$$8 - 10 + 12.5 - 15.625 + \dots \quad 32$$

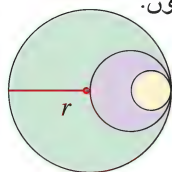
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^{k-1} \quad 35$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \quad 34$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 200(0.6)^{k-1} \quad 37$$

$$-25 - 30 - 36 - 43.2 - \dots \quad 36$$

38 ئەندازە سەرنجى شۆازى وێنەکەى بەرامبەر بده بازنەکان يەك لەناو يەکتەر کيشراون.



بەجۆرێك نيوەتيرەى هەر بازنەيەك نيوەى نيوەتيرەى ئەو بازنەيە بێت كە تيايەتى.

أ زنجيرەيەكى ئەندازەيى كۆتايى نەهاتوو بەپيى r بنووسە چيوەکانى

ئەو بازنانە بنويّيت، پاشان سەرجهمەکەى بدۆزەو.

ب سەرجهمی چيوەکانى بازنەکان بدۆزەو. ئەگەر نيوەتيرەى بازنە مەزنەکە 3 cm بێت.

ژمارەى دەورى وەك كەرت بەسادهترين شيوە بنووسە.

$$0.12\overline{3} \quad 41$$

$$0.\overline{9} \quad 40$$

$$0.\overline{4} \quad 39$$

$$0.05\overline{4} \quad 44$$

$$0.\overline{5} \quad 43$$

$$0.1\overline{8} \quad 42$$

45 ميوزيك لەم سالانەى دايدا داواكارى لەسەر كړينى CD

ميوزيك كەمى كرد. بەهۆى زيادبوونى دۆسيى مۆزيكى لە ئينتەرنېتدا. دەتوانرېت ژمارەى CD يە فرۆشراوەکان لە سالى 2001 هەو بەهۆى يەكېدواى يەكکى ئەندازەيى بنويّيرت.

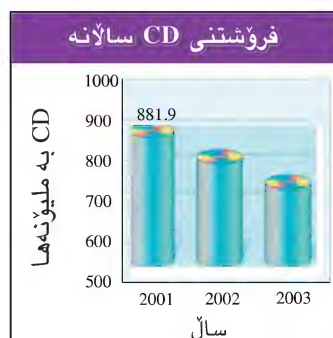
أ ژمارەى CD يە فرۆشراوەکانى سالى 2010 بخەملێنه

ب ژمارەى CD يە فرۆشراوەکان لە سالى 2001 تا 2010 بخەملێنه.

ج وايدابنى يەكېدواى يەكە ئەندازەيى بەر دەوام

دەبېت تا ناکۆتا ژمارەى ئەو CD يانەى

لەسەرەتاي سالى 2001 هەو فرۆشراوە چەندە؟



دەرئەنجامى بىرکارى بەکاربێتە بۆ سەلماندنى هەر دەستەواژەيەك.

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \quad 46$$

$$1 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \quad 47$$

$$1(2) + 2(3) + 3(4) + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad 48$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad 49$$

50 سینه ما داهاتی یه کیک له فلیمه سینهماییه کان له ههفته ی یه که می نیشانیدا 20 ملیار دیناره. له ههفته کانی داهاتوودا به پړه ی 40% که مده کات.

ا یه که به دوا ی یه کیک ئه اندازه ی بنووسه داهاتی فلیمه که له ههفته یه کدا بنوینیت.

ب سهرجه می داهاتی فلیمه که له شمش ههفته ی یه که می نیشانیدا بدۆزه.

ج ئه گهر نیشاندانی فلیمه که تا ناکۆتا بهردهوام بوو گوژمه ی داهاتی فلیمه که چهند ده بیت؟

51 پالەوانیتی له شجوانی له یه کیک له پالەوانیتییه کانی له شجوانی خه لاتیک ی گهرهت بردهوه، دوو

رینگایان بو دانای بو وهرگرتنی خه لاته که ت: یه که ملیون دینار له مانگی یه که مدا وهربرگیت له گهل

مانگانه یه که به هاکی نیوه ی ئه و پاره یه مانگی پیشو بویت. یان مانگانه

100 000 دینار بو ماوه ی 20 مانگ وهربرگیت کام ریکا هله دبژیریت.

بوهر دهسته واژه یه که دژه نمونه یه که بدۆزه کاتیک x ژماره یه که راستی بیت.

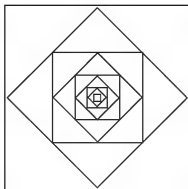
52 $\frac{x^4}{x^3} \leq 2x$ **53** $x^4 - 1 \geq 0$ **54** $\ln x^5 > \ln x$

55 $2x^2 \leq 3x^3$ **56** $2x^2 - x \geq 0$ **57** $12x - x^2 > 25$

58 ئه اندازه دریزی لایه کی چوارگۆشه گهره که 12 m و سهره کانی ههر

چوارگۆشه یه کی ناوه و ناوه راستی لایه کانی ئه و چوارگۆشه یه که ده که ویته

ناویه وه. وایدابنی کرداری دروستکردنی چوارگۆشه کان تا ناکۆتا بهردهوامه.



ا چیه ی چوارگۆشه ی دووه م بدۆزه وه.

ب سهرجه می چیه ی هه موو چوارگۆشه کان بدۆزه وه.

ج سهرجه می پویه ری هه موو چوارگۆشه کان بدۆزه وه.

د له باریکدا دریزی لایه کی چوارگۆشه که S بیت، سهرجه می چیه کان به به کاره یانی

هیمای سهرجه م بنووسه ئه م کاره له گهل سهرجه می پویه ره کان دووباره که وه.

ه کام دوو زنجیره به خیرایی که مده کات، سهرجه می چیه کان یان سهرجه می پویه ره کان؟

چۆن ئه مهت زانی.

59 بیرکردنه وه ی ره خه گرانه بهراورد له نیوان سهرجه می به ش S_n بو زنجیره ئه اندازه ی دوا

نه هاتوو و سهرجه می گشتیه که یدا بکه، کاتیک $a_1 > 0$ و $r = \frac{4}{5}$ کامیان گهره تره؟ ئایا گوړان له

کاره که دا ده بیت ئه گهر $a_1 < 0$. ئه مه پرونکه وه.

60 بنووسه جیاوژای له نیوان نووسینی سهرجه می به ش S_n بو زنجیره ئه اندازه ی دوا نه هاتوو و

سهرجه می گشتیدا چیه؟

ناماده کردن بۆ تاشیکردنه وه



61 کام زنجیره ئه اندازه ییه دوا نه هاتوو لیکنزیکبوه وه یه؟

ا $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^k$ **ب** $\sum_{k=1}^{\infty} 5\left(\frac{1}{4}\right)^k$ **ج** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4}(5)^k$ **د** $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k (5)^k$

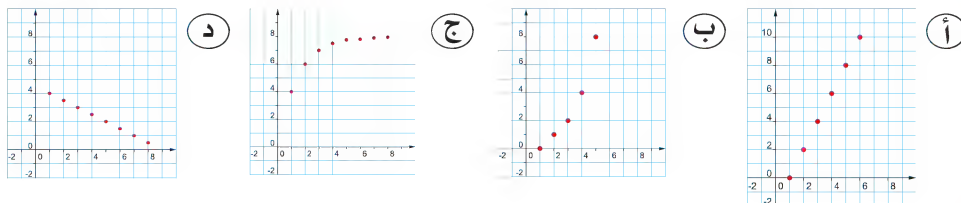
62 سهرجه می ئه م زنجیره ئه اندازه ییه دوا نه هاتوو $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$ کامه یه؟

ا 2 **ب** $\frac{2}{3}$ **ج** $\frac{1}{2}$ **د** $\frac{1}{3}$

63 زنجیره ئه اندازه ییه کی دوا نه هاتوو سهرجه مه که ی 180 بیت و بنچینه که ی $r = \frac{2}{3}$ راهی یه که می چهنده؟

ا 60 **ب** 120 **ج** 270 **د** 540

64 كام لەم وێنە پونکردنەوهییانە زنجیرەى ئەندازەیی دوا نەهاتووی لیکنزیکبوو دەنوینین؟



65 درێژە وەلام بۆ سەلماندنی $3 + 5 + \dots + (2n+1) = n(n+2)$ دەرئەنجامی بیرکاری بەکاربێنە هەرچی دەیکەیت نیشانبدە.

بەرەنگاری و فراوانکردن

ژمارەى دەورى وەك كەرتێك بە سادەترین شیۆه بنووسە.

66 $0.1\overline{6}$ 67 $0.41\overline{6}$ 68 $0.528\overline{6}$

69 بیرکردنەوهى رەخنەگرانه ئایا دگونجیّت زنجیره ژمارهیهکی دوا نەهاتوو سەرجهمەکی له کۆتایی دیاریکراو نزیکیّتەوه، هەروەك لەهەندێك زنجیره ئەندازەییە دوا نەهاتووکاندا هەیه؟ وەلامەكەت پوونبکەوه.



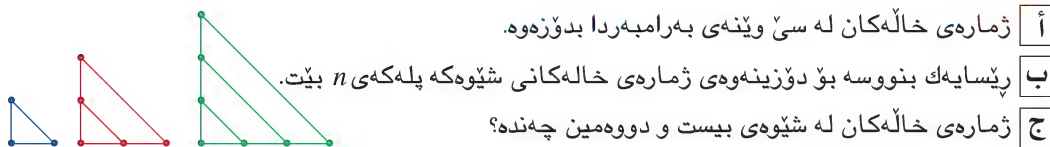
70 ئەندازه درێژی لایهکی چوارگۆشه گەورەكە 12 m سەرەکانی هەر چوارگۆشهیهکی ناووه له ناوهراستی ئەو چوارگۆشهیهدا دەبێت كه له ناویداوه. وایدابنێ ئەم کرداره له دروستکردنی چوارگۆشهکاندا تا ناکۆتا بەردەوام دەبێت. سەرئەنجامی ئەوه بده وێنەكه هێڵێکی لولپێچی سپی و پووبەرێکی لولپێچی شین دەردهخات.

- ا سەرجهمی زنجیرهیهکی ئەندازەیی دوا نەهاتوو بۆ دۆزینهوهی درێژی هێڵە شینەكە بەکاربێنە.
 ب سەرجهمی زنجیرهیهکی ئەندازەیی کۆتایی نەهاتوو بۆ دۆزینهوهی پووبەری ناوچه شینەكە بەکاربێنە.
 ج ئایا ئەو وەلامەى له لقی ب دا دەستکەوتوووه گونجاوه؟ وەلامەكەت پوونبکەوه.

پیداچوونەوهی لولپێچی

71 تۆپی پی گۆلکەری یانەى پێشمەرگه بۆ تۆپی پی 80% ی لیدانی راستەوخۆ گۆل دەکات گۆلکەرەكە پێنج لیدانی راستەوخۆ لیدەدات. ئەگەری ئەوهى به لایەنى كەمەوه 4 لیدان گۆل بێت چەندە؟ (پۆلهکانی پێشوو)

72 ئەندازه شیوازەكەى بەرامبەر بەکاربێنە (وانەى 6-3)



دیاریبکە یەكبه‌ودای یەكەكە ژماره‌یه‌یه‌ یان ئەندازە‌یه‌یه‌ بنچینه‌ی ژماره‌یه‌یه‌كەى و بنچینه‌ی ئەندازە‌یه‌یه‌كە بدۆزه‌وه‌ ئەگەر توانرا (وانە‌ى 4-6)

74 $\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, 4, \frac{16}{3}, \dots$ 73 $297, 99, 33, 11, \dots$
 76 $4, 4.8, 5.76, 6.912, \dots$ 75 $25, 100, 250, 1000, \dots$

پىنچ رادەى يەكەمى ھەر يەكەدواى يەككە بدۆزەو.

$$a_n = n - 9 \quad 1$$

$$a_n = \frac{1}{2} n^2 \quad 2$$

$$a_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1} \quad 3$$

$$a_n = a_{n-1} - 2 \text{ و } a_1 = 55 \quad 4$$

$$a_n = \frac{1}{5} a_{n-1} \text{ و } a_1 = 200 \quad 5$$

$$a_n = -3a_{n-1} + 1 \text{ و } a_1 = -3 \quad 6$$

رېسايەك بۇ رادەى n لە ھەريەكەدواى يەككە بدۆزەو.

$$-4, -8, -12, \dots \quad 7$$

$$5, 20, 80, 320, \dots \quad 8$$

$$-24, -19, -14, -9, \dots \quad 9$$

$$27, 18, 12, 8, \frac{16}{3}, \dots \quad 10$$

ودرزى ياريكەرىكى تۆيى سەبەتە لە بەرزايى

3.2m تۆيىكى فرېدا و دواى بەر زەوى كەوتنى تا

بەرزايى 70% ى بەرزىيەكەى پېشوى بەرزبەو

بەو شىوہە تۆپەكە چەند بەرزەبېتەو؟ لە جارى

چوارەم و نۆيەمدا چەند بەرز دەبېتەو؟

زنجيرەكە بکەو و سەرجمەكەى ھەژمارىكە.

$$\sum_{k=1}^{k=4} k^2 (-1)^k \quad 12$$

$$\sum_{k=1}^{k=5} (0.5k + 4) \quad 13$$

$$\sum_{k=1}^{k=5} (-1)^{k+1} (2k-1) \quad 14$$

$$\sum_{k=1}^{k=4} \frac{5k}{k^2} \quad 15$$

سەرجمەى زنجيرەكە ھەژمارىكە.

$$\sum_{k=1}^{k=8} (-5) \quad 16$$

$$\sum_{k=1}^{k=10} k^2 \quad 17$$

$$\sum_{k=1}^{k=12} k \quad 18$$

پارەدان سەردار خانوويەكى بە قىست كرى. قىستى

مانگانەكەى 1 150 000 دینارە دواى دوو سال چەندى

پارە داو؟ دواى 15 سال چەند پارەدەدات؟

رادەى يازدەھەم لەھەر زنجيرە ژمارەيەك بدۆزەو.

$$23, 19, 15, 11, \dots \quad 20$$

$$\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1, \frac{7}{5}, \frac{9}{5}, \dots \quad 21$$

$$-9.2, -8.4, -7.6, -6.8, \dots \quad 22$$

$$a_4 = 5 \text{ و } a_3 = 1.5 \quad 23$$

$$a_8 = 21 \text{ و } a_6 = 47 \quad 24$$

$$a_9 = 13 \text{ و } a_5 = -7 \quad 25$$

سەرجمەى داواکراو لەھەر زنجيرە ژمارەيەك بدۆزەو.

$$S_{18} \text{ لە زنجيرەى } -1 - 5 - 9 - 13 - \dots \quad 26$$

$$S_{12} \text{ لە زنجيرەى } \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{6} - \dots \quad 27$$

$$\sum_{k=1}^{k=15} (-14 + 3k) \quad 28$$

$$\sum_{k=1}^{k=15} \left(\frac{3}{2}k + 10\right) \quad 29$$

پاشەكەوتکردن لىندا لەسەرەتاي سالدا 50 000 دینارى

ھەبوو. باوكى بپياريدا ھەفتانە 8 000 دینارى بداتى.

لىندا بپياريدا ئەوہى ھەيەتى و ئەوہى باوكى دەيداتى

كۆيىكەتەو تا پالتۆيەكى پى بکرىت نرەكەى

499 000 دینارە. يەكەدواى يەككىكى ژمارەيى بنوسە

بارەكە بنوینىت. ئايا لىندا دەتوانىت لە كۆتايى سالدا

پالتۆكەى بکرىت؟

رادەى ھەشتەم لەھەر يەكەدواى يەككىكى ئەندازەيىدا بدۆزەو.

$$40, 4, 0.4, 0.04, \dots \quad 31$$

$$\frac{1}{18}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \quad 32$$

$$-16, -8, -4, -2, \dots \quad 33$$

$$-6, -12, -24, -48, \dots \quad 34$$

پادەى نۆيەمى ھەر يەككەدەى يەككى ئىندازەىى بدۆزەو.

$$a_4 = 96 \text{ و } a_3 = 24 \quad 35$$

$$a_2 = -\frac{4}{3} \text{ و } a_1 = \frac{2}{3} \quad 36$$

$$a_6 = -4 \text{ و } a_4 = -1 \quad 37$$

$$a_6 = 500 \text{ و } a_3 = 4 \quad 38$$

ناوئە ئىندازەىى بۆئەم دوو ژمارەىە بدۆزەو.

$$2.5 \text{ و } 10 \quad 39$$

$$\frac{1}{2} \text{ و } 8 \quad 40$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6} \text{ و } \frac{\sqrt{3}}{96} \quad 41$$

$$\frac{125}{108} \text{ و } \frac{5}{12} \quad 42$$

لەھەر يەككەدەى يەككى ئىندازەىى سەرجمى داواکراو بدۆزەو.

$$S_5 \text{ لە زنجىرەى } 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots \quad 43$$

$$S_6 \text{ لە زنجىرەى } -\frac{4}{5} + 8 - 80 + \dots \quad 44$$

$$\sum_{k=1}^{k=8} (4)^{k-1} \quad 45$$

$$\sum_{k=1}^{k=7} -2(5)^{k-1} \quad 46$$

$$\sum_{k=1}^{k=6} 60\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \quad 47$$

$$\sum_{k=1}^{k=5} 18\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \quad 48$$

كەلپەل 49 نرخی ئامپىرىكى كۆپىكردى نوئ 9

ملىون دىنارە. پاش 5 سالى تر نرخی ئامپىرەكە دەپتە چەند. ئەگەر زانیت نرەكەى لە ھەر سالىك 65% سالى پېشوى نرخی كەمدەكات.

كرى 50 كرى خانوويەك 650 000 دىنارە لە مانگىكدا كرىكە سالانە بە پېژەى 6% زىاد دەكات.

ا لە پاش 6 سال كرى سالانەى خانووكە دەپتە چەند؟

ب سەرجمى ئەو پارانەى كرىچىيەكە داويەتى لە پېنج سالى يەكەمدا چەندە؟

سەرجمى زنجىرە ئىندازەىى دوا نەھاتوو بدۆزەو.

$$-2700 + 900 - 300 + \dots \quad 51$$

$$-1.2 - 0.12 - 0.012 + \dots \quad 52$$

$$-49 - 42 - 36 - \frac{216}{7} - \dots \quad 53$$

$$4 + \frac{4}{5} + \frac{4}{25} + \frac{4}{125} + \dots \quad 54$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{3^k} \quad 55$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} -7\left(\frac{3}{5}\right)^k \quad 56$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k \quad 57$$

بۆ سەلماندى ھەرىكە لەمانەى خوارەو دەرتەنجامى بىركارى بەكاربىتە.

$$2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2 \quad 58$$

$$1 + 5 + 25 + \dots + 5^{n-1} = \frac{5^n - 1}{4} \quad 59$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{n}{2n+1} \quad 60$$

بۆخوشى 61 كچىك سوارى جۆلانەىەك بوو. لەبەرزىيەكەو دپتە خوارەو پېش ئەوئ جۆلانەكە بەرزىيەو، ئەو دوورەى كچەكە دەپىرپىت لەجارى يەكەمى سەركەوتن و دابەزىندا 9 مەترە.

ا زنجىرە ئىندازەىيەكى دوا نەھاتوو بنووسە ئەو دوورەى بنوئىت كە دەپىرپىت، ئەگەر زانیت دوورى لەھەر جارېكدا 85% دوورى جارى پېشوو.

ب پېش وەستانى جۆلانەكە ئەو دوورەىيە چەند دەپتە كەپىوئەتى.

تاقىکردنەۋەى بەش

رادەى دەيەمى ھەر يەككەدوای يەككىى ئەندازەىى بدۆزەۋە.

$$\frac{3}{256}, \frac{3}{64}, \frac{3}{16}, \frac{3}{4}, \dots \quad 13$$

$$a_5 = 8 \text{ و } a_4 = 2 \quad 14$$

ناۋەندى ئەندازەىى بۆھەردوۋ ژمارەى 4 و 25 بدۆزەۋە 15

لەھەر زنجىرە ئەندازەىىيەك سەرجهمى داواكراۋ بدۆزەۋە.

$$S_6 \text{ لە زنجىرەى } 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \quad 16$$

$$\sum_{k=1}^{k=12} 250 \left(-\frac{1}{5}\right)^{k-1} \quad 17$$

ئەگەر ھەموو سالىك يەك مىليۇن دىنارت لە بانك 18

دانا بۆ ماۋەى 10 سال بەسوۋدى سالانەى 5% ،
مىليۇنى يەكەم لە كۆتايى سالى دەيەم دەبىتە چەند؟
لەكۆتايى سالى دەيەم ھەموو پارەكەت دەبىتە
چەند؟

سەرجهمى زنجىرە ئەندازەىى دوا نەھاتوو بدۆزەۋە. (ئەگەر
سەرجهمى ھەبوو)

$$200 - 100 + 50 - 25 + \dots \quad 19$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2 \left(\frac{7}{8}\right)^k \quad 20$$

دەرئەنجامى بىركارى بەكاربەيتە بۆ سەلماندى

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{2n-1}{2} = \frac{n^2}{2}$$

ھەنگاۋى 1 : 21

ھەنگاۋى 2 : 22

ھەنگاۋى 3 : 23

پىنچ رادەى يەكەمى ھەريەككەدوای يەككىك بدۆزەۋە.

$$a_n = n^2 - 4 \quad 1$$

$$a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} - 8 \text{ و } a_1 = 48 \quad 2$$

رېسايەك بۆھەريەك لەم يەككەدوای يەكانە بنووسە.

$$-4, -2, 0, 2, 4, \dots \quad 3$$

$$54, 18, 6, 2, \frac{2}{3}, \dots \quad 4$$

يەككەدوای يەكەكە بکەۋە و سەرجهمەكانيان ھەژماريەكە.

$$\sum_{k=1}^{k=4} 5k^3 \quad 5$$

$$\sum_{k=1}^{k=7} (-1)^{k+1} (k) \quad 6$$

رادەى نۆيەمى ھەريەككەدوای يەككىكى ژمارەىى بدۆزەۋە.

$$-19, -13, -7, -1, \dots \quad 7$$

$$a_5 = 5 \text{ و } a_2 = 11.6 \quad 8$$

لەم يەككەدوای يەكە ژمارەىىيەدا دوو رادە 9

$$125, \square, \square, 65$$

سەرجهمى داواكراۋ لەھەريەك لەم زنجىرە ژمارەىىيانە
بدۆزەۋە.

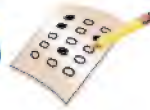
$$S_{20} \text{ لە زنجىرەى } 4 + 7 + 10 + 13 + \dots \quad 10$$

$$\sum_{k=1}^{k=12} (-9k + 8) \quad 11$$

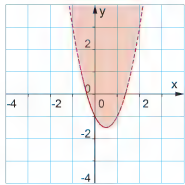
لە يەككىك لە شانۇكان پىزى يەكەم 16 كورسى 12

تېدايە لە پىزى دوۋەمەۋە ژمارەى كورسىيەكان
دوۋ كورسى زىاد دەكات لە ژمارەى كورسىيەكانى
پىزى پېش خۆى. ژمارەى كورسىيەكانى پىزى
دوۋازدەيەم چەند؟ ژمارەى كورسىيەكانى دوۋازدە
پىزى يەكەم چەندە؟

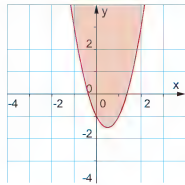
تاقىردنەۋى كەلەكەبوو



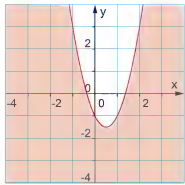
6 كام وئە پروونكرنەۋىيە شىكارى ئەم لاسەنگە
دو جايىيە $6x + 3y \geq 6x^2 - 3$ دهنوئىت؟



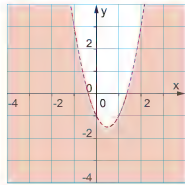
(ج)



(ا)



(د)



(ب)

7 ژىلە ئارايشتگايەكى جوانكارى كردهۋە. لە چوار

هەفتەى يەكەمىدا يەك لەدواى يەك 2 000 000 دىنار،

3 456 000 دىنار، 2 880 000 دىنار، 2 400 000 دىنار،

دىنارى قازانچ كەرد. لەهەفتەى شەشەمدا قازانچەكەى

چەند دەكات، ئەگەر قازانچەكە بەم شۆۋەيە زىادەكرىت؟

(ا) 3 856 000 دىنار (ج) 4 147 000 دىنار

(ب) 4 032 000 دىنار (د) 4 980 000 دىنار

8 پادەى نۆيەم لە يەكەدواى يەكەى $a_n = \frac{1}{2}(2^{n-1}) + 4$ چەندە؟

(ا) 36 (ب) 68 (ج) 132 (د) 260

9 پىچەۋانەى نەخشە بۆ نەخشەى $f(x) = 4x - 5$ چىيە؟

(ا) $f^{-1}(x) = -4x + 5$ (ج) $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{4}$

(ب) $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 5$ (د) $f^{-1}(x) = 5x - 4$

1 كام لەمانە يەكەدواى يەكەى 4، 6، 4، 6، 4

دهنوئىت. كە بەھىمى سەرچەم نووسراۋە؟

(ا) $\sum_{n=0}^5 24$ (ج) $\sum_{n=0}^5 (-1)^n + 5$

(ب) $\sum_{n=1}^4 (-1)^n + 5$ (د) $\sum_{n=1}^5 (-1)^n + 5$

2 كام لەمانە كراۋەى دوو پادەدارى $(2x - y)^3$ دەبىت؟

(ا) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

(ب) $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$

(ج) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

(د) $8x^3 + 12x^2y + 3xy^2 + y^3$

3 كام لەم نەخشە $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 9$ لەم نەخشە

برىتييە لە وئە نەخشەى $f(x)$ لە وئەدەنەۋەى

بەدەۋى تەۋەرى دوۋەم.

(ا) $g(x) = -x^3 - 2x^2 + 5x + 9$

(ب) $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 5x - 9$

(ج) $g(x) = 2x^3 + 4x^2 - 10x - 18$

(د) $g(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 5$

4 كام لەم نەخشە نەخشەى گەرانەۋەى توانيى؟

(ا) $f(x) = -5x$

(ب) $f(x) = 2.3(6.7)^x$

(ج) $f(x) = 0.49(7.9)^x$

(د) $f(x) = 5.13(0.32)^x$

5 تۆپىك لە بەرزى 10 m ەۋە كەۋتە خوارەۋە و بەر

زەۋى كەۋت و ەلەبەزىەۋە. ەمەۋ جارىك 60% ى

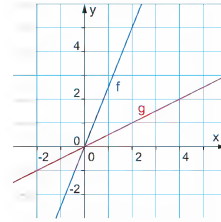
بەرزىيەكەى پىشۋى بەرزەبىتەۋە كام لەمانە

بەرزى تۆپەكە بەمەتر لە n جارىدا دهنوئىت؟

(ا) $10(0.6n)$ (ج) $\frac{10-n}{0.6}$

(ب) $10(0.6)^{n-1}$ (د) $10(0.6)^n$

10 نەخشە $f(x)$ بە چ جىگۆرپكىيەك دەگۆرپتەو بۇ



نەخشە $g(x)$

ا چۈنەنەو يەككى ئاسۋىي بە ھاوگۆلكەي $\frac{1}{5}$

ب كىشانى ئاسۋىي بە ھاوگۆلكەي 5

ج چۈنەنەو يەككى ستوونى بە ھاوگۆلكەي $\frac{1}{3}$

د كىشانى ستوونى بە ھاوگۆلكەي 3

11 كام لەمانە سفرى نەخشە $f(x) = 2x^2 + 5x - 12$

دەبىت؟

ا -4 و $\frac{3}{2}$ ج $-\frac{3}{2}$ و 4

ب -2 و 3 د $\frac{3}{2}$ و 2

كۈرتە دەلام

12 بىچىنەي يەكەدەي يەككى ئەندازەي

125, 50, 20, 8, ... چەندە؟

13 كاغەزىك لە كاغەزەكانى يارى پاكىشا ئەگەرى

ئەوئەي ئەو كاغەزە 10 يان سووربىت چەندە؟

14 سەرجمەي زىجىرە ژمارەي $\sum_{k=1}^{k=8} (7k-3)$ چەندە؟

15 پۇتاتانى دووئەي ئەو خالەي شىكارى ئەم سىستەمە

$$\begin{cases} 2y - 2 = 4x \\ 6 - x = 8y \end{cases}$$

16 ئەم نەخشەيە بەكاربىنە $f(x) = \sqrt[3]{5x}$ ؟

ا بوار و مەوداي نەخشەكە بدۆزەو.

ب پىچەوانەي نەخشە بۇ نەخشەي $f(x)$ چىيە؟

ج بوار و مەوداي پىچەوانەي نەخشەكە چىيە؟

17 زىجىرە ئەندازەي دوا نەھاتووي $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{4^{n-1}}$ بەكاربىنە.

ا ديارىبەكە زىجىرەكە نىزىكبوونە يان دوركەوتنە.

ب سەرجمەي زىجىرەكە بدۆزەو (ئەگەر ھەبىت)

18 يەككىك لە كۆگا گەرەكان قووتووي ساردەمەنى شىو

سىگۆشەيى نىمايش دەكات. بەجۆرى كە ژمارەي

قووتووەكان لە بەرزترىن رىزدا 3 قوتو ھەتا لە

رىزەكاندا بەرەو ھەروە ھەروە بچىن ژمارەي قووتووەكان

يەككىك زىاد دەكات.

ا ئايا يەكەدەي يەك يان زىجىرە بۇ نواندى

ژمارەي قووتووەكان لە رىزى n بەكاربىت؟

ب ژمارەي قووتووەكانى ھەر 12 رىزەكە چەندە؟

ج زىجىرەي $\sum_{k=1}^{k=n} (k+2)$ چى دەنۆينىت؟ پرونىبەكەو.

درىژە دەلام

19 پالىوراوان بۇ ھەرگرتن لە كۆللىژى ئەفسەرى بە دوو

تاقىکردنەو ھەدا تىپەردەين 60% ي پالىوراوان

تاقىکردنەو ھەدا يەكەم بەسەرکەوتويى دەين، 20% يان

تاقىکردنەو ھەدا دوو ھەسەرکەوتويى دەين.

ا ھىلکارىيەكى درەختى دروستبەكە ئەگەرە لە

تواناكان بۆھەر پالىوراويك دەريخت.

ب ئەگەر پالىوراو ھەدا بۆيان ھەبىت لەھەردو

تاقىکردنەو ھەدا بەشدارين ئەگەرى ئەو ھەدا

پالىوراو ھەدا لەھەردو تاقىکردنەو ھەدا دەريچىت

چەندە؟ چەند پالىوراو چاوەرپى دەريچون

دەكەن ئەگەر ژمارەيان 50 پالىوراو بىت.

ج كاميان گەرەترە: ئەگەرى ئەو ھەدا پالىوراو ھەدا

لەھەردو تاقىکردنەو ھەدا دەريچىت يان

لەھەردو ھەدا بەكەون؟ پرونىبەكەو.

Trigonometry

سیگوشه زانی

بهشی چهو ته م

وانه کان

1-7 یاسای sine و cosine

2-7 نه خشه سیگوشه ییه کان.

لاپه رپی ته کنولوزیا هاوئه نجامه سی
گوشه ییه کان بهروون کردنه وهی3-7 هاوئه نجامه سیگوشه ییه
بنه رپه تییه کان

تاقیکردنه وهی نیوهی بهش

4-7 هاوئه نجامه کانی سه رجه م و
جیاوازی5-7 هاوئه نجامه کانی دووئه وهنده
و نیوئه وهنده ی گوشه.

سووکه سه ر سووران هوه

ده توانیت پروونکردنه وهییه کانی نه خشه
سیگوشه ییه کان و هاوئه نجامه
سیگوشه ییه کان به کاربینی بؤ
دروستکردنی نمونه کانی جولهی بازنه یی
یان په رپه وه له باره جیاوازه کاند.

ئايا تۆ ئامادەيت؟

✓ زاراۋەكان

ھەر زاراۋەيكە بەپېي پېئاسەكەي كە لەلاي چەپ ھاتوۋە بېستەۋە.

- | | | | | |
|---|-------------------|--------|---|---|
| 1 | Sin | ي گۆشە | ا | پېژەي دريژي لاي بەرامبەري گۆشەكەيە بۆ دريژي لاتەنيشتەكەي. |
| 2 | Cosin | ي گۆشە | ب | پېژەي دريژي لاتەنيشتەي گۆشەكەيە بۆ دريژي ژيپەكەي. |
| 3 | ژي سېگۆشەي ۋەستاۋ | | ج | پېژەي دريژي ژيپە بۆ دريژي لاي بەرامبەر گۆشەكە. |
| 4 | tan | ي گۆشە | د | پېژەي لاي بەرامبەر گۆشەكەيە بۆ دريژي ژيپەكەي. |
| | | | ه | لاي بەرامبەري گۆشە ۋەستاۋەكەيە. |

✓ دابەشكرىنى كەرتەكان

دابەشېكە

- | | | | | | | | |
|---|---------------|---|---------------|---|----------------|---|----------------|
| 5 | $\frac{3}{5}$ | 6 | $\frac{3}{4}$ | 7 | $-\frac{3}{8}$ | 8 | $\frac{2}{3}$ |
| | $\frac{5}{5}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{8}$ | | $-\frac{7}{4}$ |

✓ سادەكرىنى برە پەگىيەكان

برەكە بەسادەترىن شېۋەي بنووسە.

- | | | | | | | | |
|---|----------------------------|----|-----------------|----|------------------------------|----|-----------------------|
| 9 | $\sqrt{6} \times \sqrt{2}$ | 10 | $\sqrt{100-64}$ | 11 | $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{36}}$ | 12 | $\sqrt{\frac{4}{25}}$ |
|---|----------------------------|----|-----------------|----|------------------------------|----|-----------------------|

✓ لېككىنى دوو پادەدار

لېككىدە

- | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|----------------|
| 13 | $(x+11)(x+7)$ | 14 | $(y-4)(y-9)$ | 15 | $(2x-3)(x+5)$ |
| 16 | $(k+3)(3k-3)$ | 17 | $(4z-4)(z+1)$ | 18 | $(y+0.5)(y-1)$ |

✓ ھاۋئەنجامە تايپەتتەيەكان

لېككىدە

- | | | | |
|----|----------------|----|----------------|
| 19 | $(2x+5)^2$ | 20 | $(3y-2)^2$ |
| 21 | $(4x-6)(4x+6)$ | 22 | $(2m+1)(2m-1)$ |
| 23 | $(s+7)^2$ | 24 | $(-p+4)(-p-4)$ |

رېبەرى خويندن: تېرۋانين لەسەر بەشەكە

Vocabulary

زاراۋەكان

Amplitude	فراوانى
Cycle	خول
Frequency	دوبارە بونەو - لەرەلەر
Period	كاتى خولى
Periodic functions	نەخشەى خولاه
Phase shift	لادانى پوو
Rotation matrix	رېزكراۋەى خولانەو

لە رابردودا

ئەمانەت خويندوۋە

- شىكارکردنى ئەو پىرسىارانەى سىگۆشە و رېژە سىگۆشەيەكانى تېدايە.
- بەكارهينانى شىتەل بۇ شىكارکردنى ھاۋكېشە دوۋجاكان.
- بەكارهينانى ئەو نەخشەى نمونەيەك بۇ شىكارکردنى پىرسىارەكانى ژيانى پۇژانە پىكدېن.
- شىكارکردنى ھاۋكېشەكان بەجەبرى و پوونكرنەوھى.

لەم بەشەدا

ئەمانەت فېردەبىت

- شىكارکردنى ئەو پىرسىارانەى نەخشە سىگۆشەيەكانىان تېدايە.
- نەخشە سىگۆشەيەكان بۇ دروستکردنى نمونە كە بارەكانى راستى ژيان بنوئىت.

لە داھاتودا

دەتوانىت كارامەيەكانى ئەم بەشە بەكاربىتت لە

- قۇناغى بەرزتردا، لە كاتى خويندنى جىاكارى و تەواوكارى
- لە وانەكانى ترى ۋەك فېزىا، زىندەزانى و ئابورى.
- دەرەۋەى خويندنگا بۇ خويندنى دياردەى پووداۋەكان. (الظواهر الدورية).

پۇشنايىەك لەسەر زاراۋەكان

- بۇ ئەۋەى لەگەل ھەندىك لەم زاراۋانەدا رابىي كە لەم بەشەدا ھاتوۋە ئەم ھەنگاۋانە پەپرەو بکە:
1. واتاى وشەى فراۋانى لە ژيانى رۇژانەدا چىيە؟ مەبەست لە فراۋانى بەندۇلى كاتژمىر چىيە؟
 2. واتاى وشەى خول لە ژيانى پۇژانەدا چىيە؟ نمونە لەسەر دياردەى پووداۋەكان بىنەو.
 3. نمونە لەسەر كارىك بىنەو دووبارە بونەۋەى تېدايىت. ۋەك پاككرنەۋەى ددان پۇژانە. دەوترىت پۇژى دوچار ددانم دەشۆم. باسى ئەو نمونەيە بکە باسما كىرد.
 4. بەدەگمەن واتاى ماۋەى خولى لە ژيانى پۇژانەدا بەكارديت. ئەم دەربرىنە بۇ تۆ چى دەگەيەنئىت؟ واتاى نەخشەى خولاه چۆن تېدەگەيت؟
 5. كاتىك رېزكراۋەى خولانەو بەكارديت ئەو ئەنجامەى پېشېبىنى دەكەيت چىيە؟



ستراتیژییه تی وانه که: ئاماده بوون بۆ تاقیکردنه وهی کۆتایی.

بیرکاری بابته تیکی که له که به بووه. بۆیه هه موو ئه و بابته تانه ی له سه ره تای سال ه وه ده ی خوینیت. تاقیکردنه وهی کۆتایی سال ده یگه ریته وه. بۆیه واباشتره به م شیوه یه ی له خواره وه هاتوو به بۆ خۆ ئاماده کردن بۆ تاقیکردنه وه پلاندانیی:

دوو ههفته پیش تاقیکردنه وه

- به تاقیکردنه وهکانی پێشوو و ئه رکی ماله وه دا. بچۆوه بۆ ئه وهی ئه و بابته تانه ی پێوستن گرنگیان پێبده ی و ئه و پرسیارانه ی به هه له شیکارکراون یان شیکاره کانیان ناته واهه سه ر له نوێ شیکاریان بکه یته وه.
- ئه و یاسا و سه لمپنراوانه ی بۆ رۆژی تاقیکردنه وه پێوسته بیانزانی له لیستی که دا بیان نووسه.
- خۆت له و پرسیارانه تاقیکه وه له سه ره شیوه ی پرسیار تاقیکردنه وهکان (تاقیکردنه وهی نمونه یی خۆت ئه نجام ده).

ههفته یه ک پیش تاقیکردنه وه

- ئه و پرسیارانه ی پێشتر بۆ تاقیکردنه وه نمونه ییه که به کارته ی ناو له وه لامه کانیان دلنیا به، ئه گه ره له شیکار کردنی پرسیاره کانه دا سه رکه وتوو نه بووی به دوا ی نمونه ی هاو شیوه دا بگه ری و خۆت له سه ره شیکارکردنیان رابێته.
- له گه له یه کێ که له هاو پوله کانه دا له سه ره یاسا و سه لمپنراوه کان پرسیار له یه کتری بکه ن، له و لیسته ی که پێشتر ئاماده تان کردبوو.

رۆژی پیش تاقیکردنه وه

- دلنیا به له پێداویستییه کان تاقیکردنه وه وه ک پێنوو و راس ته و بژمی ر (دلنیا به له پاتری بژمی ره که ت).

رۆژی
تاقیکردنه وه

هه ولبده

خشته یه کی خۆ ئاماده کردن بۆ تاقیکردنه وهی کۆتایی سال تییدا کات دا به شکرابیت دروستبکه.

یاسای ساین و یاسای کوساین

Law of sines and Law of cosines

كى ئەمە بەكار دەھيئەت؟

ئەندازىيارەكان بۇ شىكار كىردى پىرسىيارەكانى
بىنادرۆستىكردن ياساى ساین و كۆساین بەكار دەھيئەت.

ئامانجەكان

ياساى ساین و كۆساین
بەكار دېت بۇ شىكار كىردى
سىگۇشە كارى.



لەو كاتەى بورجى پىزا لە سالى 1370 ز لە ئىتالىا درۆستىكراو. ئەندازىيارەكان
چەندەھا پېشنىار پېشكەش دەكەن بۇ كەم كىردەوئەى لارىيەكەى. ئەو گۆشەيەى
ئەو بورجە لەگەل زەوى درۆستىكردو وەستاونىيە وەك ئەو شىوازەنى كە بە
شىوئەكەى گشتى لە تەلارەكاندا ھەيە. بۇيە لەسەر ئەندازىيارەكان
پىويست بوو لەسەر ئەو سىگۇشانە كاربەكەن كە وەستاونىن.

لە پۇلى دەيەم فىرى چۆنىەتى بەكار ھيئەتى رېژە سىگۇشەيەكان بوويت. بۇ دۆزىنەوئەى پىوانەكانى
گۆشەكانى سىگۇشە گۆشەوئەستار، ھەر وەھا فىرى دۆزىنەوئەى لایەكانى بوويت. بەو كىردارەش
دەوترىت شىكار كىردى سىگۇشەى وەستار. لەم وانەيەشدا شىكار كىردى سىگۇشە فىردەبىت جۆرەكەى
ھەر جۆنكەى بىت. بۇ ئەو پىويست بە ھەژمار كىردى رېژە سىگۇشەيەكانى ئەو گۆشانە ھەيە كە
پىوانەكەيان دەكاتە 180° بۇت ھەيە بژمىر بەكار بىئىت بۇ دۆزىنەوئەى ئەو بەھايانە.

دۆزىنەوئەى رېژە سىگۇشەيەكان بۇ گۆشەكراوەكان

بازنەى يەكە بۇ دۆزىنەوئەى ھەر رېژەيەكى سىگۇشەيەى بەكار بېئەت:

ج $\cos 108^\circ$

ب $\tan 98^\circ$

ا $\sin 135^\circ$

$\cos(108)$
-0.3090169944

$\cos 108^\circ \approx -0.31$

$\tan(98)$
-7.115369722

$\tan 98^\circ \approx -7.12$

$\sin(135)$
0.7071067812

$\sin 135^\circ \approx 0.71$

1. بازنەى يەكە بۇ دۆزىنەوئەى ھەر رېژەيەكى سىگۇشەيەى بەكار بېئەت:



ج $\tan 120^\circ$

ب $\sin(-150^\circ)$

ا $\cos 120^\circ$

دەتوانىت بەرزى سىگۇشە بەكار بىئىت بۇ دۆزىنەوئەى پەيوەندىيەك كە لایەكانى سىگۇشەكە بەيەكەو
بەستىت. لەسەرى سىگۇشەكەو C بەرزى سىگۇشەكە بۇ سەر \overline{AB} بكېشە. پالپشت بەوئەنى

بەرامبەر. دەتوانىت بنووسىت

$$\sin \hat{B} = \frac{h}{a} \quad \sin \hat{A} = \frac{h}{b}$$

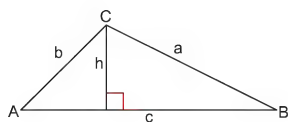
$$h = a \sin \hat{B} \quad h = b \sin \hat{A}$$

$$a \sin \hat{B} = b \sin \hat{A}$$

لەمەوە دەردەچىت

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b}$$

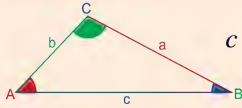
لەمەوەش دەردەچىت



ھەر وەھا دەتوانىت بەرزىيەكى تر لە بەرزىيەكانى سىگۇشەكە بەكار بىئىت بۇ پروون كىردەوئەى ئەوئەى
كە دوو رېژە يەكسانەكەى پېشوو دووبارە يەكسانن بە رېژەى $\frac{\sin \hat{C}}{c}$.



سەلمىتراۋى 1-7 ياساى ساين Sin



ئەگەر ABC ھەر جۆرە سىڭۇشەيەك بىت، درىژى لايەكانى a, b, c

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

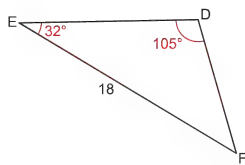
دەتوانى ياساى Sin بۇ شىكاركردى سىڭۇشە بەكاربىنى بەزانىنى:-

- پىۋانەى دوو گۇشە لە گۇشەكانى و درىژى لايەكى.
- درىژى دوو لە لايەكانى و پىۋانەى گۇشەيەك لە نىۋانيدا نەبىت.

بەكارهينانى ياساى Sin

2 نمونە

پىۋانەى داواكراو بدۇزەدە. درىژىيەكەى بۇ نىكتىرىن بەش لە دەيەك نىكتىكەو و پىۋانەى ھەر گۇشەيەك بۇ نىكتىرىن پەلە نىكتىكەو



ياساى Sin

لە جياتى دابنى

ليكتىكى دوولا و دوونىۋان

ھەردو لا دابەشى $\sin 105^\circ$ بکە

DF

$$\frac{\sin D}{EF} = \frac{\sin E}{DF}$$

$$\frac{\sin 105^\circ}{18} = \frac{\sin 32^\circ}{DF}$$

$$DF \times \sin 105^\circ = 18 \times \sin 32^\circ$$

$$DF = \frac{18 \times \sin 32^\circ}{\sin 105^\circ} \approx 9.9$$

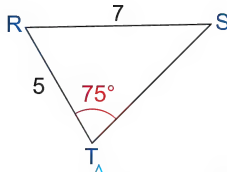
mS

$$\frac{\sin T}{RS} = \frac{\sin S}{RT}$$

$$\frac{\sin 75^\circ}{7} = \frac{\sin S}{5}$$

$$\sin S = \frac{5 \times \sin 75^\circ}{7}$$

$$m\hat{S} = \sin^{-1} \left(\frac{5 \times \sin 75^\circ}{7} \right) \approx 44^\circ$$



ياساى Sin

لە جياتى دابنى

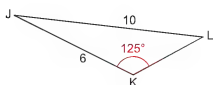
ھەردو لا لە 5 بەدە

دوگمەى \sin^{-1} دابگرە بۇ ھەزماركردى پىۋانە $m\hat{S}$

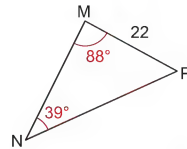
دەتوانى بژمىرى زانستى بۇ پىۋانى \hat{S} بەكاربىنە، پاش گۇرپنى بژمىر بۇ ئەۋەى بەشپواى شەستى (پەلە) كارىكات لە جياتى گۇشەى نيوەتيرەيى (بازنەيى) دوگمەى MODE دابگرە پاشان بىخەرە سەر Degree لە دوايدا دوگمەى ENTER و بۇ ھەزماركردى $m\hat{S}$ يەك لە دوايىيەك دوگمەى 2^{nd} , SIN, x, 5, SIN, 7, 5, ÷, 7, Enter, دابگرە.

2. پىۋانەى داواكراو بدۇزەدە. ھەر درىژىيەك بۇ نىكتىرىن بەش لە دەيەك نىكتىكەو،

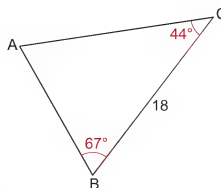
پىۋانەى ھەر گۇشەيەك بۇ نىكتىرىن پەلە بدۇزەدە.



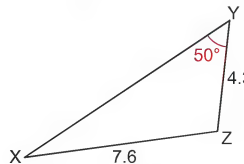
mL



NP



AC



mX

ياساى Sin ناتوانىت ھەموو سىڭۇشەيەكمان بۇ شىكارىكات بۇ نمونە ئەگەر دوولا و گۇشەى نىۋانيان نەزانى يان ئەگەر درىژى ھەموو لايەكانى زانراوبىت. لەم بارانەدا پىۋىستە ياساى Cos (كۇساين) بەكاربىن.

تېيىنى

ئەگەر بژمىرت نەبى

$$\sin 105^\circ \approx 0.96$$

$$\sin 32^\circ \approx 0.53$$

$$\sin 44^\circ \approx 0.69$$

خالى جاويدىرى



تېيىنى

ئەگەر بژمىرت نەبى

$$\sin 88^\circ \approx 0.99$$

$$\sin 39^\circ \approx 0.63$$

$$\sin 127^\circ \approx 0.8$$

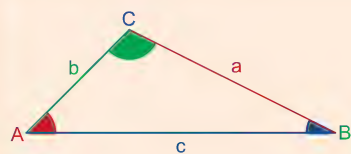
$$\sin 125^\circ \approx 0.82$$

$$\sin 50^\circ \approx 0.76$$

$$\sin 67^\circ \approx 0.92$$



سەلمېنراوى 1-7 ياساى كۇساین cosine



ئەگەر ABC ھەر جۆرە سېگۇشەيەك بېت، درېزى
لايەكانى a, b, c بن ئەوا

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

دەتوانى ياساى Cosine بۇ شىكارکردنى سېگۇشە بەكاربېنى بەزانىنى:-

- دوو لا وگۇشەى نېوانيان.
- درېزى ھەرسى لايەكەى.

يارمەتى

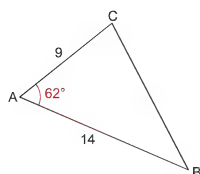
لە ياساى Cos داگۇشەى
بەكارھاتوو لەھەموو
يەكسانبونەكاندا برىتييە لە و
گۇشەيەى بەرامبەر لاکەى ترى
يەكسانبونەكەيە.

بەكارھيئانى ياساى Cosine

نمونە 3

پېوانەى داواکراو بدۆزەدە، ھەر درېزىيەك بۇ نىکتىرە دەيەك نىکتىكەو، و پېوانەى ھەر
گۇشەيەك بۇ نىکتىرە پلە نىکتىكەو.

ا BC



ياساى Cos $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(AB)(AC) \cos \hat{A}$
لەجيانى دابنى
سادەبکە

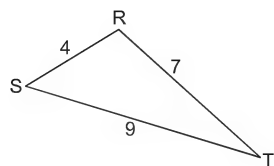
$$= 14^2 + 9^2 - 2(14)(9) \cos 62^\circ$$

$$BC^2 \approx 158.6932$$

$$BC \approx 12.6$$

درېزى $\overline{BC} \approx 12.6$ بەنىکەيى

ب $m\hat{R}$



ياساى Cos $ST^2 = RS^2 + RT^2 - 2(RS)(RT) \cos \hat{R}$
لەجيانى دابنى
سادەبکە

$$9^2 = 4^2 + 7^2 - 2(4)(7) \cos \hat{R}$$

$$81 = 65 - 56 \cos \hat{R}$$

$$16 = -56 \cos \hat{R}$$

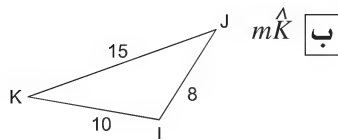
شىكاربکە $\cos \hat{R} = -\frac{16}{56}$
 $m\hat{R} = \cos^{-1}\left(-\frac{16}{56}\right) \approx 107^\circ$

پېوانەى \hat{R} برىتييە 107° بەنىکراوہيى.

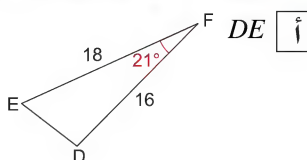
تېيىنى

ئەگەر بۇمېرت نەبى
 $\cos 62^\circ \approx 0.47$
 $\cos 107^\circ \approx 0.29$

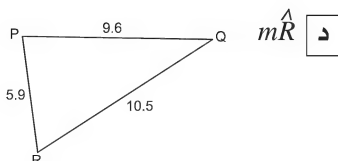
3. پېوانەى داواکراو بدۆزەدە، ھەر درېزىيەك بۇ نىکتىرە دەيەك نىکتىكەو، ھەر
پېوانەيەك بۇ نىکتىرە پلە نىکتىكەو.



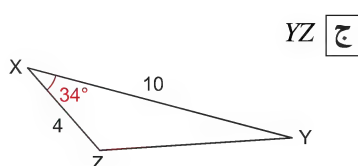
ب $m\hat{K}$



ا DE



د $m\hat{R}$



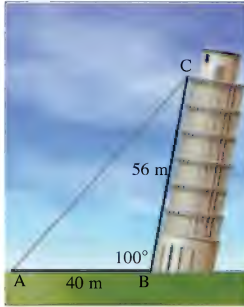
ج YZ

تېيىنى

ئەگەر بۇمېرت نەبى
 $\cos 21^\circ \approx 0.93$
 $\cos 29^\circ \approx 0.87$
 $\cos 34^\circ \approx 0.83$
 $\cos 64^\circ \approx 0.43$

نمونه 4

جیبہ جیکردن له ئەندازەى بیناسازى



بەرزى بورجى پىزا له ئىنالىا 56m ه لەسالى 1999 ز
گۆشەى بورجەكە گەيشتە 100° بۆ ئەوێ بورجەكە
نەروخت ئەندازىارىك پيشنارى ئەوێ كرد لوتكەى
بورجەكە بە سىمىك لەگەڵ خالىك كە 40m له بنكەكەىو
دوور بىت بىستىو. درىژى سىمەكە و پىوانەى ئەو
گۆشەى لەگەڵ پروتەختى زەوىەكەدا دروستى دەكات
چەندە؟ درىژىەكەى بۆ نىكتىرین دەيەك له مەتر و
پىوانەى گۆشەكە بۆ نىكتىرین پله نىكبەكەو.

هەنگاوى 1 درىژى سىمەكە بدۆزەو.

$$\text{ياساى Cos } AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2(AB)(BC)\cos \hat{B}$$

$$\text{لەجىاتى دابى } = 40^2 + 56^2 - 2(40)(56)\cos 100^\circ$$

$$\text{سادەبەكە } AC^2 = 5513.9438$$

$$\text{رەگى دووجا وەرگرە } AC = 74.3$$

هەنگاوى 2 پىوانەى گۆشەى سىمەكە لەگەڵ پرووى زەوىەكەدا بدۆزەو.

$$\text{ياساى Sin } \frac{\sin \hat{A}}{BC} = \frac{\sin \hat{B}}{AC}$$

$$\text{لەجىاتى دابى } \frac{\sin \hat{A}}{56} = \frac{\sin 100^\circ}{74.2559}$$

$$\text{سادەبەكە } \sin \hat{A} = \frac{56 \times \sin 100}{74.2559}$$

$$\text{بژمىرە بەكاربىنە بۆ دۆزىنەوێ } m\hat{A} = \sin^{-1} \left(\frac{56 \times \sin 100^\circ}{74.2559} \right) \approx 48^\circ$$

گۆشەى سىمەكە لەگەڵ پرووى زەوىەكە دەكاتە 48° بەنىكى.

ئاگادارى

وێلامەكان نىك مەكەو
تانەگەيتە ئەنجامى كۆتايى
ئەگەر پرسىارەكە له چەند
هەنگاوىك پىكەتايى وەلامى
سەرەتايى لەهزرى بژمىرەكە
بەبارىزە.

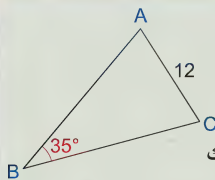
تايينى

ئەگەر بژمىرت نەبى
 $\cos 100^\circ \approx -0.1736$
 $\sin 100^\circ \approx 0.9848$

4. چى دەبىت ئەگەر...؟ ئەندازىارىكى تر پيشنارى ئەوێ كرد لوتكەى
بورجەكە بە سىمىكى بەهيز خالىك 31m له بنكەى بورجەكەو
دووربىت بىستىو. درىژى ئەو سىمە چەند دەبىت. درىژىەكە بۆ
نىكتىرین دەيەك له مەتر پىوانەى گۆشەكە بۆ نىكتىرین پله نىكبەكەو.



بىرەكەو و تاوتويەكە



1. بۆ هەژمارکردنى BC بە ياساى Sin ئايا پىوستىت بە زانىارى زياتر هەيە؟
ئەگەر وێلامەكەت بەلى بوو ئەو زانىارىيە چيە؟
2. رىكخەر بە خشتەكە بنوسەو و تەواوى بكە. بۆ شىكارکردنى هەر سىگۆشەيەك
كام ياسا بەكاردهيىت، ديارىكە، پاشان نموونەيەك بە وێنە بنوسە.



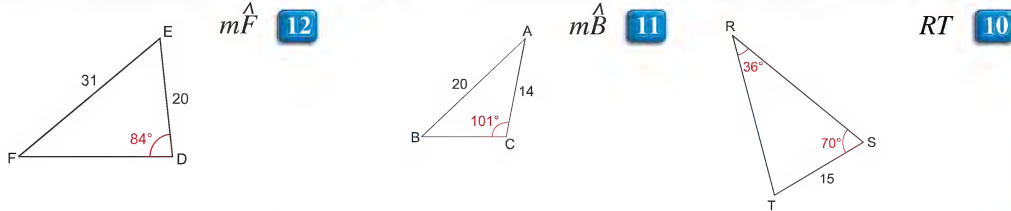
نموونه	ياسا	پىدراوەكانى سىگۆشەكە
		پىوانەى دوو گۆشە و درىژى لايەك
		درىژى دوو لا و پىوانەى گۆشەيەك له نىوانىادا نەبىت.
		درىژى دوو لا و پىوانەى گۆشەى نىوانيان
		درىژى سى لا

رايئاني ئاراسته كراو

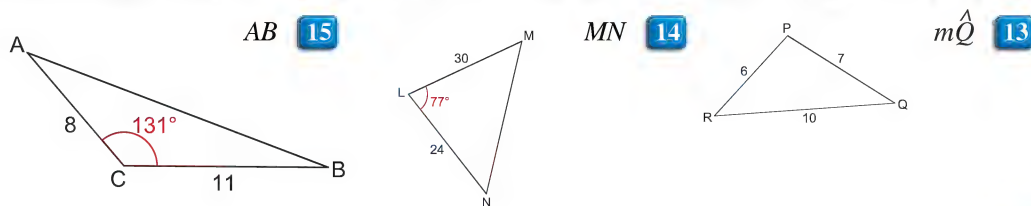
بژميرى زانستى بۇ دۆزىنە دەرىجىسى ھەر رېژىيەكى سىگۇشەيى بەكاربەيئە ۋە لامەكەت بۇ نىكتىرىن بەش لەسەد نىكتىكە ۋە

$\tan 92^\circ$ 3	$\sin 167^\circ$ 2	$\sin 100^\circ$ 1
$\sin 150^\circ$ 6	$\cos 133^\circ$ 5	$\tan 141^\circ$ 4
$\cos 156^\circ$ 9	$\tan 164^\circ$ 8	$\sin 147^\circ$ 7

پىۋانەى داواكراو بدۆزە ۋە، دىرژىيەكە بۇ نىكتىرىن دەيەك، ۋ پىۋانەى گۆشەكە بۇ نىكتىرىن پە نىكتىكە ۋە



پىۋانەى داواكراو بدۆزە ۋە، دىرژىيەكە بۇ نىكتىرىن دەيەك ۋ پىۋانەى گۆشەكە بۇ نىكتىرىن پە نىكتىكە ۋە.



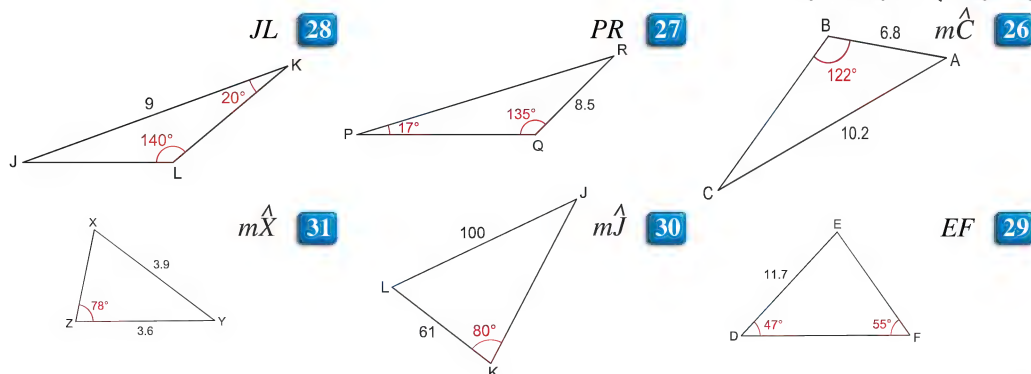
داتاشى 16 داتاشىك چوار چۆمەيەكى لە 3 پارچە دار دروستكر. دىرژىيەكانيان برىتیبون لە 20cm ۋ 24cm ۋ 30cm پىۋانەى ھەر گۆشەيەك لە گۆشەكانى سىگۇشەكە چەندە؟ ۋ لامەكانت بۇ نىكتىرىن پە نىكتىكە ۋە.

رايئان و شىكاركردىن پىرسىارەكان

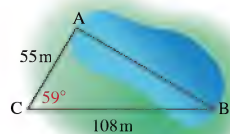
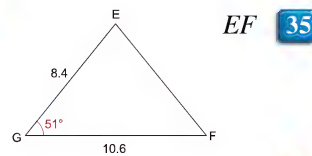
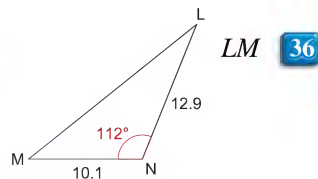
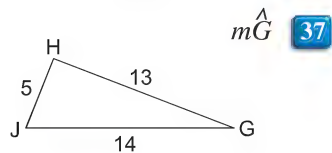
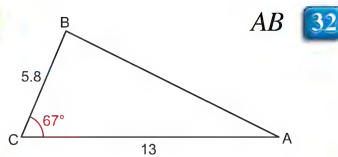
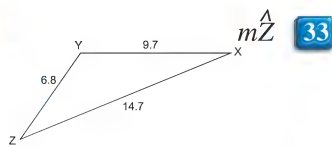
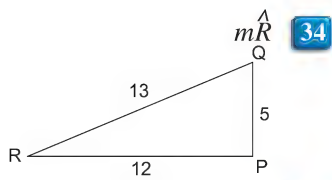
بەبەكارهينانى بازنى يەكە ئەمانەى خوارە ۋە بدۆزە ۋە

$\tan 150^\circ$ 19	$\tan (-150^\circ)$ 18	$\cos 180^\circ$ 17
$\cos 90^\circ$ 22	$\sin (-120^\circ)$ 21	$\sin 150^\circ$ 20
$\sin 90^\circ$ 25	$\cos (-135^\circ)$ 24	$\tan 270^\circ$ 23

پىۋانەى داواكراو بدۆزە ۋە، دىرژىيەكە بۇ نىكتىرىن دەيەك، ۋ پىۋانەى گۆشەكە بۇ نىكتىرىن پە نىكتىكە ۋە

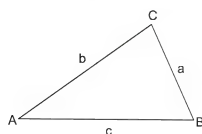


رايئانى ئازاد	بۇشىكاركردىن سەيرى
رايئانەكان	نمۇنە بىكە
1	25-17
2	31-26
3	37-32
4	38



چاودیڙی بۇ ئۇەى چاودیڙىڭ درىڭى دەریاچەیکە بزانیٹ 3 خالى A و B و C دیاریکرد وک له وینەى بەرامبەردا دیارە. درىڭى AB بدۆزەو نزیکرابیٹەو بۇ نزیکترین دەیک له مەتر؟ و پیوانەى B گۆشەى B نزیکرابیٹەو بۇ نزیکترین پله چەندە؟

بۇ شیکارکردنى پرسیارەکانى 39-42 سیگۆشەى بەرامبەر بەکارینیە. دریڭیەکان نزیکەو بۇ نزیکترین دەیک و گۆشەکان بۇ نزیکترین پله.



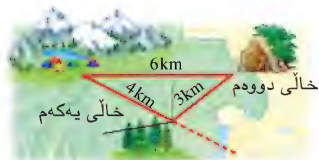
39 $a \cdot b = 3.2 \text{ cm}$, $m\hat{B} = 22^\circ$, $m\hat{A} = 74^\circ$ بدۆزەو

40 $c \cdot b = 7.1 \text{ m}$, $a = 9.5 \text{ m}$, $m\hat{C} = 100^\circ$ بدۆزەو

41 $m\hat{B} \cdot c = 4 \text{ m}$, $b = 3.1 \text{ m}$, $a = 2.2 \text{ m}$ بدۆزەو.

42 $m\hat{C} \cdot m\hat{A} = 45^\circ$, $c = 8.4 \text{ cm}$, $a = 10.3 \text{ cm}$ بدۆزەو.

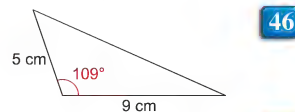
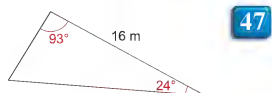
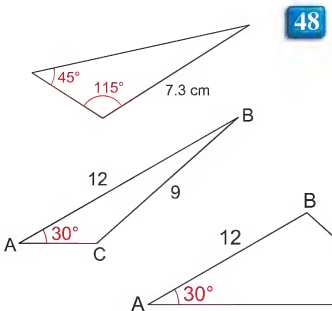
بیرکردنەوہی رەخنەگرانە وادابنى پیوانەى ھەر سى گۆشەکانى سیگۆشەیکە دەزانى. و دەتەوٹ درىڭى لایەکانى بدۆزەو ئایا دەتوانیت یاسای Sin یان Cos بەکارینیٹ بۇ گەیشتن بەو مەبەستە؟ بەلگە بۇ وەلامەکەت بەینیەو.



44 **جى دەبیٹ ئەگەر...** یاسای Cos چ گۆرانىكى بەسەردا دیت ئەگەر گۆشەکە وەستاییت؟

45 **پیشبرکى** وینەى بەرامبەر نەخشەى یەکک له پیشبرکىیەکانى رۆیشتن رووندەکاتەو. پیویستە پیشبرکىکەرەکە چەند پله پیچ بکاتەو پاش گەیشتنى بە خالى چاودیڭى یەکەم بۇ ئۇەى رۆوبکاتە خالى چاودیڭى دووہم؟ وەلامەکەت نزیک بکەو ببۇ نزیکترین پله.

فرەهەنگاؤ چپوہى ھەر سیگۆشەیکە ھەژماریکە. وەلامەکەت بۇ نزیکترین دەیکە نزیکەو.



49 لیږدا بارىكى لیتچوون له بارەکانى جیبەجیکردنى یاسای Sin داھەیە. ئەویش ئەو بارەیکە له سیگۆشەیکەدا پیوانەى یەکک له گۆشەکان و درىڭى لایەكى بەرامبەر گۆشەکە و درىڭى لایەكى تر بزانیٹ. بەلام درىڭى لای بەرامبەر کورتەر له درىڭى لایەکەى

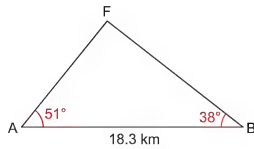
تر. ئەوا دووبار ھەیکە بۇ ئەم جۆرە سیگۆشەکانە. دوو بەھای گونجاو بۇ $m\hat{C}$ وەلامەکەت بۇ نزیکترین پله نزیکەو (یارمەتى): لەکاتى بەکارھینانى بژمیری رۆونکردنەوہی بۇ دۆزینەوہى گۆشەیکە sin ەکەى زانراو بیٹ پیوانەى گۆشەیکە تیڭى ئەوتۆت دەداتى کە مەرچەکە بیڭیتەدى. ئەو گۆشەیکە و گۆشە پرکەرەکەى بەھەندوہر بگرە).

دەروازەیکە

لەسەر سىستەمى چاودیڭى



زۆریەى کردارەکانى
چاودیڭى بە ھۆى سىستەمى
جیھانى GPS ئەنجام
دەدریٹ. ئەو سىستەمە چەند
مانگىكى دەستکرد بۇ
دیاریکردنى شوینەکان
بەکاردیڭى



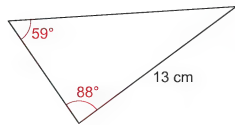
50 دوو تیمی بهرگری شارستانی که له دوو خالی A ، B دابوون، ئاگادار کرانه وه له خالی F دا ئاگریک که وتووه ته وه.

ا) \widehat{mCBD} بدۆزه وه.

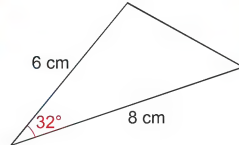
ب) دووری نیوان هر تیمیک و شوینی ئاگره که هه ژماربکه. وه لامه کهت بۆ نزیکترین کیلومه تر نزیکبکه وه.

ج) کوپته ری ئاگر کوژی نه وه به خیرایی 150 km/h ده فپیت. ئه و کاته چهنده که تیمه کان قازانج ده کن نه گهر کوپته ره که له خالی A وه بفپیت له جیاتی خالی B .

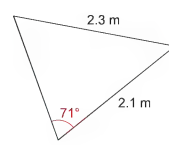
دیاریبکه نایا ده توانیت یاسای Sin یان یاسای Cos وه که ههنگاوی یه کهم بۆ شیکارکردنی هر سیگۆشه یه که به کاربیت.



53



52



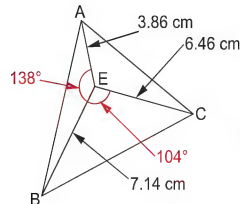
51

54 پۆتانی سه رهکانی سیگۆشه ی ABC بریتیه له $C(-3, -1)$ ، $B(3, 1)$ ، $A(0, 3)$

ا) AB ، BC ، CA بدۆزه وه

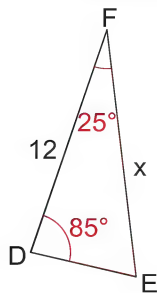
ب) کام یه کیک له گۆشهکانی سیگۆشه گه وهرترین پۆانه ی هه یه؟

ج) پۆانه ی ئه و گۆشه یه بدۆزه وه.



55 هونه ر کلار شیوازکی پیکهینا بۆ رهنگکردنی شووشه وه که له وینه ی بهرامبهردا دایه. AB و BC هه ژماربکه پاشان $m\widehat{ABC}$ بدۆزه وه. درژییه که بۆ نزیکترین به ش له سه د و گۆشه که بۆ نزیکترین پله نزیکبکه وه.

56 هه له له شیکردنه وه داوا له خویندکاران کرا درژی x له سیگۆشه ی بهرامبهردا بدۆزه وه. ئه م دوو وه لامه یان پیشنیارکرد. کامیان هه له یه؟ هه له که پرونبکه وه.



به پپی یاسای sin

$$\frac{\sin 85^\circ}{x} = \frac{\sin 70^\circ}{12}$$

$$x \sin 70^\circ = 12 \sin 85^\circ$$

$$x = \frac{12 \times \sin 85^\circ}{\sin 70^\circ} \approx 12.7$$

به پپی یاسای sin

$$\frac{\sin 85^\circ}{x} = \frac{\sin 25^\circ}{12}$$

$$x \sin 25^\circ = 12 \sin 85^\circ$$

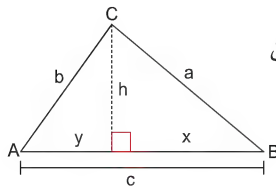
$$x = \frac{12 \times \sin 85^\circ}{\sin 25^\circ} \approx 28.3$$

57 سه لماندنی یاسای Cos له سیگۆشه یه کی گۆشه تیژ

دراو: ABC سیگۆشه یه که هه موو گۆشهکانی تیژه و درژی لایهکانی بریتین

له c ، b ، a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$



سه لماندن: له خالی C ده وه ئه ستونیک بۆ سه ر \overline{AB} بکیشه. و سیگۆشه که

ده بیته 2 سیگۆشه ی وه ستاو 1 و 2 وه ستاو هیمای h بۆ به رزییه که دابنی لای \overline{AB} ده کات دوو به شه وه. درژی یه کهم x و درژی دووهم y بیت. به پپی سه لمیئراوی قیساغورس ده توانین بنووسین.

له جیاتی $h^2 + x^2$ دابنی b^2

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx \quad (4)$$

له سیگۆشه ی 2 دا: $\cos \hat{A} = \frac{x}{b}$

$$x = b \cos \hat{A}$$

له جیاتی دانان له 4 نه چامه که دپته دی

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$a^2 = h^2 + y^2 \quad (1)$$

له سیگۆشه ی 1 دا

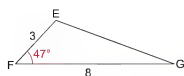
$$b^2 = h^2 + x^2 \quad (2)$$

له سیگۆشه ی 2 دا

له جیاتی y له هاوکیشه ی 1: $(x-2)$ دابنی

$$a^2 = h^2 + (x-2)^2 \quad (3)$$

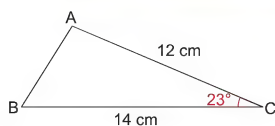
$$a^2 = (h^2 + x^2) + c^2 - 2cx$$



بنووسه ئايا دعتوانيت ياساي Sin بۇ شىكاركردى سىڭوشى بهرامبهرت بهكارىينيت؟ وهلامهكەت بهبهلگه پروونبكهوه.

58

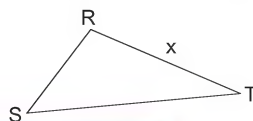
نامادەکردن بۇ تاقىکردنهوه



كام لهمانهى خوارهوه نزيكترين بههايه بۇ دريژى \overline{AB} ؟

- 5.5cm (ا) 14.4cm (ب) 7.5cm (ج) 22.2cm (د)

كام لهم كۆمهله زانيارىيانه وادهكەن ههژماركردى بههاى x بهياساي ساين نهجام بدرت.

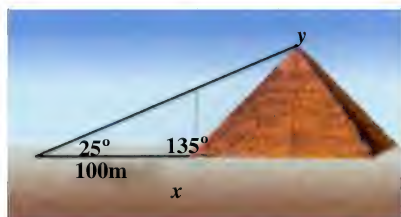


(ا) $ST=15.3$, $RS=8.1$, $m\hat{T}=38^\circ$

(ب) $ST=9$, $m\hat{S}=40^\circ$, $RS=4$

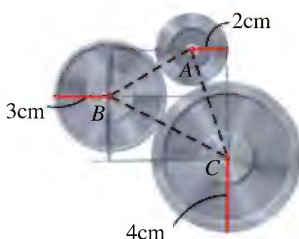
(ج) $ST=7$, $m\hat{S}=34^\circ$, $m\hat{R}=92^\circ$

(د) $m\hat{T}=31^\circ$, $m\hat{S}=44^\circ$, $m\hat{R}=105^\circ$



ئەدازيارىك بينى پرووى ههپهمىك گۆشهيهك لهگهڵ پرووى زهويدا دروستدهكات پيوانهكهى 135° ههروهها بينى پيوانهى ئهو بهرزه گۆشهيهى لوتكهى ههپهمهكه لهگهڵ خاليك كه 100m له بنكهكهيهوه دوور دهكات 25° دريژى لاي \overline{xy} چهنده؟

- 48m (ا) 81m (ب) 124m (ج) 160m (د)



بههنگارى و فراوانکردن

فرههنگاو 3 پهپك پيکهوه نوسينران وهك له ويئنهى

بهرامبهردا دياره، نيوتيرهى پهپكهكان بريتي بوون له 2cm، 4cm، 3cm له سىگۆشهى ABC دا $m\widehat{ACB}$ بدۆزهوه. وهلامهكەت بۇ نزيكترين پله نزيكبهوه.

پاستههيلي l به دووخالي $(-1, 1)$ ، $(1, 3)$ دا دهپوات، پاستههيلي m به دووخالي $(-1, 1)$ و $(3, 2)$ دا دهپوات. پيوانهى ئهو گۆشه تيزهى دوو پاستههيلهكه دروستى دهكەن ههژماربكه وهلامهكەت بۇ نزيكترين پله نزيكبهوه.

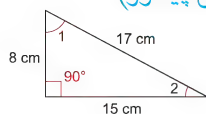
دهرياوانى بهندهرى B به دورى 5km له باشورى بهندهرى A هوهيه. كهشتيهك له بهندهرى A دهستى به جووله كرد به ئاراستهى باكوور -32° پۆژهلات خيرايبهكهى 6km/h. كهشتيهكهى دواى 45 خولهك چهند دووره له خالي B هوه. وهلامهكەت بۇ نزيكترين دهيهك له كيلومهتر نزيكبهوه.

پیداچونهوهى لولپيچى

لههر شيوازيكدا، ئهو ژمارديه بنووسه كه پلهكهى n بيت (پولهكانى پيشوو)

- 4, 6, 8, 10, 12, ... (67) 3, 5, 7, 9, 11, ... (66) 3, 6, 9, 12, 15, ... (65)

ريژهى سىگۆشهيهكان بهكارينه بۇ ديارىكردى گۆشهى A له ههر بارىكدا (پولهكانى پيشوو)



- $\tan \hat{A} = 1.875$ (70) $\sin \hat{A} = \frac{15}{17}$ (69) $\cos \hat{A} = \frac{15}{17}$ (68)

بژمىرى پروونكردهويى بهكارينه بۇ دۆزينهوى پيوانهى گۆشهتيزى A لههر پرسىيارىكدا. وهلامهكەت بۇ نزيكترين بهشى له ههزار نزيكبهوه.

- $\tan \hat{A} = 2.05$ (73) $\cos \hat{A} = 0.89$ (72) $\sin \hat{A} = 0.89$ (71)

نەخشە سىگۇشەيەكان

Trigonometric Functions



ئامانجەكان

جياکردنەوى نەخشە خولپەكان، جياکردنەوى نەخشە سىگۇشەيەكان و كېشانی پرونکردنەويەيان.

بۇ جى ئەمە فىر دەبين؟

دەتوانىت دياردە خولپەكان بە بەكارهينانى نەخشە سىگۇشەيەكان بنوئىرنىن، وەك شەپۇلە دەنگىيەكان (تەماشای نمونەى 3 بکە).

زاراوەكان Vocabulary

نەخشەى خوولى
(الدالة الدورية)
Periodic function

نەخشەى سىگۇشەيە
Trigonometric function

خول
Cycle

كاتى خوولاو
(الزمن الدوري)
Period

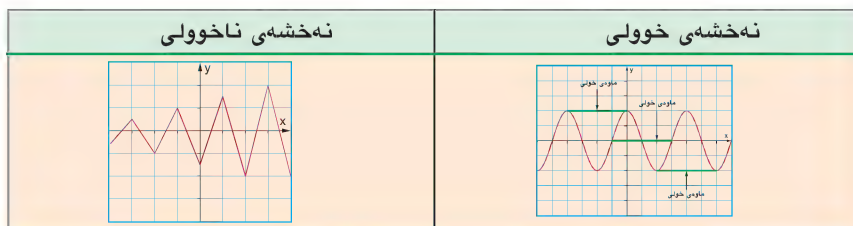
فراوانى
Amplitude

لەرملەر
Frequency

لادانى پرو
Phase shift

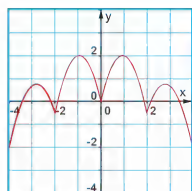
نەخشەى سىگۇشەيە **Trigonometric function** نەخشەيەكە پىساكەى بىرېكى سىگۇشەيە نەخشە سىگۇشەيە بنەپتەيەكان سيانن نەخشەى ساين **Sine function** $f(x) = \sin x$ و نەخشەى كۆساين **cosine Function** $f(x) = \cos x$ و نەخشەى تان **Tangent function** $f(x) = \tan x$ كاتىك x پىوانەى گۇشەكەبىت بە گۇشەى نيوتيرەى radian نەخشە سىگۇشەيەكان بەو جيا دەكرىنەو، كە بەهايكانيان بە شىوہيەكى خولى دووبارە دەبنەو. نەخشەى Sine پاسادانى $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ دەكات ئەمەش ئەو دەگەيەنېت ئەم نەخشەيە ھەمان بەھاي دەبىت كاتىك x لە ماوہى $[0, 2\pi]$ ، $[2\pi, 4\pi]$ دا دەبىت. دەتوانىن ئەمە بەم شىوہيە دەربېرىن، نەخشەى $\sin x$ خولايەو و كاتى خوولەكەى برىتيە لە 2π .

نەخشەى دووبارەبوو **Periodic function** ئەو نەخشەيە بەھايەكانى لە ماوہ پىكەكاندا دووبارە دەبنەو بەو ماوہ رىكانەش دەوترىت **Cycles** ھەموو خولەكان يەك درىژيان ھەيە. پىى دەوترىت كاتى خولى **Period** سەرەنجى ئەم پرونکردنەوانە بدە يەكپىكان خولپە ئەوتريان خولى نىيە دەبنىت خولەكە دەتوانىت لە ھەر خالپىكى چەماوہى نەخشەكەو دەستپىكات.

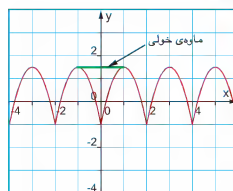


نمونە 1 جياکردنەوى نەخشە خولپەكان

ديارىبکە نەخشەكە خولپە يان نا، ئەگەر نەخشەكە خولپەبوو بوو ماوہى خولپەكەى دياربکە



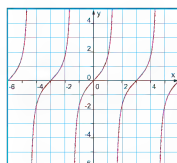
ب



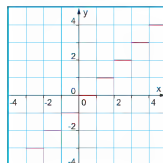
ا

شىوازەكە بە شىوہيەكى رىكويپىك دووبارە دەبىتەو كەوا
لە نەخشەكە دەكات نەخشەيەكى خولى بىت و كاتى
خولپەكەى 2 دەبىت
شىوازىك نىيە بە رىك و پىكى دووبارە بىتەو
ھەرچەندە پرونکردنەويەيەكە چەند ھاوجىبونىكى
تېدايە. نەخشەكە خولى نىيە.

1. دياربکە نەخشەكە خولپە يان نا ئەگەر خولى بوو، ماوہى خولپەكەى دياربکە.

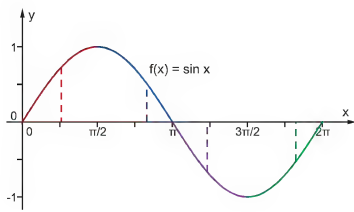


ب

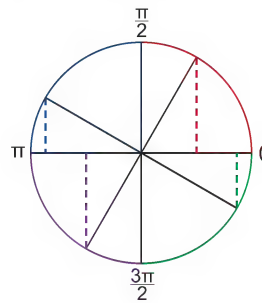


ا

نەخشە سىڭۇشەيىيە بىنەرەتتەيەكانى خولەين دەتوانىت چەماوۋى نەخشە $f(x) = \sin x$ لە پۈتتەختى پۈتۈندە بەبەكارهتتەيەكانى پۈتۈنى y بۇ ئەو خالانى دەكەونە سەر بازەنى يەكە دروستبەكەيت، كاتىك x گۆشە تەۋەرى θ لەبارى نمونەيدا بىنۆئىت.



y	x(=θ)
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$



دەتوانىت پۈنكردنەۋە نەخشە $f(x) = \cos x$ بەبەكارهتتەيەكانى پۈتۈنى x بۇ خالەكانى سەرىكەي بازەكە بىكشيت. فراوانى **Amplitude** نەخشە خولى برىتتەيە لە نىۋە جىاۋازى نىۋان گەرەتتەي بەهاۋ بچوكتتەي بەهاى. فراوانى ھەمىشە ژمارەيەكى مۇجەبە. فراوانى ھەرىكە لە دوو نەخشە Sin و Cos برىتتەيە لە $\frac{1-(-1)}{2} = 1$ بەلام فراوانى نەخشە tangent پىناسەنەكراۋە

سىفەتەكانى چەماۋى نەخشە سىڭۇشەيەكان

$y = \tan x$	$y = \cos x$	$y = \sin x$	نەخشە
			پۈنكردنەۋە نەخشە (چەماۋەكەي)
$\{x / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in I\}$	R	R	بۈر
R	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	مەۋدا
π	2π	2π	كاتى خولەي
پىناسە نەكراۋە	1	1	فراۋانى



پۇتتەيە

ھەردوۋ چەماۋى نەخشە Sin و tan بە خالى بىنەرەتتە دەرپۇن بەلام چەماۋى نەخشە Cos تەۋەرى y لە 1 دا دەپرىت.

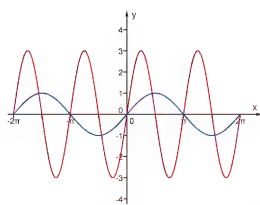
دەتوانىت چەماۋەكانى نەخشە سىڭۇشەيە بىنەرەتتەيەكان بۇ كىشەنى وئەنى پۈنكردنەۋەي $y = a \sin bx$ ، $y = a \cos bx$ ، $y = a \tan bx$ بەكاربىنەت بىرت بىت. كە a پاكىشەنى ستونى دەگەيەنەت كاتىك ($|a| > 1$) يان چوونەۋەيەكى ستونىيە كاتىك ($0 < |a| < 1$) ئەمەش دەپتە ھۆى گۇرپنى فراۋانى. ئەگەر a سالب بىت، پۈيۈستە جىگۇرپكى بە پۈنكردنەۋە بىرەت بە وئەدانەۋەيەكى ئاسۋىي دەنۆئىت، b نىشانەي كشانەۋە يان چوونەۋەيەكى ئاسۋىي وكاتى خولەيەكە دەگۇرەت.

جىگۇرپكى پۈنكردنەۋەيەكانى نەخشە سىڭۇشەيەكان

دەرەكان	ماۋى دوبارەپۈنەۋە	فراۋانى	نەخشە
دەرەكانى نىيە	$\frac{2\pi}{ b }$	$ a $	$y = a \sin bx$
دەرەكانى نىيە	$\frac{2\pi}{ b }$	$ a $	$y = a \cos bx$
دەرەكانى ستونىيەكان لە $x = \frac{\pi}{2 b } + \frac{k\pi}{ b }$ كاتىك $k \in I$	$\frac{\pi}{ b }$	پىناسە نەكراۋە	$y = a \tan bx$



ا چه ماوهی نهخسهی Sin به کار بیته بۆ وینه کیشانی نهخسهی $g(x) = 3 \sin 2x$



فراوانی و مهوادی نهخسه که دیاریبکه.

ههنگاوی 1 فراوانی و ماوهی کاتی خولی دیاریبکه.

له بهرئه وهی $a = 3$ که واته فراوانیه که $|a| = |3| = 3$

له بهرئه وهی $b = 2$ که واته فراوانیه که $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

ههنگاوی 2 وینهی پونکردنه وهیه که ی بکیشه.

پیوسته چه ماوهی نهخسهی بنه پرت به هاوکۆلکهی 3 رابکیشیت. و چونه وهیه کی ئاسۆیی به هاوکۆلکهی $\frac{1}{2}$ بۆ بکهیت. چه ماوهی نهخسهی بنه پرت تهوهری ئاسۆیی له چهند جار هکانی π ده بپیت، ههروهها چه ماوهی نهخسهی g تهوهری ئاسۆیی له چهند جار هکانی $\frac{\pi}{2}$ دا ده بپیت. گه ورهترین به های نهخسهی g له 3 داو بچووکتین به های له -3 دا ده بپیت.

ب چه ماوهی نهخسهی tan به کار بیته بۆ وینه کیشانی نهخسهی $h(x) = \tan 2x$ کاتی

خولیه که ی و یه کتر برینه ئاسۆیه کان و ده رکه نار هکانی دیاریبکه.

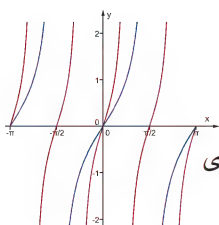
ههنگاوی 1 کاتی خولیه که ی دیاریبکه.

له بهرئه وهی $b = 2$ که واته کاتی خولیه که ی بریتیه له $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2}$

ههنگاوی 2 یه کتر برین له گه ل تهوهری ئاسۆیی بدۆزه وه یه که م یه کتر برین له $x = 0$ دا

ده بپیت. و له بهر ئه وهی کاتی خولیه که ی نهخسه که بریتیه له $\frac{\pi}{2}$ بۆ یه کتر برینه کان

له گه ل تهوهری ئاسۆیدا له $x = k\frac{\pi}{2}$ دا ده بپیت. کاتی $k \in \mathbb{I}$



ههنگاوی 3 ده رکه نار هکان دیاریبکه له بهر ئه وهی $b = 2$ بۆیه

ده رکه نار ه ستونیه که ی له $x = \frac{\pi}{2|2|} + \frac{k\pi}{|2|}$ یان $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

دا ده بپیت.

ههنگاوی 4 به به کار هیئانی ئه و زانیاریانی پیئشو چه ماوهی

نهخسهی h بکیشه

2. **ا** چه ماوهی نهخسهی Cos به کار بیته بۆ وینه کیشانی نهخسه که $g(x) = \frac{1}{3} \cos 2x$

فراوانی و کاتی خولیه که ی بۆ ئه و نهخسه یه دیاریبکه.



ب چه ماوهی نهخسهی tan به کار بیته بۆ وینه کیشانی نهخسه که $h(x) = 3 \tan \frac{1}{2}x$

و کاتی خولیه که ی بۆ ئه وهی نهخسه که یه کتر برینه ئاسۆیه کان و

ده رکه نار هکان بدۆزه وه.

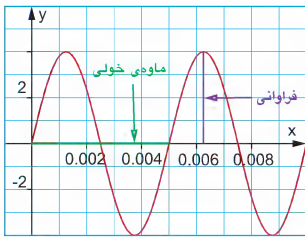


ده توانیت هه ردو نهخسهی Sin و Cos وه که نمونه بۆ لیکۆلینه وهی دیارده سروشتیه کان به کار بیئت وه که شه پۆله دهنگیه کان دهنگه جیا وازه کان شه پۆلی جیا جیا دروستده کن. **له ره له ره کان Frequency** بۆ ناسینه وهی دهنگه کان به کار دپیت. له ره له بریتیه له ژماره ی خوله کان له یه که یه کی کاتدا، ئه ویش هه لگه راوهی کاتی خولا نه وه که ی. بۆ پیوانه کردنی له ره له ره کان هیرتز Hz به کار دپیت. بۆ نمونه؛ کاتی که دهوتریت دهنگه که به له ره له ری 440 هیرتز، هیرتز مانای وایه شه پۆلی دهنگه که 440 جار له چرکه یه کدا دووباره ده بیته وه.

نمونه 3

جیبہ جیکردن له زانستی دنگدا

نخششی Sin به کاربینه بۆ وینه کیشانی شه پۆلکی دنگ کاتی خولیه که می 0.005 S و فراوانیه که می 4 cm بیټ لهرله ری ئو شه پۆله بدۆزه وه.



تهوهری ئاسۆیی بۆ چهند یه که یه که رهنوسی بکه یه که 0.001 چرکه بنوینیت. کاتی خولیه که می 0.005 چرکه ده خایه نیت تاخولیکی تهواو دروستبکات. به لام فراوانی به دوو به های گهرهترین و بچووکتترین دیاریده کرتیت. له بهر تهوهری لهرله ره که می یه کسانه به هه لگه راوهی کاتی خولیه که می. بۆیه به های که می بریتییه له $200 Hz = \frac{1}{0.005}$ لهرله ری دنگه که 200 هیرته.

3. نخششی Sin به کاربینه بۆ وینه کیشانی ئو شه پۆله دنگه می ماوهی دوو باره بوه که می 0.004 S و فراوانیه که می 3.0 m لهرله ری شه پۆلی ئو دنگه به هیرته بدۆزه وه



دهتوانریت ههردوو نخششی Sin و Cos جیگورکی پیبکرتیت به پاکیشان بۆ دهستکوتنی $y = \sin(x-h) + k$ یا $y = \cos(x-h) + k$ له بیرت بیټ پاکیشانی چه ماوه که k یه که به ستونی بۆ سه ره وه ده بیټ ئه گهر k موجهب بیټ وه بۆ خواره وه ده بیټ ئه گهر سالب بیټ. **لادانی روو (انحراف الطور) Phase Shift** بۆ نخششی که می دوو باره بووه بریتییه له پاکیشانی ئاسۆیی چه ماوه که، لادانی روو h یه که بۆ لای راست ده بیټ ئه گهر h موجهب و بۆ لای چهپ ده بیټ ئه گهر h سالب بیټ.

نمونه 4

دیاریکردنی لادانی روو بۆ ههردوو نخششی Sin و Cos

روونکردنه وه بی نخششی $f(x) = \sin x$ به کاربینه بۆ وینه کیشانی نخششی $g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ یه کتر برینه کان له گه ل تهوهری ئاسۆیی و لادانی روو دیاریبکه.

ههنگاوی 1 فراوانی و کاتی خولی دیاریبکه

له بهر تهوهری $a = 1$ بۆیه فراوانی $|a| = 1$

له بهر تهوهری $b = 1$ کاتی خولی بریتییه $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

ههنگاوی 2 لادانی روو بدۆزه وه.

له بهر تهوهری $h = -\frac{\pi}{2}$ بۆیه لادانی روو بریتییه له $\frac{\pi}{2}$ بۆ لای چهپ. له مه وه ده ستده که ویت که

هه موو یه کتر برینه کان وینه که $\frac{\pi}{2}$ یه که بۆ لای چهپ پاکیشاوه.

ههنگاوی 3 یه کتر برینه ئاسۆیه کان دیاریبکه.

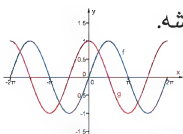
له بهر تهوهری نخششی بنه پرت له $x = k\pi$ دا تهوهری ئاسۆیی ده پرت کاتیک $k \in \mathbb{I}$ بۆیه ش

نخششی که له $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$ دا تهوهری ئاسۆیی ده پرت.

ههنگاوی 4 گهرهترین و بچووکتترین به ها دیاریبکه.

نخششی که گهرهترین یان بچووکتترین به ها وهرده گرتیت ئه گهر x له ناوه راستی یه کتر برینه کان بیټ له گه ل تهوهری ئاسۆیدا. گهرهترین به های نخششی که یه کسانه به 1 له $x = 2k\pi$ بچووکتترین به های نخششی که یه کسانه به -1 له $x = \pi + 2k\pi$ کاتیک $k \in \mathbb{I}$.

ههنگاوی 5 به به کاره یانانی زانیارییه کان وینهی چه ماوهی نخششی که بکیش.



4. چه ماوهی نه خشه $f(x) = \cos x$ به کاربښه بڼه وښه کښانی $g(x) = \cos(x - \pi)$ په کترېښه کان له گهډ ته وهری ناسوی و لادانی پوو دیاریکته.



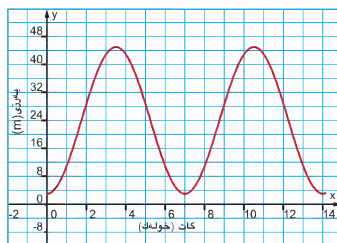
ده توانیت جیگورکیه کان به یه که وه نه انجام بدریت بڼه وهر ووه
 نه خشه Sin و Cos به هاکانی a, b, h, k به کاربښه بڼه
 دیاریکردنی سیفه ته دیارهکانی نه خشه ی Sin یا Cos.
 $y = a \sin b(x - h) + k$
 فراوانی لادانی پوو پاکښانی ستوونی ماوهی دوو باره بونه وه

نمونه 5 جیبه جیکردن

چرخ و فله کیکی مه زن په ک خول به 7 خوله ک ته واده کات. نه خشه ی
 $H(t) = 21 \sin \frac{2\pi}{7}(t - 1.75) + 24$ پښایه که بڼه دوزینه ووهی به رزی (به مه تر) بڼه هریه کیکی
 له کورسیه کان له زهویه وه به پی کات (چرخه).

۱ وښه ی چه ماوهی نه خشه که بڼه به رزی کورسیه که له ماوهی دوو خولدا بکښه.

$$k = 24, h = 1.75, b = \frac{2\pi}{7}, a = 21 \quad H(t) = 21 \sin \frac{2\pi}{7}(t - 1.75) + 24$$



هنگامی 1 جیا که ره وه سهره کیه کان نه خشه که
 دیاریکته فراوانی 21 کاتی خولی $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{7}} = 7$
 کاتی خولی بریتیه له ک کاته ی چرخ و فله که که
 دهیایه نیت بڼه ووهی خولیکی ته واده بکات. ده کاته 7
 خوله ک.

لادانی پوهه که: 1.75 خوله ک بڼه لای راست. پاکښانی ستوونی: 24 m بڼه سهره وه چه ماوه که
 ته وهره ی ناسوی نابریت. گه وهره ترین به ها: $24 + 21 = 45$ که نه خشه که له $t = 3.5$ و $t = 10.5$
 دا وهره گریت. بچو کترین به ها: $24 - 21 = 3$ که نه خشه که له $t = 0, t = 7, t = 14$ دا
 وهره گریت.

ب گه وهره ترین به رزی کورسیه که دهیگاتی چنده؟

گه وهره ترین به رزی کورسیه که بریتیه له $(24 + 21) = 45m$

5. چی ده بیت نه گهر...؟ وایدابی نه خشه که بریتیه بیت له $H(t) = -5 \cos \frac{\pi}{45}t + 7$ به پیی t (به چرخه).



۱ وښه ی پوونکردنه ووهی بڼه به رزی کورسیه که له ماوهی دوو خولدا بکښه

ب گه وهره ترین به رزی کورسیه که دهیگاتی چنده؟

بیریکه وه و تاوتویبکه

1. په یوه ندی نیوان له ره لهری نه خشه ی خولی وکاتی خولی چییه؟ نه مه چوڼ به سهر نه خشه ی
 Cos دا جیبه جیده بیت.

2. نه و په یوه ندیه ی گه وهره ترین و بچو کترین به ها
 و فراوانی و کاتی خولی دوو نه خشه ی Sin
 و Cos پیکه وه ده به ستیت چییه؟

3. پښخه ربه هیلکاریه که ی به رامبه رت دروستیکه وه و
 ته ووهی بکه له سهر هر جیگورکیه که نمونه
 بښه وه. ماوه ی کاتی خولی دیاریکته.

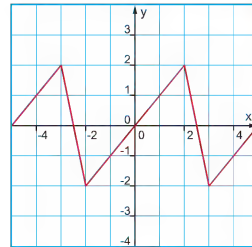
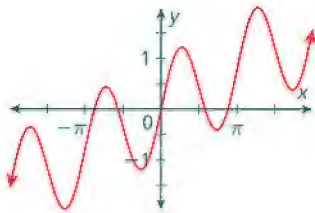
فراوانی ناسوی	چونه ووهی کی
لادانی به ره	وښه دانه وه
نه خشه ی Sin و Cos ستوونی	



راڤٽانه ناسٽه ڪراو

1 **زاراوه كان** به هاڪاني نه خشه خولي له ماوه ريڪه كاندا دووباره ده پٽه وه پي دهوترٽ ؟
(خول يان کاتي خولي).

دياريپه نه خشه خوليه يان نا، کاتي خولي بدوزهوه نه گهر خولي بوو.



1 پروانه غوونه

2 پروانه غوونه

چماوهي نه خشه بنه ردت به کاربښنه بو ويڼه کيښاني هره نه خشه يه، فراواني و کاتي خولي دياريپه

$$k(x) = \sin \pi x \quad 6$$

$$h(x) = \frac{1}{4} \cos x \quad 5$$

$$f(x) = \sin \frac{1}{2} x \quad 4$$

چماوهي نه خشه بنه ردت به کاربښنه بو ويڼه کيښاني هره نه خشه يه، ماوهي دووباره بوو ده يه کتر برينه کاني ناسويي درکه نارکان دياريپه.

$$k(x) = \tan 2\pi x \quad 9$$

$$h(x) = \tan \frac{1}{4} x \quad 8$$

$$f(x) = 2 \tan 3x \quad 7$$

10 **دهنگ** نه خشه Sine بو ويڼه کيښاني شه پوليکي دهنگي که کاتي خولي 0.01S (چرکه). فراوانيپه که 6 cm به کاربښنه. لهرلهری تهو شه پوله بدوزهوه.

3 پروانه غوونه

چماوهي نه خشه بنه ردت بو ويڼه کيښاني هره يه که لهم نه خشانه به کاربښنه. خاله کاني يه کتر برين له گهل تهو دره ناسويي و لاداني روو بو هر يه که يان دياريپه.

$$k(x) = \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \quad 13$$

$$h(x) = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \quad 12$$

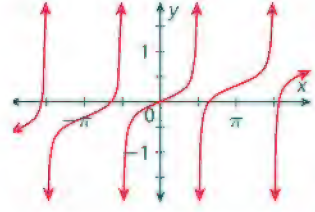
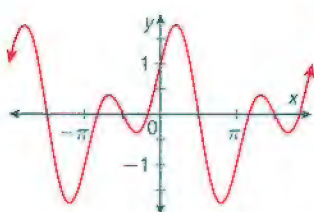
$$f(x) = \sin \left(x + \frac{3\pi}{2} \right) \quad 11$$

14 **بو خوشي** دهوانرٽ نه خشه $H(\theta) = -4 \cos \theta + 6$ بو هه ژمارکردني به رزي سواربووي جولا نه يه که (به پي) به گوږه ي گوږه ي θ که جولا نه که له گهل تهو راسته هيليه نه ستونه ي به سره کيدا دهرات پيکډنٽ. ويڼه يه کي پرونکردنه ويبي بکښه به رزي سواربووي جولا نه که بنوښنٽ، کاتيک $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ به رزي سواربووه که له $\theta = 60^\circ$ چنده؟

5 پروانه غوونه

راڤٽان و شيکارکردني پرسياره كان

دياريپه نه خشه خوليه يان نا، کاتي خولي بدوزهوه نه گهر خولي بوو.



چماوهي نه خشه بنه ردت به کاربښنه بو ويڼه کيښاني هر نه خشه يه، فراواني و کاتي خولي بدوزهوه.

$$\ell(x) = 6 \sin \frac{1}{3} x \quad 20$$

$$k(x) = -\cos 4x \quad 19$$

$$h(x) = \frac{3}{2} \sin x \quad 18$$

$$f(x) = 4 \cos x \quad 17$$

21 **دهنگ** نه خشه Sin بو ويڼه کيښاني شه پوليکي دهنگ به کاربښنه، نه گهر کاتي خولي 0.025 S و فراوانيپه که 50 cm بټ. له پاشاندا لهرلهری شه پوله که ي بدوزهوه.

راڤٽانه ناسٽه	
سهيږي	بوشيکارکردني
نموونه بکه	راڤٽانه كان
1	16-15
2	20-17
3	21
4	28-22
5	29

چەماوەی نەخشەى بنەرەت بۆ وینەکیشانی ھەریەك لەم نەخشانە بەکاربێنە کاتی خولی و خالەکانی یەکتەرپەڕین لەگەڵ تەوهرى ئاسۆیی و دەرکەنارەکان بدۆزەوه.

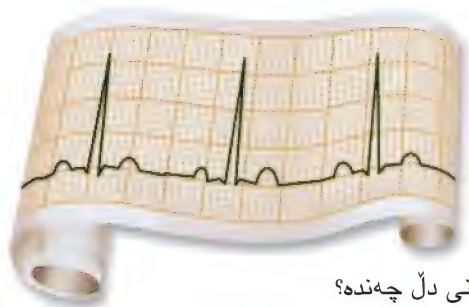
$$k(x) = -2 \tan \frac{\pi}{2} x \quad 24 \quad h(x) = \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \quad 23 \quad f(x) = \tan \frac{3}{2} x \quad 22$$

$$h(x) = \cos(x - 3\pi) \quad 26 \quad f(x) = \sin(x + \pi) \quad 25$$

$$g(x) = \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \quad 28 \quad k(x) = \sin \left(x + \frac{3\pi}{4} \right) \quad 27$$

29 زانستی دەریا دەتوانیت نەخشەى $d(t) = \frac{3}{2} \sin \left(\frac{5\pi}{31} t \right) + 23$ وەك رېسایەك بۆ دۆزینەوهی قوولی ئاوی یەكێك لەكەنداوهكان بە مەتر و بەپێی كات بەكاربێنیت. وینەى ئەم نەخشەیه بکێشه زۆرتەری و كەمترین قوولی بدۆزەوه.

30 پزیشكى وینەى بەرامبەر ھێلکاری دلی مرۆقیكى ئاسایی دەرەخات. ھەر خولیك لیڤانیكى دلی دنوینیت.



ا كاتی خولی لیڤانەكانی دلیك بدۆزەوه.

ب تێكڕای لیڤانەكانی دلی ژمارەكانییەتی لە خولەكێكدا.

تێكڕای لیڤانەكان لە ھێلکارییەكەى بەرامبەر چەندە؟

ج لەرەلەرى ئەم ھێلکارییە چەندە؟

د پەيوەندى نۆوان لەرەلەرى ئەم ھێلکارییە و تێكرای لیڤانە دلی چەندە؟

پەيوەندى نۆوان فراوانى و كاتی خوولى بۆ ھەریەك لەم نەخشانە بدۆزەوه، پاشان ئەو جیگۆرپیانە دیاریكە كە بەسەر نەخشەى بنەرەتدا ھاتوون تا بگەیتە ئەم نەخشانە.

$$g(x) = \frac{3}{4} \cos \frac{\pi}{4} x \quad 32 \quad f(x) = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - 1 \quad 31$$

$$\ell(x) = -3 \sin 3x \quad 34 \quad k(x) = \cos(2\pi x) - 2 \quad 33$$

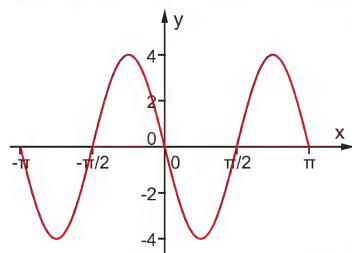
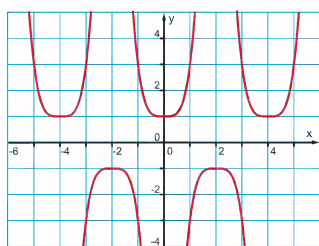
خەمڵاندن نەخشەى Sin و Cos بۆ خەمڵاندنى بەھای ھەر بړێك بەکاربێنە.

$$\cos 95^\circ \quad 38 \quad \sin 15^\circ \quad 37 \quad \cos 50^\circ \quad 36 \quad \sin 160^\circ \quad 35$$

نەخشەى Sine و Cosine بۆ نواندنى ئەوھى دیاریکراوه بنووسە.

39 فراوانى 6 و كاتی خولییەكەى π **40** فراوانى $\frac{1}{4}$ و لادانى $\frac{3}{2}\pi$ بۆلای چەپ

نەخشەى Sine و Cosine بۆ نواندنى روونکردنەوھییەكە بنووسە.



43 بەرزترین ئاستى ھەلکشانی كەنداویك دەگاتە 3m ، ئاستى داكشانی دەگاتە 0 ھەلکشانەكە 6.1 كاتژمێر بەردەوام دەبێت تا دەكشێتەوه. و 6.1 كاتژمێرى تری دەوێت تا دەگەرێتەوه. دەتوانریت بەرزى ھەلکشانەكە h بەپێى كات t بنوێنریت.

ا فراوانى ئەو نەخشەیه و كاتی خولی چەندە؟ بەرزترین بەھا و نزمترین بەھا چەندە؟

ب وایدابنى ھەلکشانەكە بەرزترین بەھای دەبێت كاتێك $t = 0$ بەھای $h(0)$ چەندە؟ و بەھای $h(6.1)$ چەندە؟

ج نەخشەى h لەسەر شێوھى $h(t) = a \cos bt + k$ بنووسە؟

دەروازەىك

لەسەر پزیشكى

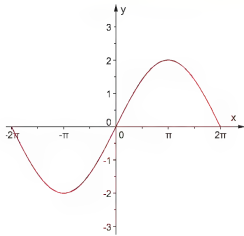


نامێرى ھێلکاری دلی بۆ پێوانى ئەو تەزوھ و کارە بايیەى فرمانى لیڤانەكانى دلی مرۆف لە كاتی دەستنیشانکردنى نەخۆشیەكانى دلدا پێك دەخات بەكاردێت.

44 بیری پەخەنگەر ئەگەر فراوانی نەخشەى Sin و کاتى خولییەكەیت زانى، ئایا دەتوانیت گەورەترین و بچووکتەین بەهای بدۆزیتەوه، ئەو بەهایانەى x دیاریکەیت بۆ ئەنجامدانى ئەو کارە پێویستە؟ چۆن بەکاریان دەهێنیت؟

45 بنۆسه چى بەسەر خولى دا دیت لە نەخشەى $f(x) = \sin bx$ کاتیک $b > 1$ ؟ وەکاتیک $b < 1$ ؟

نامادەکردن بۆ تاقیکردنەوه

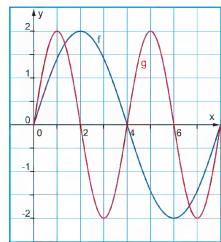


46 کام نەخشەى سێگۆشەیی بۆ وێنەى پروونکردنەوهی بەرامبەر گونجاوه؟

$f(x) = 2 \sin x$ (ب) $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$ (ا)
 $f(x) = 2 \sin \frac{1}{2} x$ (د) $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$ (ج)

47 فراوانی نەخشەى $f(x) = -4 \cos 3\pi x$ کامەیه؟

3π (د) 4 (ج) 3 (ب) -4 (ا)



48 وێنەى پروونکردنەوهی بەرامبەر بۆ دیاریکردنى پەيوەندى f و g بەکاربێنە.

- (ا) فراوانی f دوو ئەوەندەى فراوانی g ە.
 (ب) لەرەلەرى f دوو ئەوەندەى لەرەلەرى g ە.
 (ج) کاتى خولى f دوو ئەوەندەى کاتى خولى g ە.
 (د) خولى f دوو ئەوەندەى خولى g ە.

49 كورته وه لām چەماوەى نەخشەى $f(x) = \sin x$ بۆ وێنەكیسانی $g(x) = -4 \sin 2(x - \pi)$ لەماوەى $[0, 2\pi]$ دا بەکاربێنە و جیگۆرکیان دیاریکە.

بەرەنگارى و فراوانکردن

هەردوو نەخشەى $f(\theta) = \frac{1}{2} \sin \theta$ و $g(\theta) = 2 \cos \theta$ بەکاربێنە کاتیک $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

50 وێنەى چەماوەى هەردوو نەخشەكە لە هەمان پروتەختى پۆتاندا بکێشە.

51 بەهای نزیکەیی پۆوتانى هەر خالێك لە خالەکانى یەکتەرپىنى نیوان دوو چەماوەكە بدۆزەوه.

52 كەى لاسەنگەى $f(\theta) > g(\theta)$ راست دەبێت؟

پیداچوونەوهى لولپێچى

هەركۆمەلە ژمارەیهك بە شیۆهى ماوه (فتره) بنۆسه (پۆلەكانى پێشوو)

$0 \leq x \leq 9$ (55) $1 \leq x \leq 13$ یان $x \leq -2$ (54) $-7 < x \leq 5$ (53)

7	3		6	گۆلە باغ
	5	8		میلاقە
13		15	11	میخەك

56 گۆل لاقین 100 000 دینارى بۆ كړینى چەند چەپكە گۆلێك لە

گۆلەباخ و میلاقە (زنبق) و میخەكى پێیه. نرخى چەپكێك گۆلەباخ 6000 دینار و چەپكێك میلاقە 2000 دینار و چەپكێك میخەك 4000 دینارە (وانەى 2)

(ا) هاوكێشهیهكى هێلى بەسى نەزانراو بنۆسه پارەكە بنوینیت.

(ب) خشتەى بەرامبەر تەواوبكە.

پیدراوەكان بۆ شیکارکردنى سێگۆشەى ABC بەکاربێنە (وانەى 1-7)

$c = 20.2$, $b = 11.4$, $a = 9.2$ (58) $m\hat{A} = 165^\circ$, $c = 11$, $b = 2$ (57)

پوونکردنه وهی هاو ئه نجامه سیگوشه ییه کان

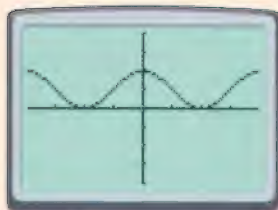
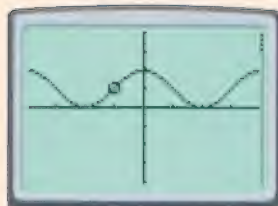


دهتوانیت بژمیری پوونکردنه وهی بۆ بهراوردکدن وینه پوونکردنه وهییه کان و داپشتنی دهسته واژه کان له سه هه وه نجامه سیگوشه ییه کان به کاربێنیت.

چالاکى

```
Plot1 Plot2 Plot3
V1:=sin(X)^2/(1-c
os(X))
V2:=1+cos(X)
V3:=
```

```
ZOOM MEMORY
1:ZBox
2:Zoom In
3:Zoom Out
4:ZDecimal
5:ZSquare
6:ZStandard
7:ZTrig
```



دیاریبکه نایا هاوکیشه ی $\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$ هاوئه نجامی سیگوشه ییه یان نا،

ئه گهر هاوکیشه که هاوئه نجام بیت ئه وا هیچ جیاوازییه ک نییه له نیوان ئه و چه ماوه یی رپساکه ی لای یه که مه وه و ئه و چه ماوه یی رپساکه ی لای دوومه.

1 بهرام بهر $\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$ و $1 + \cos x$ بهرام بهر Y2 تۆماربکه. رپگای 0 بۆ کیشانی وینه ی دووم هه لپژیره له گه ل هیلک که پێیدا تیپه رپت. ئه مه واده کات بتوانیت به دوا وینه پوونکردنه وه ییه که دا برۆیت.

2 شاشی وینه که دیاریبکه به به کاره یێنانی ZTrig: 7 له هه لپژاردنه کان zoom.

3 چاودیری شاشی بژمیره که بکه له و کاته ی وینه ی چه ماوه ی دووم ده کیشیت. بازنه یه که ده بینیت که له سه ر چه ماوه ی یه که م ده جۆلێت ئه مه نیشانه ی ئه وه یه چه ماوه ی نه خشی یه که م له سه ر چه ماوه ی نه خشی دووم ده کیشیت.

4 کاتیک بازنه که له وینه کیشانی چه ماوه ی دووم ده بێته وه دلنیا ده بێت له وه ی که هه ردوو چه ماوه که جوتن. ئه مه ش ئه وه ده گه یه نیت هاوکیشه که هاوئه نجامه. دواتر دهتوانیت به جه بری ساغکردنه وه ی بۆ بکه ییت.

هه ولبده

1 دهسته واژه یه ک بنووسه دیاریبکه نایا هاوکیشه ی $\frac{1}{\cos x} - \tan x \sin x = \cos x$ هاوئه نجامی سیگوشه ییه یان نا.

2 جه بریانه راستی یان ناپراستی وه لامة که ت له پرسیارى پێشودا به سه لمیته.

3 دهسته واژه یه ک بنووسه دیاریبکه نایا هاوکیشه ی $\frac{1 + \tan x}{1 + \frac{1}{\tan x}} = \tan x$ هاوئه نجامی سیگوشه ییه یان نا.

4 جه بریانه راستی یان ناپراستی وه لامة که ت له پرسیارى پێشودا به سه لمیته.

ھاوئەنجامە سیگۆشەییە بنەرەتییهکان Fundamental Trigonometric Identities



کى ئەمە بەکار دەهێنیت؟

کارگەیی دروستکردنی پێداویستییهکانی
 خلیسکێنە ھاوئەنجامە سیگۆشەییەکان بۆ
 دیاریکردنی چۆری ئەو مۆمەى لە تەختەى
 خلیسکێنە دەدەن بەکار دێن (نموونهى 3)

ئامانجەکان

- بەکارهێنانی ھاوئەنجامە
 سیگۆشەییە بنەرەتییهکان
 بۆ سادەکردنی بره
 سیگۆشەییەکان و
 نووسینەوهیان جاريکی تر
 و دڵنیاوون لە راستی
 ھاوئەنجامەکان.

دەتوانیت ھاوئەنجامە سیگۆشەییەکان لە سادەکردنی بره سیگۆشەییەکان بەکاربێنیت. لە بیرت بێت
 ھاوئەنجام لە بیرکاریدا پەيوەندییەكە، راست دەبێت بۆ هەموو ئەو بەهایانەى گۆراوەکانى پەيوەندییەكە
 وەریدەگرن. ئەم ھاوئەنجامانەى خوارەو بەکارهێنانى سەلمێنراوى قیساغۆرس پوختەکراوە.

سەلمێنراوى قیساغۆرس

هەردوو لا دابەشی r^2 بکە.

$\cos \theta$ لە جیاتی $\frac{x}{r}$ و $\sin \theta$ لە جیاتی $\frac{y}{r}$ دابنێ.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

ھاوئەنجامە سیگۆشەییە بنەرەتییهکان		
دژە ھاوئەنجامە	ھاوئەنجامى قیساغۆرسییهکان	ھاوئەنجامى \tan
$\sin(-\theta) = -\sin \theta$ $\cos(-\theta) = \cos \theta$ $\tan(-\theta) = -\tan \theta$	$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ $1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$	$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$



بۆ ئەوەى بيسەلمێنیت ھاوکێشەیهك ھاوئەنجامە، یهكێك له لایهكانى چەند جاريك بگۆرە، تاوەك
 لایهكەى ترى لیدییت. له ههنگاوكاندا ھاوئەنجامە بنەرەتییهکان بەکاربێنە.

سەلماندنی ھاوئەنجامە سیگۆشەییەکان

ھاوئەنجامە سیگۆشەییەكە بيسەلمێنە.

$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta} \tan \theta \quad \text{ا}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \theta} &= \frac{1}{\sin \theta} \tan \theta \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \\ &= \frac{1}{\cos \theta} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sin(-\theta)} = -\frac{1}{\sin \theta} \quad \text{ب}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin(-\theta)} &= \\ \frac{1}{-\sin \theta} &= \\ -\frac{1}{\sin \theta} &= -\frac{1}{\sin \theta} \end{aligned}$$

ئەو لایە هەلبژێرە كە دەتەوێت بگۆریت.

ھاوئەنجامى \tan بەكاربێنە.

سادە بکە

ئەو لایە هەلبژێرە كە دەتەوێت بگۆریت

دژە ھاوئەنجامەكە بەكاربێنە

سادە بکە

پۆشنایى

دەتوانیت هەر لایهك بگۆریت.
 بەلام وا باشتره كە لا ئالۆزەكە
 بگۆریت بۆ ئەوەى لاى دووهمت
 دەستبەكهوێت.

1. ھاوئەنجامە سیڭۆشەییەكە بەسەلمیئە.



$$1 - \frac{1}{\cos(-\theta)} = \frac{\cos\theta - 1}{\cos\theta} \quad \boxed{\text{ب}}$$

$$\sin\theta \frac{1}{\tan\theta} = \cos\theta \quad \boxed{\text{ا}}$$

دەتوانیت ھاوئەنجامە سیڭۆشەییەكان بۆ سادەکردنی برە سیڭۆشەییەكان بەكاربێنیت.

بەبەكارهێنانی ھاوئەنجامە سیڭۆشەییەكان بۆ سادەکردنی برە سیڭۆشەییەكان

نموونه 2

برە سیڭۆشەییەكە تەنھا بە ھۆی $\cos\theta$ بە سادەترین شیۆە بنووسە.

$$\frac{1}{\cos\theta} - \tan\theta \sin\theta \quad \boxed{\text{ب}}$$

$$\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} \quad \boxed{\text{ا}}$$

لەجیاتى دابنى

$$\frac{1}{\cos\theta} - \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\sin\theta$$

ھاوئەنجامى فیساغۆرسى

$$\frac{1-\cos^2\theta}{1-\cos\theta}$$

كەرتەكان لەپەك دەربەكە.

$$\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

جیاوازی نیوان دوو دوجا

$$\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{1-\cos\theta}$$

ھاوئەنجامى فیساغۆرس

$$\frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

سادەبەكە

$$1+\cos\theta$$

بەكاربێنە

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta}$$

سادەبەكە

$$\cos\theta$$

پۆشنایى

ئەگەر نەترانى برە
سیڭۆشەییەكە سادە بکەیت.
هەولێدە رێژە سیڭۆشەییەكە
بگۆڕی بۆ Sin یان Cos .

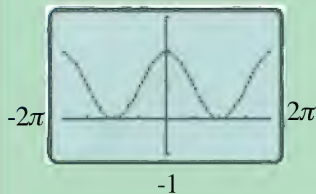
2. برە سیڭۆشەییەكە تەنھا بەپێى $\sin\theta$ بە سادەترین شیۆە بنووسە.



$$\frac{1}{\tan^2\theta} \quad \boxed{\text{ب}}$$

$$\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta} \quad \boxed{\text{ا}}$$

لە خوێندکارەوه بۆ خوێندکار ھاوتابوونی برەكە بە پوونکردنەوهیى پاسادان بکە.

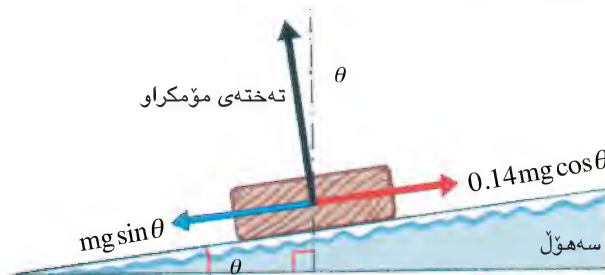


هەزەكەم بژمێرى پوونکردنەوهیى بۆ پاسادان كردنى
ھاوئەنجام بوونی دووبەرە بەكاربێنم بۆ ئەوێ لە
ھاوئەنجامبوونی ئەم دووبەرە $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$ و $1+\cos\theta$ دلنایام . بژمێر
بەكاربێنە بۆ دروستکردنی وێنەى پوونکردنەوهیى هەردوو
نەخشەى $y = 1 + \cos\theta$ و $y = \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$ لەسەر هەمان شاشە
لەبەرئەوێ هەردوو چەماوەكە لەسەر یەكترى جووتن مانای
ھاوتابوونی هەردووکیانم دەستكەوت.

جیبەجێکردنی پیشەسازی

نموونه 3

یەكێك لە و کارگانهى پێداویستییهكانى خلیسكینه دروستدەكات. لێكخشاندى
جۆریكى نوێ لە مۆم كە تەختەكەى پێ مۆم دەكریت تاقیدەكاتەوه لە پێگای
مۆمكردنى تەختەیهكى لاكێشه تەریبى و دانانى لەسەر پوویهكى لێژى سەھۆل
ئاستى پووی لاكێ سەھۆلەكە بە هیواشی بەرز دەكریتەوه تا پارچە تەختەكە
دەست بە خلیسكانى دەكات.



کاتیڭ تەختەگە دەست بە خلیسکان دەکات. پیکنەری بارستاییەکی تەریب بەرووی سەھۆلەگە $mg \sin \theta$ یەکسان دەبی بە بەرگری خلیسکاندەگە $\mu mg \cos \theta$ کە لە لیکخشاندەگە پەیدا دەبێت. کاتیڭ μ ھاوکۆلەکی لیکخشاندن بێت. گۆشە لیکخشاندن θ دیاریکە، واتە ئەو گۆشەیی ناستی رووی سەھۆلەگە لەگەڵ ناسۆدا دروستی دەکات، لەسەرەتای خلیسکاندندا، ئەگەر بزانی $\mu = 0.14$.

$$mg \sin \theta = \mu mg \cos \theta \quad \text{ھەردوو لا دابەشی} \quad mg \text{ بکە}$$

$$\sin \theta = \mu \cos \theta \quad \text{لەجیاتی دابنێ}$$

$$\sin \theta = 0.14 \cos \theta \quad \text{ھەردوو لا دابەشی} \quad \cos \theta \text{ بکە.}$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 0.14 \quad \text{ھاوئەنجامی} \quad \tan$$

$$\tan \theta = 0.14$$

$$\theta \approx 8^\circ \quad \text{بەکاربێنە} \quad \tan^{-1}$$

پارچە تەختەگە دەست بە خلیسکان دەکات، کاتیڭ پێوانەیی گۆشە θ دەبێتە 8 پلە بە نزیکەیی.

خوێندنەو

بیتی یۆنانی μ بە میو
بخوێنەرەو

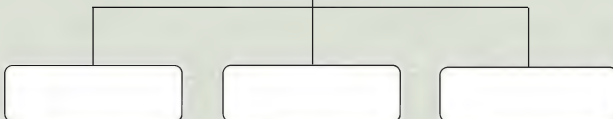
3. ھاوکێشە $mg \sin \theta = \mu mg \cos \theta$ بەکاربێنە بۆ دۆزینەوێ گۆشەیی خلیسکان، کاتیڭ ھاوکۆلەکی لیکخشاندن $\mu = 0.4$



بیربکەو و تاوتوییکە

1. باسبکە چۆن دەیسەلمێت ھاوکێشەیک ھاوئەنجامە
2. پروونییکەو کام ھاوئەنجام بۆ سەلماندنی $\sin^2 \theta = (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)$ بەکار دێت.
3. ریکخەر بە خشتەگە دروستبکەو و بە نووسینی ھاوئەنجامە فیساغۆرسییەکان تەواوی بکە.

ھاوئەنجامە فیساغۆرسییەکان



3-7 راپێنەکان

راپێنانی ئاراستەکراو

ھاوئەنجامە سیگۆشەییەگە بسەلمێنە.

$$\cos^2 \theta \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 \right) = \sin^2 \theta \quad \text{3}$$

$$\frac{1}{\tan(-\theta)} = -\frac{1}{\tan \theta} \quad \text{2}$$

$$\sin \theta \frac{1}{\cos \theta} = \tan \theta \quad \text{1}$$

ھەر برێک بە پێی $\cos \theta$ بە سادەترین شیوێ بنووسە.

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \tan^2 \theta \quad \text{6}$$

$$\left(1 + \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) (1 - \sin^2 \theta) \quad \text{5}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \tan \theta \quad \text{4}$$

1 پروانە نمونە

2 پروانە نمونە

7 فیزیا هاوکیشی $mg \sin \theta = \mu mg \cos \theta$ بۇ دۆزینەوی گۆشە خلیسکاندن لاکیشە تەریبکی شووشە لە سەر میزکی شووشە دانرابی. کاتیک پووە شووشە لار دەرکریتهوه، لاکیشە تەریبەکه دەست بە خزین دەکات، ئەگەر بزانیته هاوکۆلکە لیکخشاندن $\mu = 0.94$ بیته.

راهیئانی و شیکارکردنی پرسیارەکان

هاوئەنجامە سیگۆشەییەکه بسەلمیئە.

$$\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta} = 1 - \frac{1}{\tan \theta} \quad 9$$

$$\frac{1}{\cos \theta} \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\sin \theta} \quad 8$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} (1 - \cos^2 \theta) = \tan^2 \theta \quad 11$$

$$\tan \theta \sin \theta = \frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta \quad 10$$

هەر برەیهک بە پێی $\sin \theta$ بە سادەترین شیوە بنووسە.

$$\tan^2 \theta \quad 13$$

$$\frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta} \quad 12$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 \quad 15$$

$$\cos \theta \frac{1}{\tan \theta} + \sin \theta \quad 14$$



16 فیزیا هاوکیشی $mg \sin \theta = \mu mg \cos \theta$ بۇ دۆزینەوی بەرزترین لاری گونجاو بۇ ریگایە بەکاریبە که تایەکانی ئۆتۆمبیلی لەسەر بوەستیت بی ئەوهی بخلیسکیت.

فرە هەنگاو هەر برەیهکی سیگۆشەیی بە پێی یەک نەخشەیی سیگۆشەیی بنووسە.

$$\cos \theta + \sin \theta \tan \theta \quad 19$$

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \tan \theta \quad 18$$

$$\frac{1}{\sin \theta} (1 - \cos^2 \theta) \quad 17$$

$$\cos \theta (\tan^2 \theta + 1) \quad 22$$

$$\cos^2 \theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\cos \theta} \quad 21$$

$$\sin \theta \frac{1}{\sin \theta} - \cos^2 \theta \quad 20$$

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos^2 \theta} \quad 25$$

$$1 - \frac{\sin \theta \cos \theta}{\tan \theta} \quad 24$$

$$\sin \theta \cos \theta \tan \theta \quad 23$$

$$\cos \theta \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \right) \quad 28$$

$$\tan \theta \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \right) \quad 27$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta} \quad 26$$

$$\sin \theta \left(\frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \right) \quad 31$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \left(\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - \cos^2 \theta \right) \quad 30$$

$$\frac{\cos^2 \theta}{1 - \sin \theta} \quad 29$$

لە راستی ئەم هاوئەنجامانە بگەرێ.

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\cos \theta} \quad 34$$

$$\sin^2 \theta \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1 \right) = \cos^2 \theta \quad 33$$

$$\frac{\cos \theta - 1}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad 32$$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta (1 + \tan^2 \theta)} = \frac{1}{\tan^2 \theta} \quad 37$$

$$\frac{1 - \cos^2 \theta}{\tan \theta} = \sin \theta \cos \theta \quad 36$$

$$\frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{1}{\cos \theta} \quad 35$$

هاوئەنجامە بنەرەتیەکه بسەلمیئە بە بی بەکارهێنانی هیچ هاوئەنجامیکی تری بنەرەتی (ریژە سیگۆشەییەکان لەگەڵ x, y, r) بەکاریبە.

$$\frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad 39$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad 38$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad 41$$

$$1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad 40$$

42 دوتوانریت نهخشه $y(t) = 5 \sin t$ بۆ ههژمارکردنی کشانی سپرینگیک له ژیر کاریگهري تهئیکدا که پێوهی ههلواسرابیته به پێی کات t به چرکه. و نهخشه $z(t) = 2.6 \cos t$ بۆ ههژمارکردنی کشانی سپرینگیک تر له ژیر کاریگهري تهئیکدا که پێوهی ههلواسرابیته.

ا دووتنه بهههردوو سپرینگهکهوه له ههمان کاتدا ($t = 0$) ههلواسراون. دواي چهند چرکه. کشانی دوو سپرینگهکه یهکسان دهبن؟

ب کشان لهو ساتهدا چهند دهبیته؟

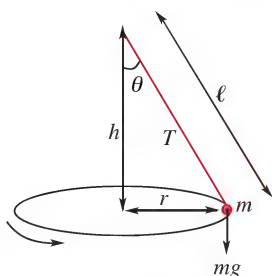
ج ئهو ساتانهی که کشانی دوو سپرینگهکه تیدا یهکسان دهبن کامانهن؟

بژمیری پوونکردنهوهی بژمیری پوونکردنهوهی بهکاربیته. بۆ ئهوهی بریاردهی ههیه که لهمانه هاوئهنجامن یان نا.

$$\frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta = \sin \theta \quad 44 \quad \left(\frac{1}{\sin \theta} - 1 \right) \left(\frac{1}{\sin \theta} + 1 \right) = \tan^2 \theta \quad 43$$

$$\frac{1}{\tan \theta} (\cos \theta + \sin \theta \tan \theta) = \frac{1}{\sin \theta} \quad 46 \quad \cos \theta \left(\frac{1}{\cos \theta} + \cos \theta \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad 45$$

$$\sin \theta \cos \theta = \tan \theta - \tan \theta \sin^2 \theta \quad 48 \quad \cos \theta = 0.99 \cos \theta \quad 47$$



49 **فیزیا** بهندۆلیک له جوولانیدا شیوه قوچهکیک دروست دهکات کاتیک

لهسهه بازنهیه که بجولیت، له جیاتی ئهوهی له لایه که بۆ لای

بهرامبهری بجیت. وینهی جولانهکی قوچهکیک که بنکهکی

بازنهی جولانهوهکیه. دهتوانیت یاسای $r = \frac{g \tan \theta}{\omega^2}$ بۆ

ههژمارکردنی نیوهتیره قوچهکه که r بهکاربیته، کاتیک هیماي

هیزی راکیشان g بی و ω گۆشه خیرایی بهندۆله که بیته.

ا ریسیای $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell \cos \theta}}$ و هاوئهنجامه سیگۆشهیهیهکان بهکاربیته بۆ نووسینهوهی ریسیای ههژمارکردنی نیوه تیره.

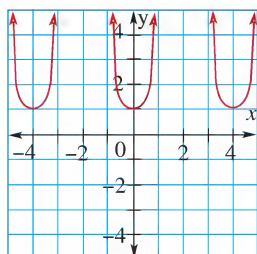
ب ریسیایه که بۆ ℓ به پێی ω و g و یه که نهخشه سیگۆشهی بنووسه.

بیری رهخنهگر به نهخشهیه که دهووتریت نهخشهیکێ تاک ئهگه $f(-x) = -f(x)$ و نهخشهیکێ جووت کاتیک $f(-x) = +f(x)$

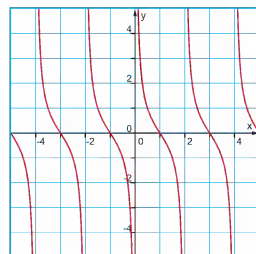
50 هه ر سێ نهخشه سیگۆشهیهیه بنه پتهیه که له نیوان تاک و جووتدا پۆلینه که.

51 چهماوهی نهخشه تاک و نهخشه جووت به چی لیکجیاده کریتهوه، چی له چهماوهی نهخشهکانی تر جیا یان دهکاتهوه.

دیاریبکه، ههیه که لهم نهخشانه تاکن یان جووتن.



53



52

54 **بیری رهخنهگرانه** چهند شیوه نووسینی تری هاوتا دهتوانیت بۆ $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ بهکاربییت به لایه نی که مه وه سیانیان بنووسه.

55 **بنووسه** $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ و $\cos(-\theta) = \cos \theta$ بهکاربیته بۆ ئهوهی $\tan(-\theta) = -\tan \theta$ دهستبکه ویت.



56 كام بىر ھاتى ئاى $\tan \theta$ دەپت؟

(ا) $\sin \theta$ (ب) $\cos \theta$ (ج) $\frac{1}{\cos \theta}$ (د) $\frac{1}{\cos \theta} \sin \theta$

57 كام بىر ھاتى سى برەكەى تر نابىت؟

(ا) $\frac{1}{\cos \theta} \frac{1}{\sin \theta}$ (ب) $\frac{1}{\cos^2 \theta} \tan \theta$ (ج) $\frac{\tan \theta}{\sin^2 \theta}$ (د) $\cos^2 \theta \tan \theta$

58 كام دەستەواژە سىگۇشەپپە ھاۋئەنجام نىپە؟

(ا) $1 + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$ (ب) $\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1 = \frac{1}{\tan^2 \theta}$ (ج) $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ (د) $1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$

59 كام بىر ھاتى $1 - \frac{1}{\cos^2 \theta}$ دەپت؟

(ا) $\tan^2 \theta$ (ب) $-\tan^2 \theta$ (ج) $\frac{1}{\tan^2 \theta}$ (د) $-\frac{1}{\tan^2 \theta}$

60 كورنە ۋەلام پاسادان بكة له راستى $\frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta} \sin \theta + \cos \theta$ بۇ ھەر ھەنگاۋىك بەلگە بىنەۋە.

بەرەنگارى و فراوانكىرن

برەكە بە شىۋەى كەرتىكى تاقانە بنووسە.

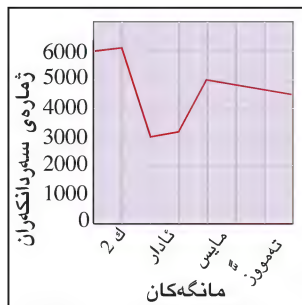
61 $\frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta}$ 62 $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 63 $1 - \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ 64 $\frac{1}{1 - \cos \theta} - \frac{\cos \theta}{1 - \cos^2 \theta}$

بە سادەترىن شىۋە بنووسە

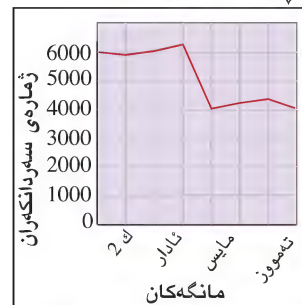
65 $\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1 = \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$ 66 $\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$ 67 $\frac{1}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\cos \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ 68 $\frac{1 - \frac{1}{\sin \theta}}{1 - \frac{1}{\sin^2 \theta}}$

پىداچوونەۋەى لولپىچى

69 گەشت و گوزار يەككە لە ئاماركاران پىدارۋەكانى لەسەر ژمارەى ئەۋكەسانەى لە ماۋەى 6 مانگا سەردانى دورگەكەيان كىدوۋە تۆماركىد. ئەۋ وىنە پوونكىرنەۋەپپەى ھەر بارىك دەردەپىت دىيارىبەكە.



2



1

ا بارى پىشىنى ھەلكرنى گەردەلۈل دەكات لە دوو مانگى ئادار و نىساندا.

ب بەرزبوونەۋەى پەلى گەرما لە ۋەرزى ھاۋىندا بوۋە ھۆى پەشىمانبوونەۋەى زۆرەپى گەشتىاران.

ھەر ئەگەرئەك بدۆزەۋە (پۆلەكانى پىشو)

70 دەرکەۋتنى ژمارە 4 لەكاتى ھەلدانى زارىكەۋە، دەرکەۋتنى پوۋى 4 لەكاتى ھەلدانى بەردەزارىكى تر.

71 دەرکەۋتنى دوو پوۋى شىر لە ھەلدانى پارچەپارەپەكى كانزايى دوچار.

لە ھەر نەخشەپەكى سىگۇشەپپە 4 بەھا بۇ گۇراۋى θ بدۆزەۋە. كەۋا لە نەخشەكە بكات پىناسە نەكراۋىپت.

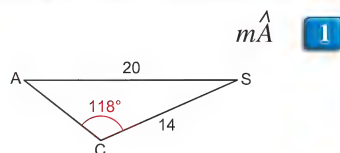
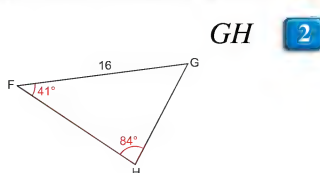
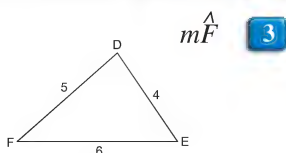
72 $y = -\tan \theta$ 73 $y = \frac{1}{\cos(0.5\theta)}$ 74 $y = -\frac{1}{\sin \theta}$

تاقىکردنەۋەى نىۋەى بەش

1-7 ياساى Sin و Cos



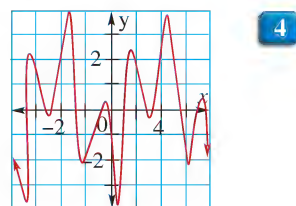
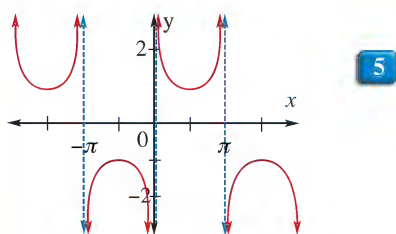
پىۋانەى ھەرىكەت كەلەمانە بدۆزەۋە. دىرېژىيەكان بۇ نىزىكتىن دەيەك و پىۋانەى گۆشەكان بۇ نىزىكتىن پەلە نىزىكەۋە



2-7 نەخشە سىگۇشەيەكان



دىارىبەكە، ئايا نەخشەكە خولويە يان نا، ئەگەر وايە كاتى خولى بدۆزەۋە



ۋىنەى پوونكردنەۋەى نەخشە سىگۇشەيە بىنەرەتتەيەكان بەكاربىنە بۇ ۋىنەكىشانى پوونكردنەۋەى ئەم نەخشە. فراۋانى و كاتى خولى بدۆزەۋە.

$$h(x) = 0.25 \sin \pi x \quad \text{8}$$

$$g(x) = -3 \sin x \quad \text{7}$$

$$f(x) = \sin 4x \quad \text{6}$$

ۋىنەى پوونكردنەۋەى نەخشە سىگۇشەيە بىنەرەتتەيەكان بەكاربىنە بۇ ۋىنەكىشانى پوونكردنەۋەى ئەم نەخشە، خالەكانى يەكتىرىن لەگەل تەۋەرى ئاسۋىي و لادانى روو بدۆزەۋە.

$$f(x) = \cos\left(x + \frac{5\pi}{4}\right) \quad \text{11}$$

$$g(x) = \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) \quad \text{10}$$

$$f(x) = \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{9}$$

ۋىنەى پوونكردنەۋەى نەخشە سىگۇشەيە بىنەرەتتەيەكان بەكاربىنە بۇ ۋىنەكىشانى ئەم نەخشە. خالەكانى يەكتىرىن لەگەل تەۋەرى ئاسۋىي و دەرەكان بدۆزەۋە.

$$f(x) = \tan \frac{1}{2} \pi x \quad \text{14}$$

$$f(x) = -2 \tan \frac{1}{2} x \quad \text{13}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \tan 4x \quad \text{12}$$

3-7 ھاۋئەنجامە سىگۇشەيە بىنەرەتتەيەكان



ئەم ھاۋئەنجامە سىگۇشەيە بىسەلمىنە

$$\frac{\frac{1}{\tan^2 \theta} - 1}{\frac{1}{\tan^2 \theta} + 1} = 1 - 2 \sin^2 \theta \quad \text{17}$$

$$\sin(-\theta) \frac{1}{\cos \theta} \frac{1}{\tan \theta} = -1 \quad \text{16}$$

$$\sin^2 \theta \frac{1}{\cos \theta} \frac{1}{\sin \theta} = \tan \theta \quad \text{15}$$

بەرەكە بەبەكارھىنانى يەك رېژەى سىگۇشەيە بىنۋوسە.

$$\frac{\frac{1}{\sin^2 \theta}}{\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}} \quad \text{20}$$

$$\frac{1}{\cos(-\theta)} \quad \text{19}$$

$$\frac{1}{\tan \theta} \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{18}$$

هاوئەنجامەکانی سەرجهەم و جیاوازی

Sum and Difference Identities

ئامانجەکان

- بەکارهێنانی هاوئەنجامەکانی سەرجهەم و جیاوازی بۆ ھەژمارکردنی بەھای برێ سێگۆشەییەکان.
- پێزکراوەی خولانەو و هاوئەنجامەکانی سەرجهەم و جیاوازی بەکاردێنیت بۆ ئەنجامدانی خولانەو.

زاراوەکان Vocabulary

پێزکراوەی خولانەو
Rotation Matrix

کێ ئەمە بەکار دەهێنیت؟

دەتوانیت هاوئەنجامەکانی سەرجهەم و جیاوازی لەگەڵ لیکدانی پێزکراوەکان بۆ دۆزینەووی خوولانەو شێوێک بەکاربێنیت (نموونە 4).

لیکدانی پێزکراوەکان و هاوئەنجامەکانی سەرجهەم و جیاوازی ئامرازێک بۆ دیارکردنی پۆتانی وێنە خالەکان بە خوولانەوێان بە دەوری خالی بنەپەت لە پروتەختی پۆتاندان.

هاوئەنجامەکانی سەرجهەم و جیاوازی

هاوئەنجامەکانی جیاوازی	هاوئەنجامەکانی سەرجهەم
$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$	$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

فێریە



نموونە 1

ھەژمارکردنی بەھای برێکی سێگۆشەیی بەکارهێنانی هاوئەنجامەکانی سەرجهەم و جیاوازی.

بەھای تەواوی ھەر برێک بدۆزەو.

$$\sin 75^\circ \quad \text{ا}$$

$$75^\circ = 30^\circ + 45^\circ \quad \text{بە شێوێک}$$

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(30^\circ + 45^\circ) \\ &= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) \quad \text{ب}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

1. بەھای تەواوی ھەر برێک بدۆزەو.

$$\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right) \quad \text{ب}$$

$$\tan 150^\circ \quad \text{ا}$$

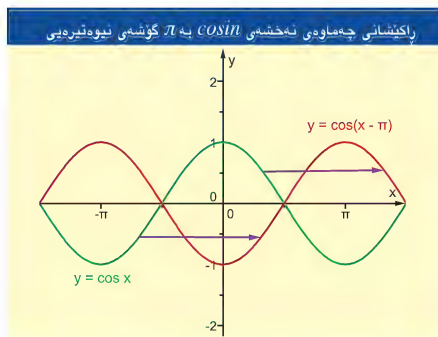
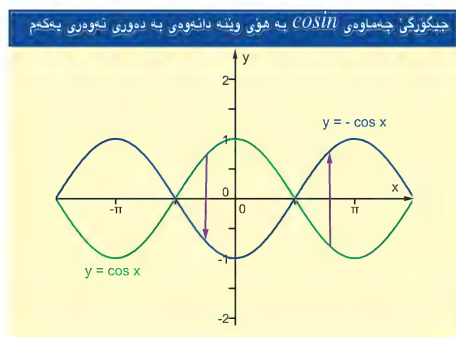


پۆتانی

زۆر پێگا ھەیە بۆ نووسینی

$$\begin{aligned} &: -\frac{\pi}{12} \\ &\text{بۆ نموونە } \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) \text{ یان } \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

راکیشانی چهماودی نهخشه ی Cosin به π گۆشه ی نیوه تیره یی بۆ لای راست هاوتای وینه دانه ویه به دهوری تهوهری یه کهم



ئهم کاره له نمونه ی 2 دا به به کاره یینانی هاوئه نجامه کانی جیاوازی ده چه سپیته

سه لماندنی هاوئه نجامی سیگۆشه یی به به کاره یینانی هاوئه نجامه کانی جیاوازی و سه رجه م

نمونه 2

بسه لمیته $\cos(x - \pi) = -\cos x$

$$\cos(x - \pi) =$$

لای چه پ هه لیزیره بۆ گۆرینی
 $\cos x \cos \pi + \sin x \sin \pi =$ هاوئه نجامی Cos جیاوازی $\cos(A - B)$ به کار بیته.

$$\cos x(-1) + \sin x(0) =$$

سه رجه م

$$-\cos x = -\cos x$$

2. بسه لمیته $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$



به کاره یینانی سه لمیترای قیساغۆرس له گه ل هاوئه نجامه کانی سه رجه م و جیاوازی

به های بره ی $\tan(A + B)$ بدۆزه وه نه گه ر بزانیته $\sin A = -\frac{7}{25}$ و $180^\circ < A < 270^\circ$

$$0^\circ < B < 90^\circ \text{ و } \cos B = \frac{8}{17}$$

هه نکاوی 1 و $\tan A$ و $\tan B$ بدۆزه وه.

گۆشه ی راگراو پیناسه ی پیره سیگۆشه ییه کانی $\sin A = \frac{y}{r}$ و $\cos B = \frac{x}{r}$ به کار بیته.

سیگۆشه ییه کی گۆشه وه ستاو بۆ هه ر گۆشه ییه که له چاره کی گونجاو بکیشه

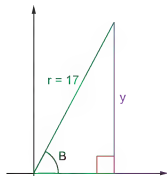
به x و y و r ناوینی

له چاره کی سییه م

$$\sin A = -\frac{7}{25} \quad 180^\circ < A < 270^\circ$$

له چاره کی یه که م $0^\circ < B < 90^\circ$

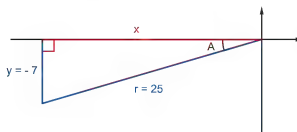
$$\cos B = \frac{8}{17}$$



$$8^2 + y^2 = 17^2$$

$$y = \sqrt{289 - 64} = 15$$

$$\tan B = \frac{y}{x} = \frac{15}{8} \text{ که واته}$$



$$x^2 + (-7)^2 = 25^2$$

$$x = -\sqrt{625 - 49} = -24$$

$$\tan A = \frac{y}{x} = \frac{7}{24} \text{ که واته}$$

له بیرت بیته

گۆشه ی راگرا بۆ گۆشه ی θ .
 بریتییه له گۆشه تیزه موجه به
 که کۆتا لای گۆشه که θ له گه ل
 تهوهری یه که م دروست ده کات.

ههنگاوی 2 هاوئهنجانی سهرجهم بهکاریینه

هاوئهنجانی *tangent* ی سهرجهمی

لهجیاتی دابنی

سادهبکه

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$= \frac{\frac{7}{24} + \frac{15}{8}}{1 - \frac{7}{24} \cdot \frac{15}{8}}$$

$$\tan(A + B) = \frac{\frac{52}{24}}{1 - \frac{35}{64}} = \frac{416}{87}$$

3. بههای برهه $\sin(A - B)$ بدۆزهوه ئهگهر زانیت $\sin A = \frac{4}{5}$ و $90^\circ < A < 180^\circ$ و $0^\circ < B < 90^\circ$ و $\cos B = \frac{3}{5}$

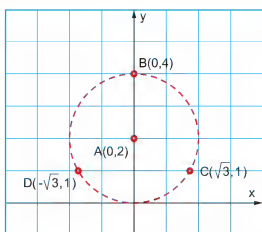


بۆ ئهوهی وینهی خالی $P(x, y)$ به خوولانهوهی گوشه θ بهدهوری خالی بنهپهت دا دهستبکهویت. ریزکراوهی خوولانهوه بهکاریینه.

بهکاریهینانی ریزکراوی خوولانهوه

خوولانهوهیهک به دهوری خالی بنهپهت بهگوشه θ ، هه خالی $P(x, y)$ جیگورکی دهکات بۆ خالی $P'(x', y')$ بهپپی ئهم هاوکیشهیه:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$



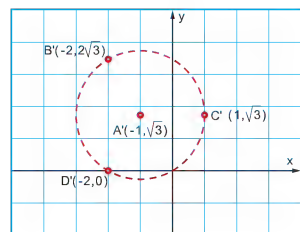
ههنگاوی 1 ریزکراوهی خوولانهوه R_{30} و ریزکراوهی خالهکان S بنوسه.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}, R_{30} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}$$

ههنگاوی 2 ههردوو ریزکراوهکه لیکبه.

$$R_{30} \times S = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & -2 \\ \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

ههنگاوی 3 پۆتانی خالهکانی - وینهکان بهم شیوهیهدهبن $A'(-1, \sqrt{3})$ $B'(-2, 2\sqrt{3})$ $D'(-2, 0)$ $C'(1, \sqrt{3})$



4. پۆتانی خالهکانی - وینهکان بدۆزهوه ئهگهر گوشهی خوولانهوه 60° بییت.



بیربکه وه و تاوتویبکه

1. باسی 3 ریگای جیاواز بکه، که بتوانیت تیایاندا هاوئه نجامه کانی جیاوازی به کاربینی بو دۆزینه وهی $\sin 15^\circ$.

2. پروونیبکه وه خاله کانی لیکچوون و لیکنه چوون له نیوان هاوئه نجامه کانی \sin و \cos ، چۆن نیشانه ی راده کان له هاوئه نجامه کاندایه یوهندی به دیاریکردنی هاوئه نجامی سه رجهم یان هاوئه نجامی جیاوازییه وه ههیه.

3. ریکخهر به هیلکارییه که بنوسه پاشان تهواوی بکه. بو ههر نهخشه یه که هاوئه نجامه کانی سه رجهم و جیاوازی له گهل نمونه یه که بنوسه.



راهینانه کان

4-7

راهینانی ئاراسته کراو

1 پیناسه ی خولانه وه پیوستی به دیاریکردنی چهقه که ی ههیه. بریتییه لهو خاله ی که خولانه وه که به دوریدا ده بیّت و گوشه که ی و ئاراسته که ی. له کاتی به کارهینانی ریزکراوه ی خولانه وه، چهقی خولانه وه ی پیوست چییه؟ ئاراسته ی خولانه وه ی پیوست چییه؟ به های بره که به تهواوی بدۆزه وه.

$\cos(-75^\circ)$ 5

$\tan \frac{\pi}{12}$ 4

$\sin \frac{11\pi}{12}$ 3

$\cos 105^\circ$ 2

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$ 8

$\tan(\pi + x) = \tan x$ 7

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ 6

به های بره که بدۆزه وه، ئه گهر زانیت $\sin A = \frac{-12}{13}$ و $180^\circ < A < 270^\circ$ و $\cos B = -\frac{4}{5}$ و $90^\circ < B < 180^\circ$

$\tan(A - B)$ 12

$\tan(A + B)$ 11

$\cos(A - B)$ 10

$\sin(A + B)$ 9

13 پووتانی خالی سه ره کانی وینه ی سیگوشه ی ABC بدۆزه وه کاتی $A(0, 2)$ ، $B(0, -1)$ ، $C(3, 0)$ بیّت به خولانه وه یه که گوشه که ی 120° و چهقه که ی خالی به رهت بیّت. وه لامه که ت بو نزیکترین به ش له سه د نزیکه وه.

راهینان و شیکارکردنی پرسیاره کان

به های ههر بریک به تهواوی بدۆزه وه.

$\cos \frac{11\pi}{12}$ 17

$\sin 195^\circ$ 16

$\tan 165^\circ$ 15

$\sin \frac{7\pi}{12}$ 14

هاوئه نجامه که به سه لمیته

$\tan(x - 2\pi) = \tan x$ 20

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x$ 19

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$ 18

راهینانی نازاد	
بۆشیکارکردنی سهیری	راهینانه کان نمونه بکه
1	17-14
2	20-18
3	24-21
4	25

به‌های بره‌که بدۆزه‌وه، ئه‌گه‌ر زانیت $\cos A = -\frac{12}{13}$ و $90^\circ < A < 180^\circ$ و $\sin B = -\frac{4}{5}$ و $270^\circ < B < 360^\circ$

$\sin(A+B)$ 21 $\tan(A-B)$ 22 $\cos(A+B)$ 23 $\cos(A-B)$ 24

25 پۆتانی وینە‌ی سه‌ره‌کانی سیگۆشه‌ی ABC بدۆزه‌وه کاتیگ $A(0, 2)$ ، $B(1, 2)$ ، $C(0, 1)$ به خولانه‌وه‌یه‌ک گۆشه‌که‌ی 45° چه‌قه‌که‌ی خالی بنه‌رپه‌ت بی‌ت. وه‌لامه‌که‌ت بۆ نزیکه‌ترین به‌ش له سه‌د نزیکه‌وه

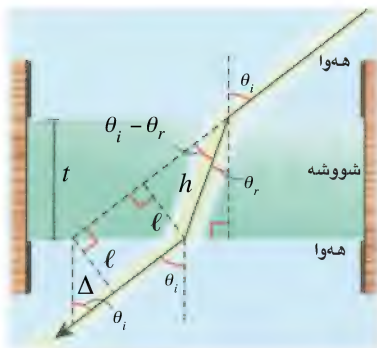
به‌های بره‌که به ته‌واوی بدۆزه‌وه.

$\sin 165^\circ$ 26 $\tan(-105^\circ)$ 27 $\sin(-15^\circ)$ 28 $\cos 195^\circ$ 29 $\cos \frac{19\pi}{12}$ 30

$\tan \frac{5\pi}{12}$ 31 $\sin 255^\circ$ 32 $\tan 195^\circ$ 33 $\cos \frac{\pi}{12}$ 34

به‌های θ بدۆزه‌وه ئه‌گه‌ر زانیت $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

$\cos(\theta - 30^\circ) = \frac{1}{2}$ 35 $\cos(\theta + 20^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 36 $\sin(180^\circ - \theta) = \frac{1}{2}$ 37



38 **فیزیا** پووناکی به گۆشه‌ی θ به شووشه‌دا تیپه‌ر ده‌بی‌ت. و به‌همان گۆشه لیوه‌ی ده‌رده‌چی‌ت. به‌لام خالی ده‌رچوونی

پووناکی له شووشه‌که‌وه به دوریه‌کی ئاسۆیی له خالی چوونه ژووره‌وی به بری $t = \left(\frac{\sin(\theta_i - \theta_r)}{\sin \theta_i \cos \theta_r} \right) \Delta$ دووره وه‌ک له وینە‌ی به‌رامبه‌ر دا دیاره.

ا به‌به‌کاره‌ینانی هاوئهنجانی سیگۆشه‌یه‌یه‌کان بری Δ ته‌نها به پی \tan بنووسه.

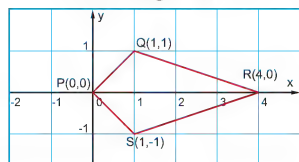
ب وینە‌ی به‌رامبه‌ر به‌کاره‌ینە بۆ نویسنی $\sin(\theta_i - \theta_r)$ به پی h و ℓ

فره‌هه‌نگاو به‌های هه‌ریه‌که له $\tan(A+B)$ و $\cos(A+B)$ و $\sin(A-B)$ له هه‌رباریگدا بدۆزه‌وه

$\sin A = -\frac{7}{25}$ و $180^\circ < A < 270^\circ$ ؛ $\cos B = \frac{12}{13}$ و $0^\circ < B < 90^\circ$ 39

$\sin A = -\frac{1}{3}$ و $270^\circ < A < 360^\circ$ ؛ $\sin B = \frac{4}{5}$ و $0^\circ < B < 90^\circ$ 40

41 بۆ دروستکردنی دروشمی به‌ره‌مه‌یکی نوی چوارلای $PQRS$ چه‌ند جارێک جیگۆرکی پیکراوه.



ا ریزکراوه‌ی خولانه‌وه‌کان به‌دهوری خالی بنه‌ره‌ت. بۆ ئه‌و خولانه‌وانه‌ی گۆشه‌کانی یه‌ک له دوا‌ی یه‌کن 90° ، 180° ، 270°

ب ریزکراوکان بۆ دیاریکردنی پۆتانی وینە‌ی چوارلایه‌که به هه‌موو خولانه‌وه‌کانیانه‌وه به‌کاره‌ینە.

ج له هه‌مان پووته‌ختی پۆتاندا وینە‌ی چوارلایه‌که به هه‌رسی خولانه‌وه‌کانیه‌وه بکێشه.

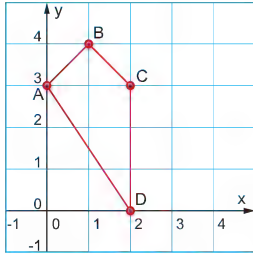
42 **بیری په‌خنه‌گر** ئایا ده‌توانیت به‌های $\sin \frac{11\pi}{24}$ به ته‌واوی بدۆزه‌وه به به‌کاره‌ینانی هاوئهنجانه‌کانی سه‌ره‌جم یان جیاوازی؟ پوونیکه‌وه.

43 نه‌خشه‌ی $y(t) = 4.2 \sin\left(\frac{2\pi}{3}t - \frac{\pi}{2}\right)$ بۆ دۆزینه‌وه‌ی کشانی سپرینگ له ژیر کاریگه‌ری ته‌نێک که پیوه‌ی هه‌لواسراو بی‌ت به پی کات به چرکه به‌کار دی‌ت.

ا فراوانی و کاتی خوولی نه‌خشه‌که بدۆزه‌وه.

ب هاوئهنجانی سیگۆشه‌یی به‌کاره‌ینە بۆ نویسنی ئه‌و نه‌خشه‌یه به پی \cos به‌ته‌نها.

ج کشانه‌که پاش 8 چرکه چه‌نده؟



ئەندازە پۈتۈنلىك سەرەكانى چوارلاي ABCD بدۆزەۋە كاتىك
 $A(0, 3)$ ، $B(1, 4)$ ، $C(2, 3)$ ، $D(2, 0)$ بە خولانەۋە گۆشە θ
 چەقەكە خالى بىنەپەت بىت ۋە لامەكەت بۇ نىكتىن بەش لەسەد
 نىكتىكەۋە.

44 $\theta = 45^\circ$ 45 $\theta = 60^\circ$ 46 $\theta = 120^\circ$ 47 $\theta = -30^\circ$

بنووسە 48 ئايا $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$ ؟ نمونەيەك بەيئەۋە بۇ پالېشتى ۋە لامەكەت.

نامادەكردن بۇ تاقىكردەۋە

49 كام لەمانەى خوارەۋە بەھاي بېرى سىگۆشەى $\cos 15^\circ \cos 45^\circ - \sin 15^\circ \sin 45^\circ$ ؟

1 $\frac{1}{2}$ 2 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4 $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

50 كام لەمانە بەھاي x ، ئەگەر $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \frac{1}{2}$

1 $\frac{\pi}{6}$ 2 $\frac{\pi}{4}$ 3 $\frac{\pi}{3}$ 4 $\frac{\pi}{2}$

51 بەھاي $\cos(A-B)$ بدۆزەۋە ، ئەگەر زانیت $0^\circ < A < 90^\circ$ ، $\sin A = \frac{1}{2}$ ۋە $0^\circ < B < 90^\circ$ ، $\cos B = \frac{3}{5}$

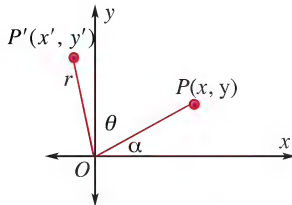
1 $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$ 2 $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$ 3 $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$ 4 $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$

52 **كورتە ۋە لام** بەھاي $\sin(-15^\circ)$ بە تەۋاۋى بدۆزەۋە ، ھەنگاۋەكانت دياربەك.

بەرەنگارى و فراوانكردن

53 ساغىبەكەۋە كە ھەلگەرپاۋەى پىزىكراۋەى خولانەۋە بە گۆشەى θ برىتتېيە لە پىزىكراۋەى خولانەۋە بە گۆشەى $-\theta$.

54 سەلمىنراۋى \tan سەرجمەى دوو گۆشە $\tan(A+B)$ سەلمىنە.



55 دياربەكە چۆن پىزىكراۋەى خولانەۋە بەبەكارھىننى

ھاۋئەنجامەكانى سەرجمەى \sin ۋە \cos دەستدەكەۋىت بىرت
 بىتەۋە لە پۇلى دەيەمدا تۈانىۋتە ھەر خاللىك ۋەك $P(x, y)$ لەسەر
 شىۋەى $(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ بەبەكارھىننى گۆشەى راگر بنووسە.

گۆشەى خولانەۋە بە دەۋرى خالى بىنەپەت بدۆزەۋە كە جىگۆركى بە سىگۆشەى ABC بۇ $A'B'C'$
 دەكات كاتىك $A(1, 0)$ ، $B(0, 2)$ ، $C(-1, 0)$ بىت.

56 $A'(0, 1)$ ، $B'(-2, 0)$ ، $C'(0, -1)$ 57 $A'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ، $B'(-\sqrt{2}, 2)$ ، $C'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

58 $A'(-1, 0)$ ، $B'(0, -2)$ ، $C'(1, 0)$ 59 $A'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ، $B'(-1, \sqrt{3})$ ، $C'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

پىداچوونەۋەى لولىيىچى

دابەش بىكە ۋادابىنى ھەموو بېرەكان پىناسەكراۋە (پۇلەكانى پىشۋو)

60 $\frac{3x^2}{7y^3} \div \frac{6x}{21y}$ 61 $\frac{x^2+x-2}{x^2-2x-8} \div \frac{x^2+3x+2}{x^2-3x-4}$ 62 $\frac{9x^3y^2}{15xy^4} \div \frac{6x^4y}{3x^2y^5}$

بەبەكارھىننى يەك پىژەى سىگۆشەى بېرەكە بنووسە. (۷-3)

63 $\frac{1}{\tan \theta} \times \frac{1}{\cos \theta}$ 64 $\frac{1}{\tan \theta} \div \frac{\tan \theta}{\sin \theta}$ 65 $\cos \theta \sin \theta \tan \theta$

هاوئەنجامەکانی دوو ئەوەندە گۆشە و نیو ئەوەندە گۆشە

Double-Angle and Half-Angle Identities



بۆچی ئەمە فیژدەبەین؟

دەتوانیت هاوئەنجامی دوو ئەوەندە گۆشە
بەکاربێنیت بۆ هەژمارکردنی دووری ئاسۆیی
هاوێژراویک وەک تۆپێکی گۆلف (پرسیاری 94)

بۆ بەدەستھێنانی هاوئەنجامەکانی دوو ئەوەندە دەتوانیت هاوئەنجامەکانی سەرچەم بەکاربێنیت

$$\sin 2\theta = \sin(\theta + \theta) \quad \text{بۆ نمونە}$$

$$= \sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta$$

$$= 2 \sin \theta \cos \theta$$

دەتوانیت هاوئەنجامەکانی $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$ بە هەمان رێگای پێشوو بدۆزیتەو هاوئەنجامی

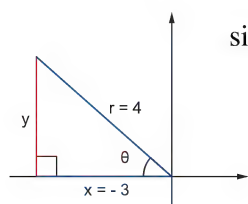
$\cos 2\theta$ سی شێوی هەیە. دەتوانین بەبەکارھێنانی هاوئەنجامی سەرچەمی \cos و هاوئەنجامی
بنەپەتی $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ بە دەستیان بێنن. وا باوە برە سێگۆشەییەکان بە پێی θ بنوسریت.

هاوئەنجامەکانی دووئەوئەندە		
$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$	$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$	$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$

فیژدە

هەژمارکردنی بەهای برەییەکی سێگۆشەیی بەبەکارھێنانی هاوئەنجامەکانی دوو ئەوەندە

بەهای ئەواوی $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ بدۆزەرەو ئەگەر زانیت $90^\circ < \theta < 180^\circ$ $\cos \theta = -\frac{3}{4}$



هەنگاوی 1 $\sin \theta$ بدۆزەرەو بۆ ئەوێ بەهای $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ بدۆزەرەو؟

رێگای یەكەم گۆشە پراگر بەکاربێنە.

لە چارەکی دووەم $90^\circ < \theta < 180^\circ$ $\cos \theta = -\frac{3}{4}$

سەلمینراوی فیساغۆرس
بەهای هەژماربەكە رەگی
موجب وەربرگە

$$(-3)^2 + y^2 = 4^2$$

$$y = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

رێگای دووەم شیکاربەكە

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \end{aligned}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

لەجیاتنی دابینی رەگی
دوو جا وەربرگە
سادە یەكە

نمونه 1

ئاگاداربە!

لە نیشانی x و y دەردەكەوێت.

گۆشە θ دەرەوێتە كام

چارەكەو.

cos	sin
+	+
-	+
-	-
+	-

یەكەم

دووەم

سێیەم

چوارەم

ههنگاوی 2 به های $\sin 2\theta$ بدۆزهوه

هاوئهنجامي $\sin 2\theta$ دوئوهونده

لهجياتي دابني

سادهبكه

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \frac{\sqrt{7}}{4} \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

ههنگاوی 3 به های $\cos 2\theta$ بدۆزهوه

هاوئهنجامي $\cos 2\theta$ دووئوهونده

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 2 \left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8}$$

1. به های تهواوی $\tan 2\theta$ و $\cos 2\theta$ بدۆزهوه. ئهگهر زانیت $\cos \theta = \frac{1}{3}$

$$270^\circ < \theta < 360^\circ$$



دهتوانیت هاوئهنجامهکانی دووئوهونده بهکاربیئت بۆ سهلماندنی هاوئهنجامه سیگۆشهیهیهکان.

سهلماندنی هاوئهنجامه سیگۆشهیهیهکان بهبهکارهیتانی هاوئهنجامهکانی دووئوهونده.

2 نمونه

هاوئهنجامهكه بهسهلمیته

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

ا

لای راست وهریگره.

هاوئهنجانی $\cos 2\theta$ بهکاربیته

سادهبكه

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

$$= \frac{1}{2} (1 - (1 - 2 \sin^2 \theta))$$

$$= \frac{1}{2} (2 \sin^2 \theta)$$

$$\sin^2 \theta = \sin^2 \theta$$

$$(\cos \theta + \sin \theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$$

ب

لای چهپ وهریگره

دووجاتهواوهكه بكهوه

كۆبكهوه

هاوئهنجانی $\sin 2\theta$ و

هاوئهنجانی فیساغۆرسیهکان

بهکاربیته

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta =$$

$$(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + (2 \cos \theta \sin \theta) =$$

$$1 + \sin 2\theta$$

$$1 + \sin 2\theta = 1 + \sin 2\theta$$

رۆشنایی

یهك لا ههلیژیره بۆ
گۆرانکاریکردن، نهوهك ههردوو
لا بهیهكجار.

2. هاوئهنجامهكه بهسهلمیته.

$$\sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

ب

$$\cos^4 \theta - \sin^4 \theta = \cos 2\theta$$

ا



دهتوانیت هاوئهنجانی $\cos 2\theta$ بهکاربیینی بۆ گهیشتن به هاوئهنجامهکانی نیوه.

بهبهکارهیتانی $\frac{\theta}{2}$ له جياتي

له نموونهی 2 سهلماندووته كه: $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ ههروهها $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ بهکاربیینه بۆ نووسینی $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ ئهگهر له جياتي θ ، دابینی هاوئهنجانی نیوئوهندمان دهستدهكهویئت.

هاوئەنجامەکانی نیوہ		
$\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta}}$	$\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos \theta}{2}}$	$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos \theta}{2}}$
دیاریکردنی نیشانە بەپێی شوینی کۆتا لا (دوالا) بۆ گۆشەی $\frac{\theta}{2}$ دەبێت لەباری نموونەییدا.		



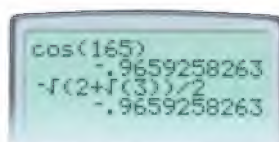
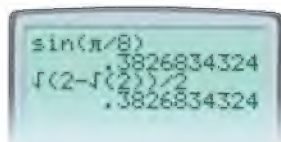
هاوئەنجامەکانی نیوہ یارمەتی ھەژمارکردنی بەھاکانی ھەر پرێکمان بە تەواوی دەدات.

نموونه 3 ھەژمارکردنی بەھاکانی پرە سیگۆشەییەکان بە بەکارھێنانی هاوئەنجامەکانی نیوہ

هاوئەنجامەکانی نیوہ بەکاربێنە بۆ ھەژمارکردنی ھەر پرێک بەتەواوتی.

<p>ب $\sin \frac{\pi}{8}$</p> <p>$\sin \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} \right)$</p> <p>موجب چونکە $\frac{\pi}{4}$ چارەکی یەكەمەوہ</p> <p>$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$</p> <p>$\sqrt{\frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{2}}$</p> <p>$\sqrt{\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right)}$</p> <p>$\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$</p>	<p>ا $\cos 165^\circ$</p> <p>$\cos \frac{330^\circ}{2}$</p> <p>سالبە چونکە 165° چارەکی دووہم</p> <p>سادەبکە</p> <p>$\cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$</p> <p>$-\sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{2}}$</p> <p>$-\sqrt{\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right)}$</p> <p>$-\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$</p>
---	--

بەبەکارھێنانی بژمیژی زانستی پاسادان بکە بەبەکارھێنانی بژمیژی زانستی پاسادان بکە



3. هاوئەنجامەکانی نیوہ بەکاربێنە بۆ دۆزینەوہی بەھای ھەر پرێک بە تەواوتی

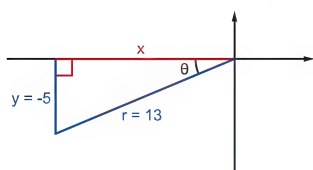
$\cos \frac{5\pi}{8}$ **ب**

$\tan 75^\circ$ **ا**



نموونه 4 بەکارھێنانی سەلمیترای فیساغۆرس و هاوئەنجامەکانی نیوہ

بەھای $\sin \frac{\theta}{2}$ و $\tan \frac{\theta}{2}$ بدۆزەوہ، ئەگەر زانیت $\sin \theta = -\frac{5}{13}$ و $180^\circ < \theta < 270^\circ$



ھەنگاوی 1 $\cos \theta$ بدۆزەوہ بۆ ئەوہی بتوانیت
هاوئەنجامەکانی نیوہ بەکاربێنی گۆشە ی پراگ
بەکاربێنە.

لە چارەکی سێیەم ھەژماربکە $180^\circ < \theta < 270^\circ$ $\sin \theta = -\frac{5}{13}$

سەلمیترای فیساغۆرس $x^2 + (-5)^2 = 13^2$

بەھای x ھەژماربکە $x = -\sqrt{169 - 25} = -12$

کەواتە $\cos \theta = -\frac{12}{13}$

ههنگاوی 2 بهای $\sin \frac{\theta}{2}$ ههژماربکه.

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} &= \sqrt{\frac{1 - (-\frac{12}{13})}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 + \frac{12}{13}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\frac{25}{13}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{25}{26}} = \frac{5\sqrt{26}}{26} \end{aligned}$$

ههنگاوی 3 بهای $\tan \frac{\theta}{2}$ ههژماربکه

$$\begin{aligned} \tan \frac{\theta}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \\ \tan \frac{\theta}{2} &= \sqrt{\frac{1 - (-\frac{12}{13})}{1 + (-\frac{12}{13})}} \\ &= \sqrt{\frac{1 + \frac{12}{13}}{1 - \frac{12}{13}}} \\ &= \sqrt{\frac{\frac{25}{13}}{\frac{1}{13}}} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

ئاگاداربە!

ورد به له دیاریکردنی
نیشانهی ههڕهك له $\sin \frac{\theta}{2}$, $\cos \frac{\theta}{2}$
ههگه $180^\circ < \theta < 270^\circ$
ههوا $90^\circ < \frac{\theta}{2} < 135^\circ$

4. بهای $\sin \frac{\theta}{2}$ و $\cos \frac{\theta}{2}$ بدۆزهوه ههگه زانیت $\tan \theta = \frac{4}{3}$ $0^\circ < \theta < 90^\circ$



بیربکهوه و تاوتویبکه

1. پوونبکهوه کام هاوئهنجامی دووئهنده بهکار دینیت بۆ سادهکردنی $\frac{\cos 2\theta}{\sin \theta + \cos \theta}$
2. باسیبکه چون نیشانهی $\sin \frac{\theta}{2}$ و $\cos \frac{\theta}{2}$ دیاریدهکری.
3. پیکهه به دوباره هیلکارییهکه دوباره بنوسهوه پاشان تهواری بکه. له ههڕه چوار چۆهیهك هاوئهنجامیکی بنوسه.



هاوئهنجامهکانی COS دوو نهوهنده



راهیانی ئاراسته کراو

به‌های هه‌ریه‌ک له $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$ بدۆزه‌وه.

$$0^\circ < \theta < 90^\circ : \sin \theta = \frac{4}{5} \quad \boxed{2}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi : \cos \theta = -\frac{5}{13} \quad \boxed{1}$$

1 پروانه نمونه

هه‌ریه‌ک له و هاوئه‌نجامانه بسه‌لمینه

$$\sin^2 \theta = 1 - \frac{\cos 2\theta + 1}{2} \quad \boxed{4}$$

$$2 \cos 2\theta = 4 \cos^2 \theta - 2 \quad \boxed{3}$$

2 پروانه نمونه

$$\sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} \quad \boxed{6}$$

$$\frac{1 + \cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{1}{\tan \theta} \quad \boxed{5}$$

به‌به‌کاره‌یانی هاوئه‌نجامه‌کانی نیوه به‌های بره‌کان بدۆزه‌وه.

$$\sin 112.5^\circ \quad \boxed{10}$$

$$\tan \frac{3\pi}{8} \quad \boxed{9}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} \quad \boxed{8}$$

$$\cos 67.5^\circ \quad \boxed{7}$$

3 پروانه نمونه

به‌های $\sin \frac{\theta}{2}$ و $\cos \frac{\theta}{2}$ و $\tan \frac{\theta}{2}$ بدۆزه‌وه

$$270^\circ < \theta < 360^\circ : \cos \theta = \frac{1}{4} \quad \boxed{12}$$

$$180^\circ < \theta < 270^\circ : \sin \theta = -\frac{24}{25} \quad \boxed{11}$$

4 پروانه نمونه

راهیان وشیکارکردنی پرسیاره‌کان

به‌های $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$ بدۆزه‌وه

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} : \tan \theta = \frac{20}{21} \quad \boxed{14}$$

$$90^\circ < \theta < 180^\circ : \cos \theta = -\frac{7}{25} \quad \boxed{13}$$

هه‌ریه‌ک له هاوئه‌نجامانه بسه‌لمینه

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \quad \boxed{16}$$

$$\frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} = 2 \cos \theta \quad \boxed{15}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} \quad \boxed{18}$$

$$\tan \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta} \quad \boxed{17}$$

به‌به‌کاره‌یانی هاوئه‌نجامه‌کانی نیوه به‌های بره‌که بدۆزه‌وه.

$$\tan 15^\circ \quad \boxed{22}$$

$$\sin 22.5^\circ \quad \boxed{21}$$

$$\cos \frac{5\pi}{12} \quad \boxed{20}$$

$$\sin \theta \frac{7\pi}{12} \quad \boxed{19}$$

به‌های $\sin \frac{\theta}{2}$ و $\cos \frac{\theta}{2}$ و $\tan \frac{\theta}{2}$ بدۆزه‌وه

$$180^\circ < \theta < 270^\circ : \sin \theta = -\frac{3}{5} \quad \boxed{24}$$

$$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi : \tan \theta = -\frac{12}{35} \quad \boxed{23}$$

فره‌هه‌نگاو بره‌که به ساده‌ترین شیوه بنووسه، پێژه سیگۆشه‌یه‌یه‌کان θ له جیاتی چه‌ند جاره‌ی θ به‌کارینه

راهیانی ئاراد

سهری	بۆشیکارکردنی
راهیانه‌کان	نمونه بکه
1	14-13
2	18-15
3	22-19
4	24-23

$$\cos 4\theta \quad \boxed{28}$$

$$\cos 3\theta \quad \boxed{27}$$

$$\sin 4\theta \quad \boxed{26}$$

$$\sin 3\theta \quad \boxed{25}$$

$$\frac{\cos 2\theta}{\cos \theta + \sin \theta} \quad \boxed{32} \quad \tan 2\theta \left(2 - \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) \quad \boxed{31}$$

$$\cos 2\theta + 1 \quad \boxed{30} \quad \cos 2\theta + 2 \sin^2 \theta \quad \boxed{29}$$

$$\frac{\cos 2\theta - 1}{\sin^2 \theta} \quad \boxed{34}$$

$$\frac{\cos \theta \sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} \quad \boxed{33}$$

35 نەخشەى $y(t) = 3.1 \sin 2t$ بۇ پىۋانى كىشنى سىرنگىك. لە ژىر كاريگەرى تەنىك كە پىۋەى ھەلۋاسراپىت بە پىۋى كات بە چركە دەنۋىنرېت.

ا نەخشەكە بە پىۋى پىژە سىگۇشەيەكان بۇ t لە جياتى $2t$ بەبەكارھىنانى ھاۋئەنجامەكانى دوو ئەۋەندە بنووسە.

ب نەخشەى $w(t) = 3.8 \cos t$ نموونەكە بۇ پىۋانى كىشنى سىرنگىكى تر لە ژىر كاريگەرى تەنىك كە پىۋەى ھەلۋاسراپىت. دووتەن بەھەريەكە لە دوو سىرنگەكەۋە لەيەك كاتدا $t = 0$ لە چ ساتىكدا كىشنى دوو سىرنگەكە لە جارى يەكەمدا يەكسان دەبن.

ج لەۋ ساتەدا كىشنى دوو سىرنگەكە چەند دەپىت؟

ھەنگاۋى جۇراۋ جۇر بەھاكانى $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$ و $\sin \frac{\theta}{2}$ و $\cos \frac{\theta}{2}$ و $\tan \frac{\theta}{2}$ بدۆزەۋە.

$$180^\circ < \theta < 270^\circ : \cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{37} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi : \cos \theta = -\frac{3}{8} \quad \text{36}$$

$$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi : \tan \theta = -\frac{1}{2} \quad \text{39} \quad 0^\circ < \theta < 90^\circ : \sin \theta = \frac{2}{5} \quad \text{38}$$

بەبەكارھىنانى ھاۋئەنجامەكانى نيۋە بەھى تەۋاۋەتى برەكان بدۆزەۋە.

$$\sin(-15^\circ) \quad \text{43} \quad \cos 105^\circ \quad \text{42} \quad \sin \frac{11\pi}{12} \quad \text{41} \quad \cos \frac{7\pi}{8} \quad \text{40}$$

$$\cos(-135^\circ) \quad \text{44}$$

ھاۋئەنجامەكە بسەلمىتە

$$\frac{\tan \theta + \sin \theta}{2 \tan \theta} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad \text{47} \quad \cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \quad \text{46} \quad \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\sin^2 \theta}{2(1 - \cos \theta)} \quad \text{45}$$

48 **بژمىرى پوونكردەۋەيى** ويئەى پوونكردەۋەيى $y = \frac{\cos x (1 - \cos 2x)}{\sin 2x}$ بكىشە. بۇ دۆزىنەۋەى ھاۋئەنجامىكى سىگۇشەيى. ئەۋ ھاۋئەنجامە جەبرىانە بسەلمىتە.

49 **ھەنگاۋى جۇراۋ جۇر** تۆپىكى گۇلف بەخىرايى سەرەتايى v_0 پى/چر ھاۋىژرا. بە پىۋى بەرزە گۇشەى θ نەخشەى $d(\theta) = \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{16}$ ھەژمارى ئەۋ ماۋە ئاسۋىيەكە تۆپەكە برپويەتى بكە.

ا نەخشەى پىشۋو بەبەكارھىنانى پىژەى سىگۇشەى 2θ بنووسە.

ب ئەۋ دوورىە ئاسۋىيە ھەژمارىكە كە تۆپەكە دەبىرپىت لە كاتىكدا خىرايى بنەرەتى 80 پىت لە چركەيەكدا بەبەرزە گۇشەكانى 15° ، 30° ، 45° ، 60° ، 75° .

ج ئەگەر خىرايىيە سەرەتايىيەكە نەگۇر پىت، كام گۇشە گەۋرەترىن دوورى ئاسۋىمان دەداتى.

د **چى دەپىت ئەگەر...**؟ خىرايى سەرەتايى 80 پى/چر. ديارىيكە كام يەكى لە دوو گۇشەكە پىۋىستە بىتە بەرزە گۇشە بۇ ئەۋەى دوورى ئاسۋىى براۋ لە 175 پى كەمتر نەپىت.

50 **بىركردەۋەى رەخنەگرانە** پوونىيكەۋە چۇن بەھى تەۋاۋەتى $\sin 7.5^\circ$ دەدۆزىتەۋە؟

51 **بنووسە** چۇن دەزانىت لە چ كاتىكدا ھاۋئەنجامى دوو ئەۋەندە ھاۋئەنجامى نيۋە بەكارىدېت.



52 بهای $\sin 2\theta$ چنده ئه گهر $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ؟
 (ا) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (ج) 1 (د) -1

53 بهای $\cos 2\theta$ چنده ئه گهر $\cos \theta = \sin \theta$ ؟

(ا) 0 (ب) 1 (ج) $2\sin^2 \theta$ (د) $2\cos^2 \theta$

54 بهای $\sin \frac{\theta}{2}$ چنده ئه گهر بزائیت $\cos \theta = -\frac{12}{13}$ و $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ؟

(ا) $\frac{\sqrt{26}}{26}$ (ب) $-\frac{\sqrt{26}}{26}$ (ج) $\frac{5\sqrt{26}}{26}$ (د) $-\frac{5\sqrt{26}}{26}$

55 بهای تهوادی $\sin 157.5^\circ$ چنده ؟

(ا) $-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$ (ب) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$ (ج) $-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$ (د) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$

56 کورته وه لام راستی $\frac{\cos 2\theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \cos \theta - \sin \theta$ پاسادان بکه. $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

به رهنگاری و فراوانکردن

57 $\tan 2\theta$ به به کارهینانی $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ بدوزهوه.

58 $\tan \frac{\theta}{2}$ به به کارهینانی $\sin \frac{\theta}{2}$ و $\cos \frac{\theta}{2}$ بدوزهوه.

هاوئه نجامه کانی نیوه بوی دوزینه وادی بهای تهوادی برهکان به کارهینه.

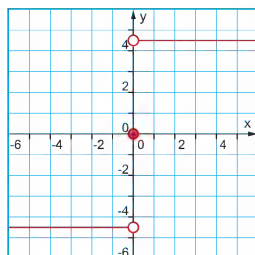
59 $\tan 7.5^\circ$ (60) $\tan \frac{\pi}{16}$ (61) $\sin \frac{\pi}{24}$ (62) $\cos 11.25^\circ$

63 بنووسه به هاکانی θ که پاسه دانی $\sin 2\theta = 2\sin \theta$ دهکات بدوزهوه له پیشدا به به کارهینانی وینهی روونکردنه ویدی ئه کاره بکه.

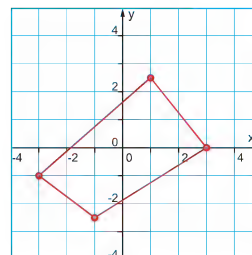
64 هاوئه نجامه کانی سرجه م و جیاوادی به کارهینه بوی به دستهینانی دوو هاوئه نجام.
 $\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$ و $\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

پیداچوونه وادی لولپچی

تاقیکردنه وادی راسته هیلی نه ستوونی به کارهینه بوی دیاریکردنی په یوه ندیبه که نه خشه یه یان نا (پوله کانی پیشوو).



66



65

کۆبکه وه یان لیدهر بکه، نهو به هایانی x دیاریبکه واله نه خشه که دهکن پیناسه نه کراو بیئت. (پوله کانی پیشوو)

67 $\frac{3x-2}{x+7} + \frac{2x+14}{x+7}$ (68) $\frac{4x-1}{x} + \frac{6x-2}{2x}$ (69) $\frac{7x+4}{x+1} - \frac{5x+8}{x-3}$ (70) $\frac{x+9}{x^2} - \frac{x}{x+2}$

بهای تهوادی برهکان بدوزهوه. (وانی 4-7)

71 $\sin(-\frac{\pi}{12})$ (72) $\sin 105^\circ$ (73) $\cos \frac{7\pi}{12}$ (74) $\cos 255^\circ$

زىندەزانى لە کردارى پۆشنەپىكەتەن پووەكەكان دووهم ئوكسىدى كاربۆن CO_2 و ئاو بۆ شەكر و ئوكسىجىن دەگۆریت لەسەر ئەم کردارە تووژىنەو دەكریت بە پېوانەى برك لە كاربۆن، كە پووەكەكە ھەلیدەمژیت (بەمايكرو مۆل) (Micromole) لە ھەر مەتر چوار گۆشە لە چركەدا دەپيوریت.

نەخشەى $C(t) = 1.2 \sin \frac{\pi}{12}(t-6) + 7$ پيسايەكە بۆ پېوانى ئەو ھىندە بە پىي كات t بەكاتر مېر.

15 وینەى پوونكرنەوھى نەخشەكە لە ماوھى دوو خولدا بكيشە.

16 كاتى خوولى نەخشەكە چەندە؟

17 گەرەترىن بەھای ئەو نەخشەيە چەندە؟ و كەى پوودەدات؟

وینەى پوونكرنەوھى نەخشە سىگۆشەيە بنەرەتيەكە بۆ وینەى كيشانى پوونكرنەوھى ئەم نەخشانە بەكاربىنە خالەكانى يەكتر برىن لەگەل تەوھرى ناسۆيى و دەرەكەنارەكان بدۆزەو.

18 $f(x) = \frac{1}{4} \tan x$

19 $f(x) = \tan \pi x$

20 $f(x) = \tan \frac{1}{2} \pi x$

ھاوئەنجامە سىگۆشەيەكان بسەلمینە.

21 $\frac{1}{\cos \theta} \sin \theta \frac{1}{\tan \theta} = 1$

22 $\frac{\sin^2(-\theta)}{\tan \theta} = \sin \theta \cos \theta$

23 $\left(\frac{1}{\cos \theta} + 1\right)\left(\frac{1}{\cos \theta} - 1\right) = \tan^2 \theta$

24 $1 + \cos^2 \theta \frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$

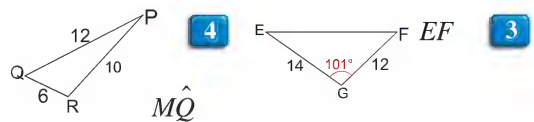
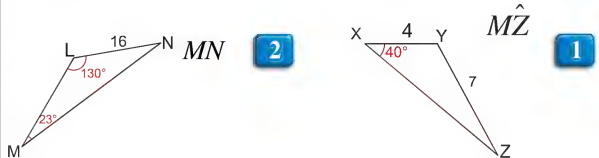
25 $\left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta}$

26 $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\cos \theta \sin \theta}$

27 $\sin^2 \theta \tan \theta = \tan \theta - \sin \theta \cos \theta$

28 $\frac{\tan \theta}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos \theta} \frac{1}{\sin \theta}$

پېوانەى ھەريەك لەمانە بدۆزەو دريژيەكە بۆ نزيكترىن بەش لە دەيەك و پېوانەكە بۆ نزيكترىن پلە نزيكەو.



وینەى پوونكرنەوھى نەخشە سىگۆشەيە بنەرەتيەكە بەكاربىنە بۆ وینەكيشانى ئەم نەخشانە، فراوانى و كاتى خوولى دياريبكە.

5 $f(x) = \cos 3x$

6 $g(x) = \cos \frac{1}{2} x$

7 $f(x) = -\frac{1}{3} \sin 3x$

8 $f(x) = 2 \sin \pi x$

9 $h(x) = \frac{1}{2} \cos 2x$

10 $g(x) = \frac{\pi}{2} \sin \pi x$

وینەى پوونكرنەوھى نەخشە سىگۆشەيە بنەرەتيەكە بۆ وینەكيشانى پوونكرنەوھى نەخشەكە بەكاربىنە، وەخالى يەكتر برىنى لەگەل تەوھرى ناسۆيى و لادانى پوو بدۆزەو.

11 $f(x) = \cos(x + \pi)$

12 $g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

13 $h(x) = \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$

14 $f(x) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$

بەبەكارھېتانی يەك نەخشەى سېگۆشەىى بېرەكە بنووسە

$$\frac{1}{\tan \theta} \frac{1}{\cos \theta} \quad 29$$

$$\frac{1}{\cos \theta} \sin \theta \tan \theta \quad 30$$

$$\tan(-\theta) \sin(-\theta) \cos(-\theta) \quad 31$$

$$\frac{\cos \theta \frac{1}{\tan \theta}}{\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1} \quad 32$$

بەھای تەواوەتى بېرەكە بدۆزەوہ

$$\sin \frac{19\pi}{12} \quad 33$$

$$\cos 165^\circ \quad 34$$

$$\cos 15^\circ \quad 35$$

$$\tan \frac{\pi}{12} \quad 36$$

بەھای بېرەكان بدۆزەوہ ئەگەر زانیتە $0^\circ < A < 90^\circ$ ، $90^\circ < B < 180^\circ$ ، $\tan A = \frac{3}{4}$ ، $\tan B = -\frac{5}{12}$

$$\sin(A+B) \quad 37$$

$$\cos(A+B) \quad 38$$

$$\tan(A-B) \quad 39$$

$$\tan(A+B) \quad 40$$

$$\sin(A-B) \quad 41$$

$$\cos(A-B) \quad 42$$

پۆتانی سەرەكانى چوارلاى $ABCD$ بدۆزەوہ كاتىك

بە $D(1, 2)$ ، $C(4, 2)$ ، $B(3, 0)$ ، $A(0, 0)$

خولانەوہیەك چەقەكەى خالى بنەرەتە و گۆشەكەى θ وەلامەكەت بۆ نزیكترین بەش لە سەد نزیكەوہ.

$$\theta = 30^\circ \quad 43$$

$$\theta = 45^\circ \quad 44$$

$$\theta = 60^\circ \quad 45$$

$$\theta = 90^\circ \quad 46$$

پۆتانی سەرەكانى چوارلاى $ABCD$ بدۆزەوہ كاتىك

بە $D(-5, 2)$ ، $C(0, 4)$ ، $B(5, 2)$ ، $A(0, 0)$

خولانەوہیەك چەقەكەى خالى بنەرەتە و گۆشەكەى θ وەلامەكەت بۆ نزیكترین بەش لە سەد نزیكەوہ.

$$\theta = 120^\circ \quad 47$$

$$\theta = 180^\circ \quad 48$$

$$\theta = 240^\circ \quad 49$$

$$\theta = 270^\circ \quad 50$$

بەھای بېرەكە بدۆزەوہ ئەگەر زانیت $0^\circ < \theta < 90^\circ$

$$\tan \theta = \frac{3}{4}$$

$$\sin 2\theta \quad 51$$

$$\cos 2\theta \quad 52$$

$$\tan \frac{\theta}{2} \quad 53$$

$$\sin \frac{\theta}{2} \quad 54$$

بەھای بېرەكە بدۆزەوہ ئەگەر زانیت $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ و

$$\cos \theta = \frac{3}{4}$$

$$\tan 2\theta \quad 55$$

$$\cos 2\theta \quad 56$$

$$\cos \frac{\theta}{2} \quad 57$$

$$\sin \frac{\theta}{2} \quad 58$$

ھاوئەنجامەكانى نیوہ بۆ دۆزینەوہى بەھای تەواوەتى بېرەكە بەكارپێنە.

$$\sin \frac{\pi}{12} \quad 59$$

$$\cos 75^\circ \quad 60$$

تاقیکردنه‌وه‌ی به‌ش

به‌های بره‌که بدۆزه‌وه نه‌گه‌ر زانیت $0^\circ < A < 90^\circ$ و $\tan B = \frac{12}{13}$ و $180^\circ < B < 270^\circ$ $\tan A = \frac{3}{4}$

$\sin(A + B)$ 10

$\cos(A - B)$ 11

پۆتانی سهره‌کانی چوارلای $ABCD$ بدۆزه‌وه $A(0, 1)$ ، $B(2, 1)$ ، $C(3, 3)$ ، $D(-1, 3)$ بیت. به خولانه‌وه‌یه‌ک چه‌قه‌که‌ی خالی بنه‌ره‌ته‌وه پۆوانه‌ی گۆشه‌که‌ی 30° وه‌لامه‌که‌ت بۆ نزیکتیرین به‌ش له‌سه‌د نزیکه‌وه.

به‌های بره‌که بدۆزه‌وه نه‌گه‌ر بزانیته $90^\circ < \theta < 180^\circ$ و $\tan \theta = -\frac{12}{5}$

$\sin 2\theta$ 13

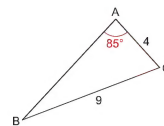
$\cos 2\theta$ 14

$\cos \frac{\theta}{2}$ 15

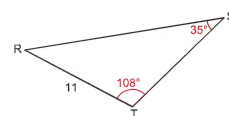
هاوئه‌نجامه‌کانی نیوه به‌کاربه‌ینه بۆ دۆزینه‌وه‌ی به‌های ته‌واوته‌ی بره‌ی $\sin \frac{3\pi}{8}$.

هه‌ر پۆوانه‌یه‌ک بدۆزه‌وه. درێژیه‌که بۆ نزیکتیرین ده‌یه‌ک و پۆوانه‌ی گۆشه‌که بۆ نزیکتیرین پله نزیکه‌وه.

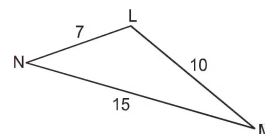
$m\hat{B}$ 1



RS 2



$m\hat{M}$ 3



وینه‌ی پروونکردنه‌وه‌ی $f(x) = \cos x$ بۆ وینه‌کیشانی 4

پروونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌ی $g(x) = \frac{1}{2} \cos 2x$ فراوانی و کاتی خوولی دیاریکه

وینه‌ی پروونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌ی $f(x) = \sin x$ 5

به‌کاربه‌ینه. بۆ وینه‌کیشانی نه‌خشه‌ی $g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ یه‌کتیرپین له‌گه‌ڵ ته‌وه‌ری ئاسۆیی و لادانی به‌ره دیاریکه.

وینه‌ی پروونکردنه‌وه‌ی $f(x) = \tan x$ نه‌خشه‌ی 6

کاتی خوولی ویه‌کتیر برینه‌کانی $g(x) = 2 \tan \pi x$ و ده‌رکه‌ناره‌کان دیاریکه.

ئه‌م هاوئه‌نجامه به‌سه‌لمینه $\frac{1}{\tan \theta} = \cos^2 \theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\cos \theta}$ 7

به‌به‌کاره‌ینانی یه‌ک رێژه‌ی سی‌گۆشه‌یی بره‌که بنووسه.

$\left(\frac{1}{\cos \theta} + 1\right)\left(\frac{1}{\cos \theta} - 1\right)$ 8

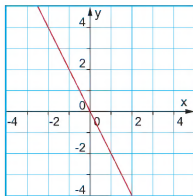
$\frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}$ 9

تاقیکردنه‌وهی که له که بوو

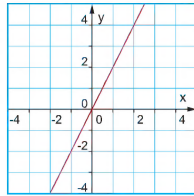


به‌شی
7

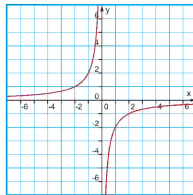
6 کام له‌مانه هیلکاری پرونکردنه‌وهی پچ‌هوانه‌ی نه‌خشه‌که‌یه، کاتیك $y=2$ و $x=-1$ ؟



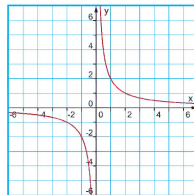
(ج)



(ا)



(د)



(ب)

7 هاوئه‌نجامه‌کانی نیوه به‌کاربینه بو دۆزینه‌وهی به‌های ته‌واوه‌تی $\cos 157.50^\circ$.

(ا) $-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$

(ب) $-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$

(ج) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$

(د) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$

8 بووتانه‌کانی سه‌ری چه‌ماوه‌ی نه‌خشه‌ی $f(x)=x^2+6x-4$ چییه؟

(ا) $(0, -4)$

(ب) $(-3, -13)$

(ج) $(-3, 5)$

(د) $(3, 5)$

9 $ABCDE$ پینج‌لایه‌کی قوقز $\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C}$ ، $\hat{D} \equiv \hat{E}$ ، چه‌نده $m\hat{C}$ ، $m\hat{A} = m\hat{D}$ ؟

(ج) 154.3°

(ا) 67.5°

(د) 225°

(ب) 135°

1 به‌های ته‌واوه‌تی $\tan 15^\circ$ چه‌نده؟

(ج) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(ا) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(د) $2-\sqrt{3}$

(ب) $2+\sqrt{3}$

2 دهرکه‌ناری نه‌خشه‌ی $y = \frac{1}{3 \tan 2x}$ له کۆیداده‌بن؟

(ا) $2\pi n$

(ب) $\frac{\pi n}{2}$

(ج) $3\pi n$

(د) $\frac{\pi n}{3}$

3 کاتی خوولی نه‌خشه‌ی $y = 5 \cos \frac{1}{3}x$ چه‌نده؟

(ا) $\frac{2\pi}{5}$

(ب) $\frac{5}{3}$

(ج) $\frac{2\pi}{3}$

(د) 6π

4 فلیمیک له 14 دیمه‌نی گفتوگو و 10 دیمه‌نی ئەکشن پیکدیت. به‌شیوه‌یه‌کی هه‌رهمه‌کی دیمه‌نیک هه‌لبژێرا. ئەگه‌ری ئەوه‌ی دیمه‌نه‌که ئەکشن بێت چه‌نده؟

(ا) $\frac{5}{12}$

(ب) $\frac{7}{12}$

(ج) $\frac{5}{7}$

(د) $\frac{7}{5}$

5 به‌های نه‌خشه‌ی $f(x)=3x^3+4x^2+7x+10$ چه‌نده له $x=-2$ دا.

(ج) -12

(ا) -44

(د) 36

(ب) 0

10 کام له مانه په کسان نښه به $\sin 60^\circ$

ا $\cos 30^\circ$

ب $\frac{\sqrt{3}}{2}$

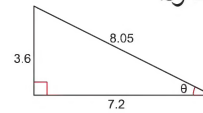
ج $\frac{\tan 30^\circ}{\sin 30^\circ}$

د $(\cos 60^\circ)(\tan 60^\circ)$

کورته وه لام

11 به های x چنده کاتيک $5\sqrt{2x-7} + 4 = 9$

12 به های $\cos \theta$ بدوزه وه وه لامه کت بؤ نزيکترين به ش له هه زار نزيکبه وه.



13 سرجه می ئم زنجيره ژماره ييه بدوزه وه. $\sum_{k=1}^{14} (3k-5)$

14 له دوو سيگوشه ی ABC ، DEF ، $\hat{A} \cong \hat{F}$ ، $\hat{B} \cong \hat{D}$ و $\hat{C} \cong \hat{E}$ ، $AC = 1.5$ و $DF = 3$ و $EF = 4.5$ پيوسته دريژي AB چهند بيت بؤ وهی هه ردو سيگوشه که هاوشيوه بن.

کورته وه لام

15 يانه ی شه تره نجی ئاماده یی سليمانی 12 ئه ندامه پيوسته به پيوه به ری خویندنگا که 2 ياريکه ر هه لبريژری بؤ به شداريکردن له قاره مانیه تی شه تره نجی عيراق.

ا به چهند ريگا ده توانين ئم دوو ياريکه ره هه لبريژرين

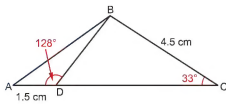
ب پوونيبکه وه بؤچی ئه و ريگايه ت بؤ شيکارکردنی پرسپاره که هه لبرارد.

16 په کبه دواي په کی 2, 12, 36, 108, 324, ... به کاربه يئنه

ا پينا سه يه کی ناشکرا بؤ راده ی n ی بنووسه

ب راده ی ده يه م کامه يه.

17 بؤ دوزه وهی هه ر پيوانه يه ک ويئنه که به کاربه يئنه دريژيه که ی بؤ نزيکترين ده له cm نزيکبه وه.



ج دريژي DC

د دريژي AB

وه لامي دريژ

18 خشته ی خواره وه نمره کانی خویندکاره کانی پولي 10 له بابته ی بيرکاری نيشانده دات.

90	85	72	86	94	96
85	95	94	68	71	85
93	98	84	83	80	89

بدوزه ره وه:

ا ناوه نده ژمي ره يی.

ب ناوه راس ته.

ج باو.

د ليکنه چوون.

ه لادانی پيوانه يی.

و مه ودا.

